

螺線型反應器에서의 溫度分布 *

朴 源 燾**

Temperature Profile on a Spiral Reactor

by Won Hee Park

Dept of Chem. Eng., College of Engineering, Seoul National University

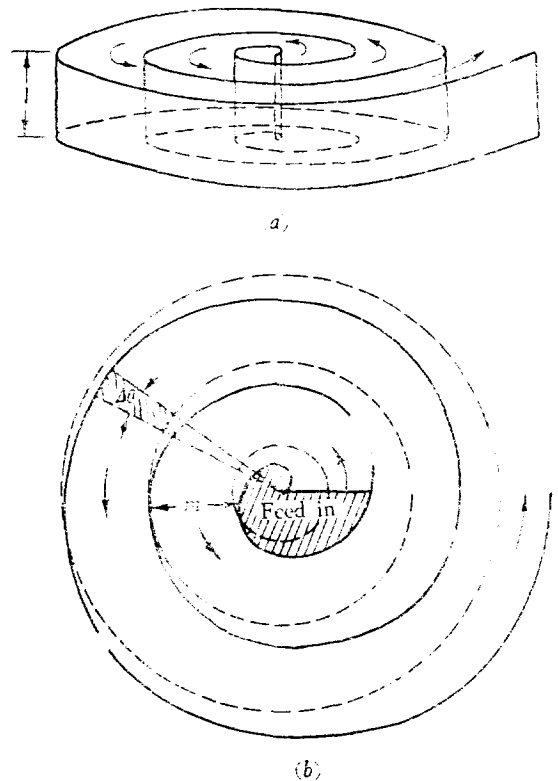
A new type of the chemical reactor "Spiral Reactor", which is considered to be more effective for the high-temperature chemical reaction than the conventional tubular reactor, is proposed.

As a first step to the theoretical study, equations of the temperature profile in the spiral reactor are derived and the method of the solution is given for an approximated circular model. A given example is solved by the proposed method. The result shows that about 70% of the heat loss in case of the equivalent tubular reactor were used, may be saved by using the spiral reactor.

序 言

工業적으로 사용되는 化學反應器의 모양에는 여러가지가 있다. 그 중에서 管狀反應器(tubular reactor)는 흔히 사용되는 反應器이나 反應速度가 느린 高溫度 反應에는 부적당하다. 即 反應速度가 느리면 反應器의 길이 가 길어지고 따라서 外部로의 熱傳達面積이 많아져서 熱損失 및 壓損失의 增加를 招來하고 反應器의 材料가 많이 들게되며 反應器가 차지하는 面積 또한 커지게 된다. 一般적으로 化學反應速度를 增加시키기 위하여는 높은 溫度에서 反應시키며 특히 吸熱反應의 경우에는 反應速度뿐만 아니라 平衡定數를 크게하기 위하여서도 높은 溫度가 必要하다.

이와 같이 管狀反應器에서 反應시키기에는 不適當한 高溫度反應은 새로운 모양의 反應器인 螺線型反應器⁽³⁾ (spiral reactor)를 사용하는 것이 적당하다고 생각된다. 即 Fig.1 과 같이 적당한 材料의 板을 螺線型으로 감아서 上下에는 넓은 板으로 막고 熱絕緣시킨다. 反應物은 이 反應器의 中心部分에 適當한 方法으로 導入되면 螺線型으로 흘러서 出口로 나오게 된다. 그러면 外部와 접촉하고 있는 가장 밖의 壁面을 통하여 熱의 損失이 있게되므로 같은 경도로 절연된 같은 길이의 管狀反應器와 比較하면 熱損失量이 훨씬 적어질 것이며 反應物의 溫度가 높게 유지되므로 反應速度가 빨라진다. 一般적으로 이러한 特徵을 가지고있는 螺線型反應器와



Broken curve represents corresponding circular model.

Fig.1. Spiral reactor models.

* 1963.10.25 受理

** 서울大學校 工科大學 化學工學科

管狀反應器의 長短點을 比較하면 첫째 螺線型反應器의 長點은

- (1) 外部와의 接觸面積이 적으며 熱損失이 적다.
- (2) 材料가 節約된다.
- (3) 차지하는 面積이 적다.

短點으로는

- (1) 壓損失이 같은 길이의 管狀反應器보다 크다.
- (2) 구조가 복잡하며 製造비가 비싸다.

