總 說

工程最適化의 原理와 手法

張 根 秀

Departmeut of Chemical Eugiueeiug

University of Waterloo, Ontario, Canada

한국 과학 기술 연구소 초빙 교수

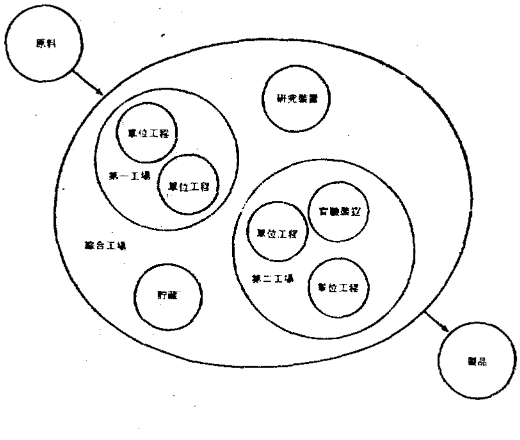
1. 序 論

化學工場의 모든 工程裝置는 設計過程을 거쳐서 完成되고 設定된 操業條件에 따라 調節 制御된다. 그러나 設計되고 制御되는 工程은 모두 經濟環境 物理化學法則 그리고 工學條件의 制約을 받게 마련이다. 最適化 或은 工程最適化라는 것은 이러한 制約을 받는 條件下의 對象物인 工程의 設計 操業 稼動 및 制御를 所望하는 目的達成에 가장 適合하도록 計劃選定하는것을 말한다. 本總說에서는 이러한 工程最適化問題의 構成要素와 規模, 最適化過程, 問題의 形成, 問題型의 分類, 最適化手法에 對하여 考察해 보고 問題解의 一般原理와 具體的 解法을 例示해 보았다. 그리고 主要應用産業分野와 工程을 列擧해 보고 最適化와 聯關이 있는 많은 文獻中 一部를 紹介하였다[1-152].

2. 最適化問題 構成要素와 規模

위 序論에서 暗示하드시 最適化의 必要性이 생길라면 첫째로 그 對象이 있어야 하고 둘째로 그 對象에서 이루고져 하는 目的이 있어야 한다. 여기에 隨伴되는 制約條件을 考慮에 넣으면 最適化問題構成要素는 對象, 目的, 制約條件이라 할 수 있다.

對象과 目的은 具體的일 수도 있고 抽象的일수도 있어서 多彩多樣하며 目的이 對象을 先行할 수도 있고 그 反對일 수도 있다. 企業의 着手에서와 같이 目的이 經濟的 欲求의 最大達成에 있는 境遇 그 欲求를 實現하는 手段으로써 어떤 製品을 生産하는 工場을 選定하며는 그 對象이 決定되는 것이다. 그 反面 旣存工場經營에서와 같이 이미 選定된 對象을 어떻게 改良向上하여 더 좋은 目的을 達成할 것인가 하는 境遇도 있다. 그러나 目的의 如何를 莫論하고 對象은 그 規模에 따라 大規模對象과 小規模對象으로 區分할수 있고 이 區分에 따라 最適化의 趣旨와 意義도 크게 달라진다. 例로서 第1圖에서와 같은 綜合工場에서 惹起되는 여러 最適化問題를 생각해 보기로 한다. 여기서 第一 먼저 考慮할 수 있는 最適化問題는 工場의 單位工程, 實驗裝置, 研究裝置를 個別的 對象으로 하는 問題, 貯藏 原料購入 및 輸送, 製品輸送 分配 및 販賣를 各各 對



第1圖 最適化問題對象과 規模

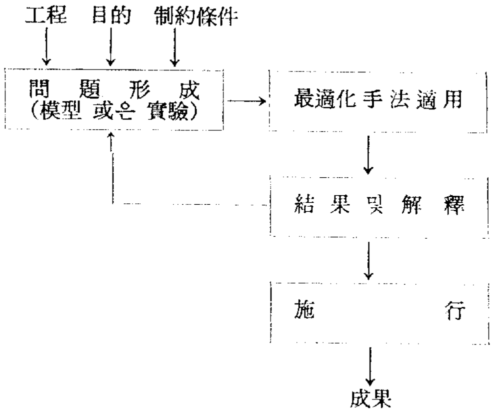
象으로 하는 問題等이다. 이 問題들은 基礎的 階層에 屬하는 最適化問題라고 볼 수 있으며 問題의 性格에 따라 最適化目的도 다르고 制約條件도 다를 수 있다. 다음 階層의 最適化問題는 第一工場과 第二工場을

University of Waterloo, Ontario, Canada

各個單位로한 工場對象의 問題가 있다. 例컨데 各工場이 獨自的으로 生産費를 節約하고 生産品의 質과 量을 높이는 問題이다. 그 다음 階層의 最適化問題로서는 綜合工場全體를 對象으로 한 問題이다. 第一工場과 第二工場이 各各 個別的으로 같은 目的의 最適化가 되어 있드라도 두 工場間에 技術的 資源的 相互作用이 介在하면 個別的인 最適化結果가 綜合的인 最適化結果와 一致한다고 할 수는 없다. 따라서 綜合工場의 最適化는 工場間의 相互作用도 考慮에 넣은 것이라야 한다. 더우기 두個 以上의 綜合工場을 對象으로 한다든가 綜合工場周圍環境까지 最適化對象系에 넣는다면 問題는 더 大規模로 擴大되고 複雜해진다. 一般的으로 大規模系의 最適化는 小規模系의 最適化보다 그 效果나 돌아오는 惠澤이 더 큰 것이 常例이지만 어데까지를 系의 對象으로 包含시키느냐는 그 때 그 때의 與件에 달려 있다. 大規模系의 完全한 最適化가 不可能한 與件下에서는 그 部分的인 最適化나 近似値的인 最適化로도 比較的 큰 效果를 期待할 수 있고 또 大規模系의 最適化는 從屬小規模系의 最適化可能性에 그 바탕을 두고 있음으로 單位工程이나 集合工程의 最適化는 問題解決의 始發點이 된다.

3. 最適化過程

一旦 對象인 工程과 그 範圍가 決定되고 目的이 選定되며는 制約條件이 分析設定된다. 制約條件은 環境的인 것이어서 環境條件이 바뀌고 工程의 配列이 달라지며는 꼭 같은 對象과 目的에서도 달라지고 目的達成의 尺度에 差를 招來하는 要因이 되기도 한다. 이러한 構成要素에서 出發하여 最適化問題의 形成은 맨 먼저 數學的 模型을 짬으로서 이루어지는데 이 模型에는 工程은 勿論 目的과 制限條件의 數式的인 表現이 添加되 있어야 한다. 이렇게 形成된 模型에 最適化手法이 適用되어 最適解로서의 結果가 얻어지는데 模型의 形成過程과 最適化手法適用過程은 獨立的으로 存在하는 것은 아니다. 系의 構造와 使用코저 하는 最適化手法에 依하여 工程模型이 決定되기도 하고 또 工程模型의 適否性을 最適化手法으로써 判斷하여 模型의 修正을 꾀하기도 한다. 一般的으로 模型이 線形이면 非線形보다, 定常問題形이면 非定常問題形보다 最適化手法適用이 容易하므로 線形定常問題形으로 하는 것이 理想的이나 最適化目的에 適合한 工程特徵이 反映되 있어야 한다. 따라서 模型의 選擇은 物理, 化學, 工學的 解析에 根據를 두고 實驗資料의 整理에서 이루어지는데 收集된 實驗資料에만 全的으로 依存하는 境遇도 있다. 最適化手法을 거쳐 얻어지는 結果가 좋은 成果를 期待할 수 있는 것이 됐을 때 最適化施策은 施行으로 옮겨진다. 이 過程의 相互關係를 第2圖에 圖示하였다. 여기서 한마디 添加해야 할 것은 數式的 模型없이 實驗結果를 模型으로 代置한 最適化方法도 可能하다는 것이다. 다음에 問題形成의 諸般形態와 最適化手法에 對해서 좀더 具體的으로 論해 보기로 한다.



第2圖 最適化過程

4. 問題의 形成

模型을 짜는데 있어서 設定된 目的의 表現은 數式的으로 目的函數의 形態로 나타나고 그 函數는 目的如何에 따라 여러가지 이름으로 불리워진다. 目的 函數가 節約코저 하는 費用이며는 經費函數, 利得을 表示하는 것이라면 利益函數, 工程의 機能이나 性能을 表示하는 것이라면 性能評價函數라고 불리워진다. 이 目的函數는 그 이름이 말해주듯이 最適化의 手法을 거쳐 極小로 만들어지거나 極大로 만들어지는 函數이다. 이 目的函數는 對象에 關聯된 變數의 函數로서 表示되는데 어떤 變數가 目的函數에 影響을 주는 가를 決定하는데는 工程에 對한 充分한 理解와 解釋이 必要하다. 重要한 變數를 놓치거나 重要하지 않은 變數를 包含시키거나 하며는 問題를 無意味하게 만들거나 或은 必要以上으로 複雜하게 할 憂慮가 있다. 이들 變數는 最適化의 目的에 따라 工程의 狀態를 나타내는 狀態變數, 操業條件을 나타내는 施行變數, 그리고 制御入力을 表示하는 制御變數等으로 불리워지는데 이들 變數 相互間의 關係는 制約條件으로 나타난다. 또 制約條件에는 實現할 수 없는 物理的인 量 例컨데 아주높거나 낮은 壓力이나 溫度라든가 負의 濃度等이 있고 運用上에서 오는

것 例컨데 原料의 流量이 全體 原料供給量을 超過할 수 없다는 것 等이 있다. 이러한 制約條件은 主로 等式이나 不等式形態로 나타나며 때로는 微分方程式이나 積分方程式으로도 나타난다. 이리하여 最適化問題形成은

(i) 目的函數의 設定

(ii) 工程變數의 決定

(iii) 制約條件의 解析

으로 이루워진다. 이것을 다음 例에서 보면 쉽게 理解할 수 있다. 길이 l의 노끈으로 面積이 最大가 되는長方形을 求한다고 하자.

그러면 이 問題는 다음과 같이 形成된다.

(例 1) 目的函數 : $L=u_1u_2$(面積)

$$\underset{u_1,\ u_2}{極大}\{L\}$$

工程變數 : u_1(長方形길이)

u_2(長方形높이)

制約條件 : $2u_1+2u_2=l$(노끈길이)

여기서 目的函數를 極大로 하는 u_1과 u_2를 求하는데 極大$(L)=-$極小$(-L)$라는 關係가 있음으로 極大(L)를 極小$(-L)$로 代置하여도 같은 問題가 된다. 이 問題의 制約條件은 等式制約條件이다.

實際工程에 있어서는 目的函數가 經濟性을 띄게되는 境遇가 많은데 그 例는 다음과 같이 利益을 最大로 하고저 하는 問題에서 볼 수 있다. 每時間當 原料 U kg을 使用하여 세 種類의 生成物을 各各 X, Y, Z kg씩 生產한다고 한다. 그러면 이 工程의 單位時間當利益 L은 生成品販賣額에서 經費를 뺀것으로

$$L=aX+bY+cZ-rU-S$$

가 되는데 여기서 a, b, c는 生成物 X, Y, Z의 1 kg當 價格이고 r는 原料 U의 1kg當 價格이며 S는 單位時間當의 固定經費와 運轉에 必要한 操業費이다. 여기서 生產量 X, Y, Z는 物質收支와 工程의 特性에 依하여 裝入되는 原料의 量 U와

$$f_1(X, U)=0,\ f_2(Y, U)=0\ f_3(Z, U)=0$$

의 函數關係가 있고 經費 SU와는 $f_4(S, U)=0$의 函數關係가 있다면 最適化問題는 다음과 같이 된다.

目的函數 : $L=aX+bY+cZ-rU-S$

極大 L

工程變數 : X, Y, Z, U, S

制約條件 : $f_1(X, U)=0$

$f_2(Y, U)=0$

$f_3=(Z, U)=0$

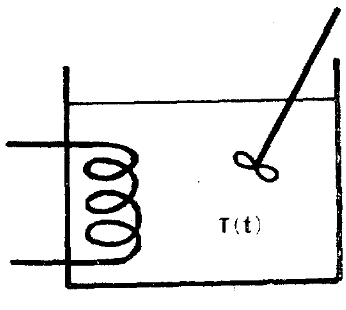
$f_4(S, U)=0$

勿論 實際工程에서는 溫度, 壓力, 濃度等과 같은 만은 工程變數가 介入되고 또 a, b, c, r도 經濟的 環境에 따라 달라짐으로 問題가 좀 더 複雜해진다. 또 어떤 最適化問題는 原價最小만을 目的으로 하는 것도 있는데 例로서 세멘트工場이나 鐵鋼工場에서의 原料配合을 들 수 있다. 價格과 成分組成이 다른 여러 原料를 配合하여 製品에 要求되는 化學組成을 가지도록 混合物을 만드는 問題인데 이 때 原價를 最小로 만드는 配合을 求하는 것이다.

이들 問題는 靜的인 問題로서 時間에 對한 變數의變化를 考慮하지 않았다. 이러한 問題들을 靜的最適化問題, 定常狀態最適化問題 或은 單純히 計劃問題라고 한다. 工程의 變數가 時間의 函數로 變動하는 制約條件이 있는 問題를 動的最適化問題, 非定常狀態最適化問題, 軌跡最適化問題, 或은 最適制御問題라 한다.

例로서 다음 問題를 생각해 보기로 한다.