그러나 이러한 短點에 比較 長點의 比重이 크므로 全體의 으로 보아 螺線型反應器는 通常의인 管狀反應器보다 高溫度反應에 有利하다고 할 수 있다.

주어진 反應을 주어진 條件下에서 反應시킬때 必要한 反應器의 크기를 決定하기 위해서는 反應器內部에서의 熱量 質量 및 運動量의 保存則을 適用해서 얻어지는 方程式을 同時에 풀면 된다. 그러나 이러한 方程式들을 同時에 풀기에는 너무 복잡하므로 螺線型反應器의 熱傳達特性을 알기 위한 첫 단계로 反應器內에서 溫度分布만을 理論的으로 求하고 같은 길이의 管狀反應器의 경우와 比較하여 螺線型反應器의 熱經濟的인 效率을 알아 보겠다.

理 論

螺線型反應器에서 流體가 흐르는 流路의 壁의 方程式은 極座標系에서

$$r = \frac{m}{2\pi} (2n\pi + \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad n=0,1,2,\dots,N$$

으로 表示된다. 여기서 m 은 流路의 폭이며 $n=0$ 의 경우는 流體를 導入하는 入口의 壁의 方程式이 되며 $n=N$ 인 경우는 反應器의 外部와 接觸하고 있는 壁의 方程式이 된다. 方程式을 유도하기 前에 우선 다음과 같은 假定을 한다.

即 (1) 定留狀態

- (2) 斷面積에 대한 溫度는 一定하다.

即 溫度는 θ 만의 函數이다.

- (3) 모든 物理量은 反應器內의 平均 條件에서의 값으로 하며 一定하다.

- (4) 軸方向의 熱傳達은 無視하고 流路壁을 통한 熱傳達만을 고려한다.

지금 n 號 流路의 한 微分要素에 대한 熱收支를 取하면 (Fig.1)

$$\begin{aligned} [GC_p]m \, T_n]_{\theta} - [GC_p]m \, T_n]_{\theta+\Delta\theta} \\ - \frac{m\Delta\theta}{2\pi} [2(n-1)\pi + \theta] \Delta\theta (T_n - T_{n-1}) \\ - \frac{m\Delta\theta}{2\pi} [2n\pi + \theta] \Delta\theta (T_n - T_{n+1}) = 0 \end{aligned}$$

$\Delta\theta$ 로 나누고 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 의 極限을 取하면

$$GC_p \frac{dT_n}{d\theta} + \frac{h}{2\pi} [2(n-1)\pi + \theta] (T_n - T_{n-1})$$

$$+ \frac{h}{2\pi} (2n\pi + \theta) (T_n - T_{n+1}) = 0 \quad (2)$$

여기서 G 는 流體의 質量速度, $g/(cm^2)(sec)$ 이며 C_p 는 平均比熱, l 은 反應器의 높이이다. 式 (2)에 대한 初期條件은

$$\begin{aligned} T_1 = T_0 = \text{一定}, \quad \theta = 0, \quad n = 1 \\ T_n = T_{n-1}(2\pi), \quad \theta = 0, \quad n = 2, 3, \dots, N-1 \end{aligned}$$

가장 밖의 流路(N 號)에 대해서는

$$\begin{aligned} GC_p \frac{dT_N}{d\theta} + \frac{h}{2\pi} [2(N-1)\pi + \theta] (T_N - T_{N-1}) \\ + \frac{h}{2\pi} (2N\pi + \theta) (T_N - T_a) = 0 \quad (3) \\ T_N = T_{N-1}(2\pi), \quad \theta = 0 \end{aligned}$$

여기서 U 는 外部와 接觸하고 있는 壁의 總括熱傳達係數이고 T_a 는 外部溫度이며 一定하다고 한다.

反應器內의 溫度分布는 $(N-1)$ 號의 式(2)와 (3)을 주어진 條件에 대해서 풀면 된다. 그러나 이들 聯立階差微分方程式 중에는 θT_n 의 項이 있으므로 Laplace 變換을 써서 解를 求하기가 어렵기 때문에 Fig.1의 θ 에서와 같은 近似 model을 생각해서 溫度分布를 求하기로 한다. 即 螺線型的 流路를 그에 對應하는 圓型流路를 假定하여 첫째 圓型流路를 나온 流體는 둘째 圓型流路로 들어가고 N 번 圓型流路를 돌아서 나온다고 생각한다. 이렇게 近似 model을 생각함으로써 導入되는 誤差는 다음과 같이 全流路壁의 길이와 실제 流體가 흐르는 流路의 길이를 比較함으로써 推導할 수 있으며 두 model에서의 流體力學的인 差異는 거의 무시할 수 있다고 생각된다.

(1) 流路壁의 全길이. 螺線型 model에서의 流路壁의 全길이는

$$\begin{aligned} s &= \frac{m}{2\pi} \sum_{n=0}^N \int_{2n\pi}^{2\pi(n+1)} \frac{\sqrt{(2n\pi + \theta)^2 + 1}}{2\pi n} d\theta \\ &= \frac{m}{4\pi} \cdot 2\pi(N+1) \sqrt{4\pi^2(N+1)^2 + 1} \\ &\quad + \log 2\pi(N+1) - \sqrt{4\pi^2(N+1)^2 + 1} \end{aligned}$$

그러나 $N \geq 0$ 이면 $4\pi^2(N+1)^2$ 는 1보다 훨씬 크므로 s 는 근사적으로

$$s = \pi m(N+1)^2 + \frac{m}{4\pi} \log 4\pi(N+1) \quad (4)$$

이 된다. 圓型 model에서는 이에 對應하는 流路壁의 全길이는

$$s' = \sum_{n=0}^N 2\pi m \left(n + \frac{1}{2}\right) = m\pi(N+1)^2 \quad (5)$$

式(4)와 (5)를 比較하면 그 差異는 $\frac{m}{4\pi} \log 4\pi(N+1)$ 인데 $m\pi(N+1)^2$ 에 比較하면 거의 무시할 수 있을 정도로 적다.

(2) 流路의 全길이. 螺線型 model에 있어서의 流路

의 길이는 流路의 內路와 外部의 平均으로 한다. 그러면 流路의 全길이 L 는

$$L = \frac{m}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-2} \int_0^{2\pi(n+1)} \frac{1}{\sqrt{(2n\pi+\theta)^2+1}} d\theta + \int_0^{2\pi(n+2)} \frac{1}{\sqrt{(2n\pi+\theta)^2+1}} d\theta$$

$$= \pi m N(N+1) + \frac{m}{8\pi} \log 4\pi(N)(N+1) \quad (6)$$

圓型 model의 流路의 길이는

$$L' = \sum_{n=1}^N 2\pi m n$$

$$= \pi m N(N+1) \quad (7)$$

式 (6)과 (7)에서 圓型 model를 가정함으로써 流路의 全길이에 대한 誤差는 約 $\frac{m}{8\pi} \log 4\pi N(N+1)$ 이며 이 값은 $\pi m N(N+1)$ 에 比하면 무시할 수 있는 정도로 작다.

以上 圓型 model를 가정함으로써 생기는 幾何學的 差異를 생각했는데 그 오차는 무시할 수 있을 정도로 작으며 流體力學的인 差異 역시 무시된다고 생각되므로 圓型 model를 螺線型反應器의 한 근사적인 model로 생각할 수 있으며 이 model에 對한 一般의인 熱收支式은 다음과 같다.

$$\frac{dT_n}{d\theta} + \alpha(2n-1)(T_n - T_{n-1}) + \alpha(2n+1)(T_n - T_{n+1}) = 0, \quad n=1, 2, \dots, N-1 \quad (8)$$

여기서 $\alpha = \frac{h}{2GC_p}$ 이며 無次元인 常數이다. 이 式에 대한 條件은

$$T_1 = T_s = -\infty, \quad \theta=0, \quad n=1$$

$$T_n = T_{n-1}(2\pi), \quad \theta=0, \quad n=2, 3, \dots, N-1$$

N 개의 流路에 대한 式은

$$\frac{dT_N}{d\theta} + \alpha(2N-1)(T_N - T_{N-1}) + \alpha\beta(2N+1)(T_N - T_o) = 0 \quad (9)$$

$$T_N(0) = T_{s-1}(2\pi)$$

여기서 β 는 外部와 內部的 總括熱傳達係數의 比, $\frac{U}{h}$ 이다.