A라는 化合物이 反應을 하여 B가 되고 B가 反應하여 C가 되는 $A\xrightarrow{k_1(T)}B\xrightarrow{k_2(T)}C$ 反應에서 願하는 生成物은 B이다. 여기서 $k_1(T)$와 $k_2(T)$는 反應速度定數이다. 이定數들은 溫度 T와 Arrhenius式 $k_i=k_{io}\exp[-E_i/(RT)]$, $(i=1, 2)$의 關係가 있는데 k_{io}는 常數이고 E_i는 活性 energy이고 R는 氣體定數이다. 지금 이 反應을 第3圖와 같이 回分反應器에서 完全攪拌을 하며 一定時間反應을 시키는데 反應器의 溫度 $T(t)$는 時間의 函數로 任意操作할 수 있는 것이라 한다. 우리가 願하는 것은 反應器內에서 反應을 時間 0에서 t_f까지 시켰을 때 操業完了時 生成物 B의 量 $x_2(t_f)$가 最大가되도록 溫度 $T(t)$를 決定하자는 것이다.



第3圖 回分反應器

A의 mole 濃度를 $x_1(t)$, B의 mole 濃度를 $x_2(t)$라고 하면 이 問題는 다음과 같은 動的最適化問題로 나타난다.

(例 2) 目的函數 : $J=x_2(t_f)$ (t_f에서의 B의 濃度)

$$\underset{T(t)}{極大}\{J\}$$

工程變數 : $x_1(t)$, $x_2(t)$(狀態變數)

$T(t)$ (制御變數)

t (時間)

t_f (操業完了時刻)

制約條件 :

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -k_1(T)x_1(t)\\ \frac{dx_2}{dt} &= k_1(T)x_1(t) - k_2(T)x_2(t)\end{aligned}\right\}\text{(反應工程動特性)}$$

$$\left.\begin{aligned}x_1(o)&=a\\ x_2(o)&=b\end{aligned}\right\}\text{(原料成分, 工程初期條件)}$$

$$0 \leq T(t) \leq 700°\text{C}\text{(制御變數範圍)}$$

여기서도 먼저 問題와 마찬가지로 目的函數를 $J=-x_2(t_f)$라 놓고 $\underset{T(t)}{極小}(J)$로 代置할 수 있다. 또 積分形態로

$$J=\int_0^{t_f}\left(-\frac{dx_2}{dt}\right)dt=\int_0^{t_f}\{-(k_1x_1-k_2x_2)\}dt$$

라 하고 $\underset{T(t)}{極小}(J)$로 代置할 수 있는 것도 $x_2(o)$가 常數 b라는 것을 參酌하면 納得할 수 있다. 이 때의 目的函數 J는 積分式으로 주어지고 그 値는 t가 o에서 t_f에 이르는 동안의 溫度 $T(t)$에 따라 달라진다.

5. 問題型의 分類

위의 問題形成에서 본 例와 같이 最適化問題는 그 最適化의 應用目的과 實用面에서 靜的最適化問題와 動的最適化問題로 區分되었다. 問題가 어떤 型으로 分類되느냐에 따라 最適化問題解法에서 適用되는 最適化手法選擇이 달라진다. 따라서 問題型은 適切히 分類하여야 하는데 上記分類法 以外에도 흔히 使用되는 分類法은 問題가 數學的 形式面에서 線形問題이냐 非線形問題냐에 依한 것이다. 여기서 留意해야 할 것은 目的函數나 制約條件中 어느 하나가 非線形이면 問題는 非線型이 된다. 線形最適化問題型은 靜的最適化問題이거나 動的最適化問題거나 다 原則的으로는 比較的 簡單한 方法으로 解答을 얻을 수 있다는 有利한 點이 있다. 그래서 非線形性이 甚하지 않은 問題는 線形的인 方法으로 近似値的 解를 얻고 이 過程을 되풀이 하여 正解로 接近시키기도 한다.

위의 (例 1) 노끈問題에서 萬一 노끈의 材質이 均一하지 않고 密度가 고루지 않다면 만들어진 長方形이 溫度나 濕度로 因하여 不均一하게 이그러질 것이다. 그런 境遇는 計算에서 얻은 u_1과 u_2가 반드시 面積 L를 最大로 한다고 할 수는 없다. 이 때에는 統計學的으로 봐서 面積의 期待値 $E(u_1u_2)$를 最大로 하는 u_1과 u_2를 求해야 되며 그러기 위해서는 노끈길이 l이 어떤 統計的 性向으로 變하는가 하는 實驗資料가 必要하다. 動的最適化問題의 境遇에 있어서도 工程의 變數가 確率性을 띄게 되고 統計學的 取扱法이 必要하게 된다. 이 때의 最適化問題를 確率性(stochastic)最適化問題라고 한다. 이에 反해 不確實性이 介在하지 않는 問題를 確定性最適化問題라고 부른다. 또 變數가 連續的인 값을 取하는지 或은 離散인 값을 取하는지에 따라 連續性最適化問題 或은 離散性 最適化問題라고 分類하기도 한다. 또 어떤 最適化問題에서는 制約條件이 關與하지 않을 수도 있다. 따라서 制約條件이 없느냐 있느냐에 따라 無制約條件最適化問題냐 制約條件最適化問題냐로 區分되기도 한다. 위의 最適化問題構成要素에서 본 바 實際工程問題에서는 반드시 制約條件이 있게 마련이지만 어떤 때는 制約條件이 發效하지 않을 수도 있고 또 制約條件이 있는 問題를 變換에 依하여 制約條件이 없는 形式의 問題로 바꾸어 놓을 수도 있다. 制約條件에 動約最適化問題에서와 같이 微分方程式이 包含되기도 하는데 이런 型의 問題를 集點變數形(lumped-parameter) 最適化問題라고 한다. 反面 制約條件에 偏微分方程式이 包含되어 있으면 分布變數形(distributed-parameter) 最適化問題라고 한다. 分類된 이들 問題型을 要約하면 다음과 같다

(1) 實用目的面 : 靜的最適化問題
動的最適化問題

(2) 數學的形式面 : 線形最適化問題
非線形最適化問題

(3) 現象的面 : 確定性最適化問題
確率性最適化問題

(4) 變數의 連續面 : 連續性最適化問題
離散性最適化問題

(5) 制約條件面 : 無制約條件最適化問題
制約條件最適化問題

(6) 變數의 分布面 : 集點變數形最適化問題
分布變數形最適化問題

이 分類에서 對照한 兩者中 後者가 前者보다 그 解法에 있어서 더 어려운 것이 通常이다. 다음에는 이들 各問題型의 一般形이 어떤 것이고 어떤 形態로 주어지나를 좀 더 具體的으로 살펴보기로 한다.

(1. A) 靜的最適化問題

問題(Ⅰ)

目的函數 : $\underset{\boldsymbol{u}}{極小}\ L[\boldsymbol{u}]$ (1)

制約條件 : $\boldsymbol{f}[\boldsymbol{u}]=o$ (2)

$$g[\boldsymbol{u}] \geq \boldsymbol{o} \tag{3}$$

여기서 L는 scalar 函數이고 $\boldsymbol{u}$는 m次元의 vector 變數이고 $\boldsymbol{f}$는 p次元($<m$)의 vector 函數 $\boldsymbol{g}$는 q次元의 vector 函數이다. 이 問題를 簡略하게

$$\mathrm{Min}\{L(\boldsymbol{u}) \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) \geq \boldsymbol{o}\} \tag{4}$$

라고 表示하기도 한다.

(1. B) 動的最適化問題

問題(Ⅱ)

目的函數:

$$\underset{\boldsymbol{u}(t)}{\text{極小}}\ J = \varphi[\boldsymbol{x}(t_f),\ t_f] + \int_{t_o}^{t_f} L[\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t),\ t]\,dt \tag{5}$$

制約條件:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t),\ t] \tag{6}$$

$$\boldsymbol{x}(t_o) = \boldsymbol{x}_o \tag{7}$$

$$\boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t),\ t] \geq \boldsymbol{o} \tag{8}$$

여기서 $\boldsymbol{x}(t)$는 n次元의 狀態 vector이고 $\boldsymbol{u}(t)$는 m次元의 制御 vector이고 $\boldsymbol{f}$는 n次元 vector 函數 $\boldsymbol{g}$는 q次元 vector 函數이다. 時間은 初期時刻 t_o에서부터 最終時刻 t_f까지인데 t_f는 주어지기도 하고 未知일 수도 있다. t_f가 未知인 境遇는 自由時間最適化問題라고 한다. $\varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]$는 狀態 vector의 最終値의 函數이고 $L[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]$는 狀態 vector의 軌跡과 使用한 制御 vector에 關係되는 函數이다. $\boldsymbol{x}(t_o)$는 初期條件이고 여기서는 $\boldsymbol{x}_o$로서 주어졌다고 하였다. 이 初期條件은 $\Psi[\boldsymbol{x}(t_o)] = \boldsymbol{o}$라는 函數形態로도 주어질 수 있고 初期條件代身 終期條件 $h[\boldsymbol{x}(t_f)] = \boldsymbol{o}$의 形態로 주어질수도 있다. 問題에서 制御 vector $\boldsymbol{u}$는 一般的으로 時間의 函數이지만 時間의 函數가 아니고 定數일 때도 있다. 이런 境遇의 $\boldsymbol{u}$는 制御 vector라기보다는 工程系의 定數라고 부르는 것이 妥當할 것이다. 이 問題의 簡略表示는

$$\mathrm{Min}\{J[\boldsymbol{u}(t)] \mid \dot{x} = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)],\ \boldsymbol{x}(t_o) = \boldsymbol{x}_0,$$
$$\boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t] \geq \boldsymbol{o},\ t_o \leq t \leq t_f\} \tag{9}$$

가 된다.

(2. A) 線形最適化問題

위 問題(Ⅰ)에서 $L(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})$가 各各

$$L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{u} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{d} \tag{12}$$

인 境遇이고 問題(Ⅱ)에서 各函數가

$$\varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}(t_f) \tag{13}$$

$$L[\boldsymbol{x}](t), \boldsymbol{u}(t), t] = \boldsymbol{P}^T(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{q}^T(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{14}$$

$$\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t] = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{15}$$

$$\boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t] = \boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{16}$$

인 境遇로서 關聯된 函數가 $\boldsymbol{x}$와 $\boldsymbol{u}$에 對해서 모두 線形인 境遇이다. 여기서 $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$, $\boldsymbol{G}(t)$, $\boldsymbol{H}(t)$는 各各 m, $p\times m$, p, $q\times m$, q, n, n, m, $n\times n$, $n\times m$, $q\times n$, $q\times m$ 次元의 vector 或은 行列이고 C^T는 C의 轉置를 말한다. 여기서 (15)式의 $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$는 (11)式과 (12)式의 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$와 같은 것은 아니다.

(2. B) 非線形最適化問題

위와 같이 線形이 아닌 一般的인 問題(Ⅰ)과 問題(Ⅱ)를 통털어 말한다. 非線形問題中 問題(Ⅱ)의 動的最適化問題에서 函數 $\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(f), \boldsymbol{u}(f), t]$와 $L[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]$에 t가 外陽的으로 나타나 있으면 nonautonomous 問題라하고 나타나 있지 않고 $\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(f), \boldsymbol{u}(t)]$와 $L[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)]$로 되어 있으면 autonomous 問題라고 한다. 非線形問題中에서도 特殊한 非線形型이 있는데 이것이 所謂 二次形問題型이다. 모든 函數가 線形問題와 같은데 다만 다음 函數만이 二次式形으로 주어졌을 때의 型을 말한다.

問題(Ⅰ)에서 $L[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}$ (17)

問題(Ⅱ)에서 $\varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] = \boldsymbol{x}^T(t_f)\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t_f)$ (18)

$$L[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t] = \boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{19}$$

여기서 $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{R}(t)$, $\boldsymbol{S}(t)$는 各各 $m\times m$, $n\times n$, $n\times n$, $m\times m$ 行列이다.

(3. A) 確定性最適化問題

問題(Ⅰ)의 (1)~(3)式. 問題(Ⅱ)의 (5)~(8)式. 모든 函數와 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$에 雜音이 없고 變數의 値가 確定的임.

(3. B) 確率性最適化問題

函數와 變數에 雜音이 있어서 確率性을 갖는 問題로 問題(Ⅰ)의 境遇는 統計學에서 回歸分析 形態로 흔히 나타난다. 問題(Ⅱ)의 境遇는 다음과 같이 된다.

$$\underset{\boldsymbol{u}(t)}{\text{極小}}\ J = E\{\varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] + \int_{t_o}^{t_f} L[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]\,dt\} \tag{20}$$

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{w}(t), t] \tag{21}$$

$$E\{\boldsymbol{x}(t_o)\} = \boldsymbol{x}_o,\quad E\{\boldsymbol{x}(t_o)\boldsymbol{x}^T(t_o)\} = \boldsymbol{Q} \tag{22}$$

$$E\{\boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t), t]\} \geq \boldsymbol{o} \tag{23}$$

$$E\{\boldsymbol{w}(t)\} = \boldsymbol{o} \tag{24}$$

$$E\{\boldsymbol{v}(t)\} = \boldsymbol{o} \tag{25}$$

$$E\{\boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{w}^T(\tau)\} = \boldsymbol{W}(t)\delta(t-\tau) \tag{26}$$

$$E\{\boldsymbol{v}(t)\boldsymbol{v}^T(t)\} = \boldsymbol{V}(t)\delta(t-\tau) \tag{27}$$

$$E\{\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{v}^T(\tau)\} = \boldsymbol{Y}(t)\delta(t-\tau) \tag{28}$$

여기서 E는 期待値演算子이고 $w(t)$와 $v(t)$는 주어진 次元이 工程雜音 vector이고 xx^T, vv^T, wv^T는 두 vector 間의 外積行列이고 Ω W, V, Y는 各各 適當한 次元의 行列들이고 $\delta(t-\tau)$는 Dirac의 δ-函數이다. 이들式에서 보는 바와 같이 雜音 $w(t)$, $v(t)$와 初期狀態 $x(t_o)$의 統計分布函數를 알아야 하며 統計的 資料에 依하여 行列 Ω, $W(t)$, $V(t)$, $Y(t)$를 알아야 한다. (28)式에서 $w(t)$와 $v(t)$가 獨立的인 分布變數라면 $Y=o$가 된다.