($N-1$)個의 式 (8)과 (9)를 주어진 條件에 대해서 풀면 反應器內의 溫度分布을 얻을 수 있다. N 이 큰 電子計算機를 사용함으로써 數值的 計算이 可能할 것이며 N 이 그다지 크지 않으면 Laplace 變換을 써서 N 個의 聯立階差微分方程式을 풀 수 있다. 다음에 $N=3$ 인 경우의 數值計算의 實例을 들겠다

計 算 例

폭이 5cm 이고 높이가 1cm 인 3重流路螺線型反應器에 溫度가 200°C 인 어떤 流體가 $G=1.0\text{g}/(\text{cm}^2)(\text{sec})$

의 率로 들어간다. 流體의 平均比熱은 $0.250 \text{ cal}/(\text{g})(^\circ\text{C})$ 이며 內部壁에 있어서의 總括熱傳達係數를 $0.0008 \text{ cal}/(\text{cm}^2)(\text{sec})(^\circ\text{C})$, 25°C의 空氣와 접촉하고 있는 壁의 總括熱傳達係數는 $0.0004 \text{ cal}/(\text{cm}^2)(\text{sec})(^\circ\text{C})$ 로 한다. 이들 熱傳達係數는 流體의 性質 및 反應器材質에서 推算할 수 있으며 h 의 값은 Dittus-Boelter 式⁽¹⁾에서 計算한 값보다 約 1.2~1.3 倍 큰 熱傳達係數를 가진다고 한다. (4) 이때 流速은 充分히 커서 完全混流를 가정할 수 있다. 卽

$$T_o = 200^\circ\text{C}$$

$$T_a = 25^\circ\text{C}$$

$$\alpha = 0.0016$$

$$\beta = 0.5$$

$$s = 251.0 \text{ cm}$$

$$L = 188.5 \text{ cm}$$

이들 값을 式(8) 및 (9)에 代入하면

$$\frac{dT_1}{d\theta} + \alpha(T_1 - T_o) + \alpha\beta(T_1 - T_2) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{dT_2}{d\theta} + 3\alpha(T_2 - T_1) + 5\alpha(T_2 - T_3) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{dT_3}{d\theta} + 5\alpha(T_3 - T_2) + \frac{7}{2}\alpha(T_3 - T_a) = 0 \quad (12)$$

$$T_1(0) = T_o, \quad T_2(0) = T_1(2\pi), \quad T_3(0) = T_2(2\pi)$$

$T_1(2\pi)$ 및 $T_2(2\pi)$ 는 未知이나 常數로 보고 上式에 Laplace 變換을 適用시켜 \bar{T}_1 , \bar{T}_2 및 \bar{T}_3 에 관해서 풀면

$$\bar{T}_1 = \int_0^\infty T_1 e^{-p\theta} d\theta = \frac{\begin{vmatrix} T_o(p+2) & -3\alpha & 0 \\ T_1(2\pi)p & p+8\alpha & -5\alpha \\ T_2(2\pi)p+3.5T_a & -5\alpha & p+8.5\alpha \end{vmatrix}}{pD} \quad (13)$$

$$\bar{T}_2 = \int_0^\infty T_2 e^{-p\theta} d\theta = \frac{\begin{vmatrix} p+4\alpha & T_o(p+\alpha) & 0 \\ -3\alpha & T_1(2\pi)p & -5\alpha \\ T_2(2\pi)p+3.5T_a & p+8.5\alpha & 0 \end{vmatrix}}{pD} \quad (14)$$

$$\bar{T}_3 = \int_0^\infty T_3 e^{-p\theta} d\theta = \frac{\begin{vmatrix} p+4\alpha & -3\alpha & T_o(p+\alpha) \\ -3\alpha & p+8\alpha & T_1(2\pi)p \\ 0 & -5\alpha & T_2(2\pi)p+3.5T_a \end{vmatrix}}{pD} \quad (15)$$

여기서

$$D = \begin{vmatrix} p+4\alpha & -3\alpha & 0 \\ -3\alpha & p+8\alpha & -5\alpha \\ 0 & -5\alpha & p+8.5\alpha \end{vmatrix}$$

逆變換을 求하기 위하여 $D=0$ 를 p 에 관해서 풀면 그 根을 各各 λ_1 , λ_2 및 λ_3 라고 하면 다음과 같이 3개의 負의 實根을 얻는다. 卽

$$\lambda_1 = -1.261\alpha$$

$$\lambda_2 = -3.5215\alpha$$

$$\lambda_3 = -13.718\alpha$$

이들 값을 사용하며 Heaviside 展開에 의한 方法으로 T_1 , T_2 및 T_3 의 逆變換을 求하면⁽²⁾

$$T_1 = [0.409 T_1(2\pi) + 0.283 T_2(2\pi) - 1.061]e^{\lambda_1\theta} + [-0.256 T_1(2\pi) - 0.430 T_2(2\pi) - 88.433]e^{\lambda_2\theta} + [-0.153 T_1(2\pi) + 0.147 T_2(2\pi) + 7.847]e^{\lambda_3\theta} + 103.782 \quad (16)$$

$$T_2 = [0.374 T_1(2\pi) + 0.258 T_2(2\pi) - 0.967]e^{\lambda_1\theta} + [0.130 T_1(2\pi) + 0.218 T_2(2\pi) - 45.359]e^{\lambda_2\theta} + [0.497 T_1(2\pi) - 0.476 T_2(2\pi) - 25.392]e^{\lambda_3\theta} + 71.718 \quad (17)$$

$$T_3 = [0.258 T_1(2\pi) + 0.178 T_2(2\pi) - 0.651]e^{\lambda_1\theta} + [0.218 T_1(2\pi) + 0.366 T_2(2\pi) - 76.144]e^{\lambda_2\theta} + [-0.476 T_1(2\pi) + 0.456 T_2(2\pi) + 24.331]e^{\lambda_3\theta} + 52.480 \quad (18)$$

式(16) 및 (17)에 $\theta = 2\pi$ 를 代入하여 $T_1(2\pi)$ 및 $T_2(2\pi)$ 에 關해서 兩邊

$$T_1(2\pi) = 199.986^\circ\text{C}$$

$$T_2(2\pi) = 199.842^\circ\text{C}$$

이들 값을 式(15), (16) 및 (17)에 代入하면 反應器 內에서의 溫度分布를 나타내는 式을 얻는다. 卽

$$T_1 = 137.253 e^{-1.261 \alpha \theta} - 47.578 e^{-5.5215 \alpha \theta} + 6.946 e^{-13.718 \alpha \theta} + 103.782 \quad (19)$$

$$T_2 = 125.313 e^{-12.61 \alpha \theta} + 24.1286 e^{-5.5215 \alpha \theta} - 21.1736 e^{-13.718 \alpha \theta} + 71.718 \quad (20)$$

$$T_3 = 86.567 e^{-1.261 \alpha \theta} + 40.507 e^{-5.5215 \alpha \theta} + 20.304 e^{-13.718 \alpha \theta} + 52.480 \quad (21)$$

이들 結果를 같은 程度로 절연된 같은 길이의 管狀 反應器와 比較하기 위하여 管狀反應器에 대하여 熱收 支를 取하면 다음과 같은 式이 유도된다. 卽

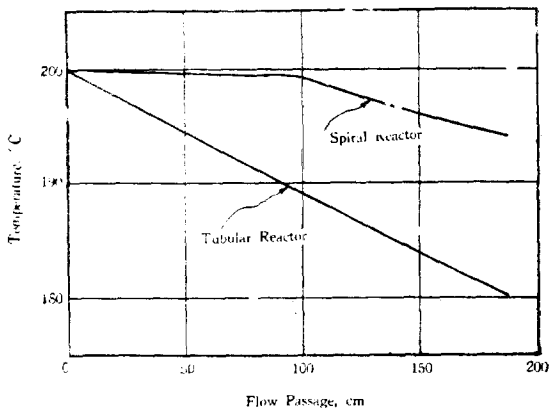


Fig. 2. Temperature profile on spiral reactor for given example.

$$\frac{dT}{dx} + a(T - T_a) = 0$$

$$x=0, T=T_o$$

여기서 $a = \frac{2U}{GC_{pm}} = 6.410^{-4}$ 이며 이 解는

$$\frac{T - T_a}{T - T_o} = e^{-ax} \quad (22)$$

이다. 螺線型反應器內의 溫度分布를 計算하며 Fig. 2에 플롯하여 管狀反應器의 경우와 比較하였으며 또한 서로 對應하는 流路길이에 있어서의 溫度를 Table I에 比較하였다.