(4. A) 連續性最適化問題

위의 問題(Ⅰ)과 問題(Ⅱ). 變數가 가질 수 있는 値가 連續的임.

(4. B) 離散性最適化問題

問題(Ⅰ)에서 變數가 어떤 離散値를 取할 때임. 例로서 u=整數라는 條件을 붙이면 整數計劃法이 된다. 問題(Ⅱ)에 對應하는 離散性最適化問題는

$$\underset{u^0, u_1 \cdots u^{k-1}}{\text{極小}} \quad J=\varphi[x^k]+\sum_{i=0}^{k-1} L_i[x^i, u^i] \tag{29}$$

$$x^{i+1}=f_i[x^i, u^i] \; (i=0, 1, 2, \cdots, k-1) \tag{30}$$

$$x^0=x_o \tag{31}$$

$$g_i[x^i, u^i] \geq o \quad (i=0, 1, 2, \cdots, k) \tag{32}$$

이고 (6)式의 微分方程式 代身에 (30)式의 差分方程式으로 주어지고 (5)式의 積分形代身 k個의 函數和인 (29)式으로 되어 있다. 여기서 x^i와 u^i는 各各 n次元과 m次元의 vector이고 f_i와 g_i는 各各 n次元 q次元의 vector 函數이다. 이 問題는 多段工程의 最適化에서 發生하는 問題이기도 하고 試料採取(標本採取)에 依한 連續工程의 制御問題에서 나오는 問題이기도 하다. 前者의 境遇 i는 段數를 表示하고 後者의 境遇 i는 試料採取時刻 t_i를 表示한다.

(5. A) 無制約條件最適化問題

問題(Ⅰ)에서 (2), (3)式이 없는 境遇임. 問題(Ⅱ)에서는 (8)式이 없을 境遇이고, (6), (7)式은 있어야 하는데 그 理由는 目的函數 (5)式이 動特性의 狀態式을 要求하기 때문이다.

(5. B) 制約條件最適化問題

위에서 制約條件이 있는 問題(Ⅰ)과 問題(Ⅱ).

(6. A) 集點變數形最適化問題

微分方程式으로 工程特性을 나타낸 問題(Ⅱ).

(6. B) 分布變數形最適化問題

靜的이나 動的最適化問題에서 制約條件中에 偏微分方程式이 있을 때의 問題임. 一般的인 式은 매우 複雜함으로 다음과 같은 例를 든다.

$$\underset{u(t,x)}{\text{極小}} \quad J=\int_{t_o}^{t_f}\int_{x_o}^{x_f} L\left[v(t,x), \frac{\partial v}{\partial x}, u(t,x)\right] dx\,dt \tag{33}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=f\left[v(t,x), \frac{\partial v}{\partial x}, u(t,x)\right] \tag{34}$$

$$v(t_o, x)=\text{初期條件} \tag{35}$$

$$v(t, x_o)=\text{境界條件} \tag{36}$$

$$g[v(t,x), u(t,x)] \geq o \tag{37}$$

여기서 t는 時間 x는 一次空間에서의 距離이고 (34)式의 偏微分方程式에서 $v(t,x)$는 (t,x)點에서의 n次元의 狀態 vector이고 $u(t,x)$는 (t,x)點에서의 m次元 制御 vector이다. 이런 種類의 問題는 化學工程에서 管狀反應器의 連續操作과 制御에서 흔히 나온다.

6. 最適化手法

주어진 問題는 그의 分類法에 따라 가장 適當한 最適化手法을 使用하여 解答을 얻게 되는데 같은 分類에 屬하는 問題라도 그 性格에 따라 相違한 手法을 쓰게 된다. 使用할 수 있는 手法을 大別하여 列擧하면 다음과 같다.

在來式微積方法
線形計劃法(LP)
二次形計劃法(QP)

幾何的計劃法(GP)
非線形計劃法(NP)
探索法
變分法
動的計劃法(DP)
最大値原理法(MP)

두 그룹중 前者는 主로 靜的最適化問題의 解法에 適用이 되며 後者는 主로 動的最適化問題에 適用이 된다. 그러나 이들 手法의 利用區分은 任意的인 것으로 前者中의 探索法은 動的最適化問題에도 適用되는 普遍的인 것이며 또 後者中 動的計劃法은 靜的最適化問題中多段工程形問題를 푸는데 많이 利用되고 있다.

微積方法에서 導函數를 零으로 놓고 極値를 求하는 것은 잘 알려진 基礎方法이다. 線形計劃法은 問題가 線形일 때 使用되는 方法으로 Dantzig가 開發한 Simplex 法[33]을 利用한 計劃法이 電子計算機計算에 適合하도록 技術的改良이 되어 있다[56,57,64,116,130]. 또 離散性線形問題로서 混合整數計劃法이 있으며 零과 一만 使用하는 二整數計劃法[10,59,60,114]도 開發되어 있다.

二次形計劃法으로는 Wolfe法[12,143,144], 二次形微分法[141], 그리고 Beale法[14,18,90]이 있다. 最小自乘形 目的函數를 使用하는 計劃法으로서는 널리 알려진 線形最小自乘法이 있고 非線形으로서는 Gauss-Newton法[113], Marquardt法[103] 等이 있는데 Marquardt法이 좀더 一般的인 形이고 이 手法의 特殊한 境遇가 Gauss-Newton法이고 나중 나오는 最大傾斜降下法이다. 幾何的計劃法은 Duffin等[40]이 開發한 것으로 目的 函數와 制約條件이 多項式 즉 變數의 正負乘羃의 積의 和로 되어 있을 때 有用하다[141].

非線形計劃法은 非線形問題에 適用되는 手法의 一般名인데 計劃法만으로 쉽게 풀리는 最適化問題는 드물며 一般的으로 探索法을 並用하여 解를 얻는다. 探索法에는 直接手法과 間接手法 그리고 이 두 手法을 混用한 手法이 있다. 어느 手法을 쓰든지간에 探索法의 選擇은 變數가 하나인가 多數인가 또는 制約條件이 어떤 形態인가에 따라 달라진다. 單變數에 利用되는 直接手法의 代表的인 것으로서 Fibonacci法과 Golden section法[20,116,123,141]이 있다. Fibonacci法은 Kiefer[83]가 利用하기 始作한 것으로 n次元 變數問題에 利用할 수 있도록 一般化되었으나[137] 多變數의 境遇는 딴 方法에 比해 그리 能率的이 아니다. 多變數問題에 많이 利用되는 直接手法으로는 Rosenbrock法[128], Hooke-Jeeves法[70,139], Simplex를 利用한[135] Nelder-Mead法[23,109]을 들 수 있고 또 Davidon의 三次式收斂法[35], Powell의 二次試收斂法[121,148], Coggins法[22], Bunny-hop法.[116], 重心法[46] 等을 들 수 있다. 間接手法의 代表的인 것으로는 于先 Newton-Raphson法이 있고 最大傾斜降下法[116,123], 加速探索法[55]과 이것을 n次元變數問題에 一般化한 PARTAN法[55,134] 等이 있다. 目的函數가 實驗에서 얻어지는 問題에 利用되는 統計學的方法에 依한 實驗值傾斜法도 있다[25].