Table I. Comparison of Temperature Profiles of Spiral and Tubular Reactors.

	Reactor inlet	Outlet of 1st flow passage	Outlet of 2nd flow passage	Outlet of 3rd flow passage
Length of flow passage (cm)	0	31.4	94.2	188.5
Spiral reactor (°C)	200	199.986	199.842	193.965
Tubular reactor (°C)	200	196.517	189.780	180.120

螺線型反應器의 管狀反應器에 대한 熱經濟的인 效率을 알기 위하여 管狀反應器에서의 熱損失과 螺線型反應器에서의 差를 管狀反應器에서의 熱損失로 나눈 因子를 η 라고하면 η 는 近似的으로

$$\eta = \frac{(\Delta T)_T - (\Delta T)_S}{(\Delta T)_T}$$

로 表示되며 여기서 $(\Delta T)_T$ 및 $(\Delta T)_S$ 는 各各 管狀反應器 및 螺線型反應器에서의 溫度變化를 나타낸다. 이 例에서는

$$\eta = \frac{19.980 - 6.035}{19.980} = 0.6998$$

卽 管狀反應器를 使用했을때 보다 螺線型反應器를 使用할경우가 約 70%의 열에너지의 節約을 보게된다는 것을 알 수 있다. 이 例에서는 $N=3$ 의 경우이지만 N 의 값이 커지면 따라서 이 η 의 값도 커지게 되므로 通常의 管狀反應器 대신에 螺線型反應器를 使用함으로써 많은 熱에너지의 節約이 된다는 것을 알 수 있다.

結 論

高溫度反應 특히 高溫度吸熱反應에 適當한 새로운모양의 化學反應器 卽 螺線型反應器를 提案한다. 이 反應器는 흔히 쓰이는 管狀反應器의 缺點을 어느 정도 없애주며 특히 熱經濟的인 面에서 훨씬 有利하다는 것을 주어진 例에서 보였다. 이 例에서는 問題를 간단히 하기위하며 熱發生이 없을 경우의 溫度分布만을 理論的으로 考察하였으며 化學反應을 包含하거나 反應器의 크기가 커지면 電子計算機의 도움을 받아 같은 方法으로 理論的 解析이 可能하다고 본다.

記 號 說 明

$a : \frac{2U}{GC_p m}, \text{ cm}^{-1}$

$C_p : \text{平均熱容量, cal/(gr)(}^\circ\text{C)}$

$G : \text{質量速度, gr/(cm}^2\text{)(sec)}$

$h : \text{反應器內部的 流路壁에서의 總括熱傳達係數, cal/(cm}^2\text{)(sec)(}^\circ\text{C)}$

$L : \text{流路의 全길이, cm}$

$L' : \text{圓型 model 에서의 流路의 全길이}$

$l : \text{流路의 높이, cm}$

$m : \text{流路의 幅, cm}$

$N : \text{螺線型反應器의 流路數}$

$Y : \text{極座標系에서의 變數}$

$s : \text{流路壁의 全길이, cm}$

$s' : \text{圓型 model 에서의 流路壁의 全길이, cm}$

$T_a : \text{外部溫度, }^\circ\text{C}$

$T_n : n \text{ 號 流路의 溫度}$

$T_o : \text{入量 溫度}$

$\bar{T}_n : T_n \text{의 Laplace 變換}$

$U : \text{外部壁의 總括熱傳達係數, cal/(cm}^2\text{)(sec)(}^\circ\text{C)}$

$\alpha : \frac{h}{2GC_p}$

$\beta : \frac{U}{h}$

$\theta : \text{極座標系에서의 變數}$

$\eta : \text{螺線型反應器의 管狀反應器에 對한 熱效率}$

參 考 文 獻

1. W. Badger and J. Banchero : Introduction to Chemical Engineering, 132 (1955) Mc Graw-Hill Book Co., New York, N. Y.
2. F. Hildbrand : Advanced Calculus for Engineers, 70, (1955), Prentice-Hall, Inc. New York, N. Y.
3. Won Hee Park : PhD Thesis, Univ of Minnesota, (1960).