아주 能率이 좋은 方法이라 認定된 것으로는 共軛方向法이 있는데[67] 이것이 Fletcher-Reeves法[54]으로 나타났고 Powell法[121]이 加味되어 二次導函數가 必要 없는 Davidon-Fletcher-Powell法[35,53,121,148]으로 發展하였다. 이 Davidon-Fletcher-Powell法은 많은 使用者의 計算經驗에 依하면 가장 効果있는 手法으로 認定받고 있다. 共軛方向法을 向上시키는 試圖로서 記憶傾斜法[107] 超記憶傾斜法[32], 調節metric法[108] 等이 나타나 있다.

上記한 이들 手法의 特徵은 試圖해 본 變數値가 目的函數의 極小點으로 가도록 反復補正計算에 依하여 向上하는 것으로

$$\boldsymbol{u}^{(j+1)}=\boldsymbol{u}^{(j)}+\boldsymbol{h}^{(j)} \quad j=0,1,2,\cdots\cdots \tag{38}$$

의 形式의 것이다. 여기서 j는 反復計算數로 $\boldsymbol{u}^{(j)}$는 現在 計算해 본 값 $\boldsymbol{u}^{(j+1)}$은 새로 試圖해 보고져 하는 向上된 값 $\boldsymbol{h}^{(j)}$는 補正量이다. 여러 手法의 差異는 $\boldsymbol{h}^{(j)}$를 어떻게 選擇하는가 하는 選擇法에 있다. $\boldsymbol{h}^{(j)}$를 傾斜의 方向으로 擇하면 위에 列擧한 여러 傾斜法이 되고 共軛方向으로 擇하면 共軛方向法이 된다.

非線形計劃問題에서 制約條件이 있는 多變數最適化手法으로서는 위에서 본 바와 같은 制約條件이 없을 때의 探索法을 改良하여 쓸 수 있지만 特別히 開拓된 手法으로는 Simplex를 利用한 Box의 Complex法[21], 制約條件附 Rosenbrock法[128,129], Rosen의 傾斜投影法[125,126,127]이 있고 Rosen法을 Fletcher-Powell法을 써서 改良한 Goldfarb와 Lapidus法[61,62]이 있다. 其他手法으로는 實行可能方向法[151,152]이 있고 Wolfe의 GRG法[1,2,144], Fiacco-McCormick의 SUMT法[51], 그리고 制約條件下의 Fletcher-Powell法[63]이 있다. Fiacco-McCormick法은 罰則函數法을 利用한 것인데 罰則函數法에는 內點罰則法[29]과 外點罰則法[48,49,50,51,149]이 있다.

多段工程形 非線形最適化問題에는 動的計劃法[15,16,17,124]이 잘 利用되며 所謂 離散形動的計劃法[6,7,15,124,140]이 널리 適用된다. 또 같은 種類의 多段式問題에 離散形最大值原理를 利用한 手法[45]이 適用되기도 한다. 最適化問題가 大規模인 境遇는 多階層最適化法[43,94,105,106,142]이 있으며 Dantzig-Wolfe의 分解原理[34]가 有用하다. 分解法에는 實行可能分解法과 實行不可能分解法이 있는데 仔細한 것은 文獻[13,26,27,94,105,106]에서 찾아 볼 수 있다.

變分法은 Euler-Lagrange式을 爲始하여 誘導된 많은 有用한 式의 利用에서 보는 바 動的最適化問題의 解法에 크게 寄與해 왔다[28]. 近來에 와서 많이 使用되는 最大值原理도 變分法의 領域에 屬한다고 할 수 있으며 또 動的計劃法도 變分法과 不可分의 關係가 있다는 것은 動的計劃法을 利用하여 Euler-Lagrange式을 導出할 수 있는 것을 보아도 알수 있다. 過去의 例를 보면 動的最適化問題의 解法으로서는 一般的으로 變數의 次元에 依한 難題때문에 動的計劃法이 有効하게 利用되지 못하였는데 近來에 와서 狀態變數增加形動的計劃法[92]이 導入되어 次元問題解決의 方向으로 나가고 있으며 또 다른 面에서 二次變分法의 한 手法으로서 微分動的計劃法[74]이 開拓되어 있다.

이러한 여러手法을 어떻게 適用할 수 있는가를 考察하기 위하여 非線形計劃法에 依한 問題(I)의 解法과 變分法을 利用한 問題(II)의 解法을 다음에 提示해 보

기로 한다.

6.1. 問題(I)의 解法

주어진 (1)(2)(3)式에서 다음과 같은 새로운 函數 F를 導入한다[28].

$$F[\boldsymbol{u}, \lambda, \sigma] = L[\boldsymbol{u}] + \lambda^T \boldsymbol{f}[\boldsymbol{u}] + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{g}[\boldsymbol{u}] \tag{39}$$

여기서 λ와 σ는 各各 p次元과 q次元의 Lagrange 乘數 vector이고 函數 F는 $\boldsymbol{u}$와 λ, σ의 函數이다. 이 函數 F를 偏微分하여 다음과 같은 式을 導出한다.

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{u}} \equiv \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T \lambda + \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{o} \tag{40}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv \boldsymbol{f}[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{o} \tag{41}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \equiv \boldsymbol{g}[\boldsymbol{u}] \geq \boldsymbol{o} \tag{42}$$

그리고

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{g}[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{o}\text{이면}\quad \boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{g}[\boldsymbol{u}] > \boldsymbol{o}\text{이면}\quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{o} \end{array}\right\} \tag{43}$$

여기서 $\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{u}} \equiv \left(\dfrac{\partial F}{\partial u_1}\ \dfrac{\partial F}{\partial u_2} \cdots \dfrac{\partial F_p}{\partial u_m}\right)^T$,

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1} \cdots \dfrac{\partial f_p}{\partial u_1} \\ \vdots & \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial u_m} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_m} \cdots \dfrac{\partial f_p}{\partial u_m} \end{pmatrix}$$

等이다. 이들 (40)～(43)式을 $\boldsymbol{u}$에 對해여 풀어서 答을 求한다. 여기에 導出된 關係式들은 等式과 不等式이 並存하는 非線形計劃法에서의 Kuhn-Tucker 必要條件들[88,149]이다. 式들이 $\boldsymbol{u}$에 對하여 容易하게 풀리지 않으면 探索法과 反復補正計算에 依하여 解를 求하게 된다. 여기서 制約條件이 없는 問題인 境遇는 (40)式 하나만 풀면 되는데 이것은

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{o} \tag{44}$$

로서 目的函數 L의 極小點을 偏微分으로서 求하는 것이 된다. (44)式에서 解가 容易하게 求해지지 않을 境遇에는 위에서 說明한 探索法中의 하나를 使用하여 反復補正計算으로 數值解를 求하는데 制約條件이 있을때보다는 쉽다.

6.2. 問題(II)의 解法

問題(II)는 다음과 같이 푼다[28]. 먼저 (5)(6)(7)(8)式의 函數에서 Hamiltonian이라고 부르는 函數H를 다음과 같이 定義한다.

$$H[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \lambda, \boldsymbol{\sigma}, t] = L[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t] + \lambda^T \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t] + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t] \tag{45}$$

여기서 λ와 $\boldsymbol{\sigma}$는 各各 n次元과 q次元의 Lagrange 乘數 vector인데 問題(I)에서와는 달리 時間 t의 函數이며 λ는 隨伴 vector라고도 불리워진다. 이 隨伴 vector는 다음과 같이 H의 偏微分에서 導出되는 微分方程式으로 주어진다.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right) \equiv -\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}\right) - \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \lambda - \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \boldsymbol{\sigma} \tag{46}$$

이 式에 對한 時間 t_f에서의 終期條件은 (5)式의 函數 φ를 偏微分하여

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)} \tag{47}$$

로 얻어진다. 여기다 元方程式 (6)(7)式을 添加하면

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u},\ t] \tag{48}$$

$$\boldsymbol{x}(t_o) = \boldsymbol{x}_o \tag{49}$$

가 된다. H의 $\boldsymbol{u}$에 對한 偏微分에서

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T \lambda + \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{o} \tag{50}$$

가 되고 制約條件은

$$\boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t),\ t] \geq \boldsymbol{o} \tag{51}$$

와

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t] = \boldsymbol{o}\text{이면}\quad \boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u})t), t] > \boldsymbol{o}\text{이면}\quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{o} \end{array}\right\} \tag{52}$$

이 滿足되어야 한다. 이들 方程式 (46)～(52)를 풀므로서 最適 $\boldsymbol{u}(t)$를 求한다.

制約條件(8)式이 없는 境遇는

$$H[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \lambda, t] = L[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t] + \lambda^T \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t] \tag{53}$$

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u},\ t] \tag{54}$$

$$\boldsymbol{x}(t_o) = \boldsymbol{x}_o \tag{55}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \lambda \tag{56}$$

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)} \tag{57}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}} \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T \lambda = \boldsymbol{o} \tag{58}$$

가 되며 H를 極小로 하는 $\boldsymbol{u}$를 求하게 된다. 이것이 最小値原理이다. 最大値原理는 (53)式과 (57)式에서 L와 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)}$를 $-L$와 $-\dfrac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)}$로 代置했을 때이며 이 때는 H를 極大로 하는 $\boldsymbol{u}$를 求해야 한다. 最小値原理를 使用하거나 最大値原理를 使用하건 얻어지는 解는 같다. 이 制約條件이 없는 問題(II)의 數値解는 위에 說明한 探索法中의 하나를 써서 H를 極小로 하는 (最小値原理) $\boldsymbol{u}(t)$를 求하든가 或은 極大로 하는(最大値原理) $\boldsymbol{u}(t)$를 求한다. 따라서 一般的으로는 $\boldsymbol{u}(t)$에 對한 反復補正計算으로 答이 얻어진다. 어떤 問題에 있어서는 H가 制御變數 $\boldsymbol{u}(t)$의 陽的函數가 아니어서 (58)式과 같은 偏微分으로서는 H를 極小로 하는 $\boldsymbol{u}(t)$

를 求할 수 없을 때가 있다. 이 境遇의 問題를 特異制御問題라고 하는데 이런 問題의 解法도 많이 開拓되어 있다[28,75,131].

또 이 問題를 連續形動的計劃法[91,116]에 依하여 푸는 方法을 考察해 보기로 한다. 便利上 制約條件 (8)式이 없고 (5)式에서 $\varphi[x(t_f), t_f]=o$라 한다. Hamiltonian H을 (53)式과 같이 定義하고 H^o를 다음과 같이 定義한다.

$$H^o=\underset{u(t)}{極小}\{L[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t]+\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{f}\}=\underset{u(t)}{\mathrm{Min}}H \tag{59}$$

또 다음과 같은 函數를 定義한다.

$$I^o[\boldsymbol{x}, t]=\underset{u(t)}{\mathrm{Min}}\int_t^{t_f}L[\boldsymbol{x}(\tau), \boldsymbol{u}(\tau), \tau]dt \tag{60}$$

여기서 I^o는 隨伴 vector $\boldsymbol{\lambda}$와 다음 關係가 있다.

$$\boldsymbol{\lambda}=\frac{\partial I^o}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{61}$$

動的計劃法에 있어서의 最適原理의 法則을 適用하면

$$I^o[\boldsymbol{x}, t]=\underset{u(t)}{\mathrm{Min}}\left\{\int_t^{t+\Delta t}L[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \tau]d\tau+I^o[\boldsymbol{x}+\dot{\boldsymbol{x}}\Delta t, t+\Delta t]\right\} \tag{62}$$

가 되는데 Δt를 零으로 接近시키고 H^o의 定義를 代入하면

$$H^o+\frac{\partial I^o}{\partial t}=o \tag{63}$$

라는 偏微分方程式이 導出되는데 이것이 Hamilton-Jacobi式이다. 이 式을 I^o에 對해서 풀면 되지만 一般的으로 難解이다. 이러한 動的計劃法에 依據한 問題를 푸는 手法으로서 Larson의 狀態變數增加形動的計劃法[92]과 Jacobson과 Mayne의 微分動的計劃法[74]이 있다.

이들 解法에서 보듯이 設計 操業等에 關聯된 靜的最適化問題와 制御나 軌跡에 關聯된 動的最適化問題에서의 計劃法의 共通點은 目的函數를 極小로 하고자 하는 것이다. 그 方法으로서 目的函數를 直接極小로 하는 手法이 있으면 그것을 擇하고 그러한 手法이 없을 때에는 必要에 따라 變形된 目的函數(上記 F와 H等)를 導入하여 그 函數에서 式들을 導出하고 이 導出된 式들을 풀므로서 元來의 最適化問題를 解決하는것이다.

6.3. 解法例

앞의 問題形成에서 例를 든 (例 1)과 (例 2)를 위의 方法으로 풀어보기로 한다. (例 1)의 境遇는 그答을 計算없이도 곧 알아낼 수 있지만 위 方法의 順序를 따르기로 한다.

(例 1)의 解:

(39)式에 依하여

$$F=u_1u_2+\lambda(2u_1+2u_2-l) \tag{64}$$

(40)式과 (41)式에서

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}=u_2+2\lambda=0 \tag{65}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_2}=u_1+2\lambda=0 \tag{66}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=2u_1+2u_2-l=0 \tag{67}$$

세 式 (65)(66)(67)을 풀면 $u_1=u_2=\frac{l}{4}$, $\lambda=-\frac{l}{8}$이고 極小 $L=\frac{l^2}{16}$이 된다. 여기서 制約條件이 없으면 最大面積은 圓이 되는데 이것은 바로 制約條件에 따라 目的函數가 달라진다는 事實을 말해 준다.

(例 2)의 解:

이 例題의 制御變數는 $T(t)$임으로 問題(Ⅱ)의 一般式에서 $u(t)$를 $T(t)$로 代置할 수 있다. 여기서는 制御變數 $T(t)$의 範圍가 $o\leq T(t)\leq 700°$C로서 넓으므로 制約條件이 없는 問題로 看做하여 풀고 나중에 나온 答 $T(t)$가 制約條件을 滿足하는 範圍內에 있는가를 確認하는 方法을 取하기로 한다. 最小値原理法을 使用하기로 하고 $J=-x_2(t_f)$, $\varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]=-x_2(t_f)$, $L=o$라고 놓으면 (53)～(58)式은 다음과 같이 된다.

$$H=\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{f}=-k_1x_1\lambda_1+(k_1x_1-k_2x_2)\lambda_2 \tag{68}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=-k_1x_1\\ \frac{dx_2}{dt}&=k_1x_1-k_2x_2\end{aligned}\right\} \tag{69}$$

$$x_1(o)=a,\quad x_2(o)=b \tag{70}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\lambda_1}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=k_1\lambda_1-k\lambda_2\\ \frac{d\lambda_2}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=k_2\lambda_2\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

$$\lambda_1(t_f)=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1(t_f)}=0,\quad \lambda_2(t(_f)=\frac{\partial\varphi}{\partial x_2(t_f)}=-1 \tag{72}$$

$$\frac{\partial H}{\partial T(t)}=-k_1'x_1\lambda_1+k_1'x_1\lambda_2-k_2'x_2\lambda_2=0 \tag{73}$$

여기서 $k_i'=\frac{\partial k_i}{\partial T(t)}$ $(i=1, 2)$이다.

最小値原理에 따라 H를 極小로 만드는 $T(t)$가 最適制御이다. 이 最適 $T(t)$는 (73)式에서 求하게 되는데 이 式에는 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$라는 未知變數가 있다. 이들 未知變數를 얻기 위하여는 (69)～(72)式을 풀어야 하는데 이 式들을 풀려면 또 最適 $T(t)$를 먼저 알아야 한다. 따라서 H를 極小로 하는 $T(t)$는 反覆補正計算을 遂行하는 探索法中의 한 手法으로서만 求해진다. 손쉬운 手法의 하나는 傾斜法인데

$$T_{(t)}^{(j+1)}=T_{(t)}^{(j)}-\varepsilon\left(\frac{\partial H}{\partial T(t)}\right)^{(j)}\quad j=0, 1\cdots\cdots \tag{74}$$

로서 j는 反覆補正計算數이고 向上된 값 $T_{(t)}^{(j+1)}$은 現在의 값 $T_{(t)}^{(j)}$에다 現在의 傾斜 $\left(\frac{\partial H}{\partial T(t)}\right)^{(j)}$에 比例하도록 補正을 加하여 언어진다. 여기서 ε은 補正量을 그때그때 調節할 수 있는 正의 數이다. 이 反覆補正計算이 成功的이면 언어지는 $T(t)$가 數値解로서의 最適 $T(t)$가 된다. 이런 式으로 數値解를 求하는 代身 여기서는 于先 어떤 條件下에서 (73)式을 滿足시키는 $T(t)$가 있는가를 考察해 보기로 한다. H가 $T(t)$에 對하여 極小가 되려면

$$\frac{\partial^2 H}{\partial T^2_{(t)}} = -k_1''x_1\lambda_1 + k_1''x_1\lambda_2 - k_2''x_2\lambda_2 \geq 0 \tag{75}$$

가 成立되어야 한다. 여기서 $k_i'' \equiv \frac{\partial^2 k_i}{\partial T^2_{(t)}}$, $(i=1,\ 2)$이다. (73)式을 λ_1에 對해서 풀고 (75)式에 代入하여 整理하면

$$\lambda_2 x_2\left[\frac{k_1''k_2' - k_1'k_2''}{k_1'}\right] \geq 0 \tag{76}$$

가 된다. 一方 (71)式의 둘째式을 積分하고 (72)式의 條件 $\lambda_2(t_f) = -1$을 代入하면

$$\lambda_2(t) < 0 \tag{77}$$

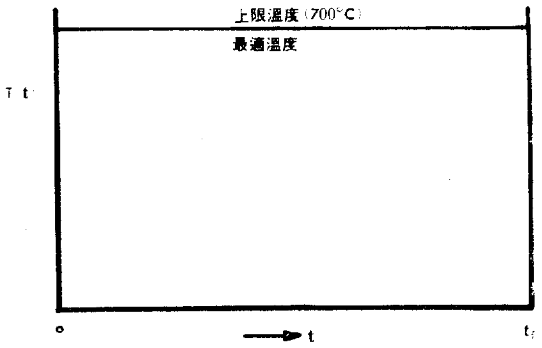
라는 結果를 얻는다. 따라서 (76)式에서 λ_2는 恒常 負라는 事實과 x_2는 mole 濃度로서 負가 될 수 없다는 事實을 考慮하면서 $k_i' = \frac{E_i}{RT_{(t)}^2}k_i$, $k_i'' = \frac{E_i^2}{RT^2_{(t)}}k_i - \frac{2E_i}{RT^3_{(t)}}k_i$, $k_i = k_{io}exp\{-E_i/(RT(t)\}$, $(i=1, 2)$를 代入하고 整理하면

$$\frac{k_{20}E_2}{RT_{(t)}^4}\exp\left\{-\frac{E_2}{RT}\right\}[E_1 - E_2] \leq 0 \tag{78}$$

이 되는데 (E_1-E_2)의 係數의 量이 다 正인 物理的量으므로 $[E_1-E_2] \leq 0$ 或은

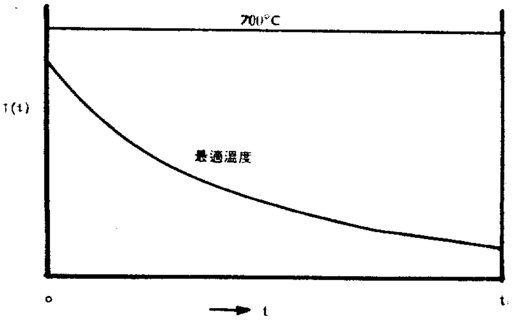
$$E_1 \leq E_2 \tag{79}$$

가 된다. 따라서 이 (79)或은 (73)式으로서 最適 $T(t)$가 求해질 수 있는 條件이며 이 條件이 滿足되는 最適 $T(t)$는 第4圖와 같다.



第4圖 $E_1 \leq E_2$일 때의 最適溫度

그 反面 (79)式 條件이 滿足되지 않는 $E_1 > E_2$인 境遇에는 (73)式을 滿足시키는 H의 極小値는 없다. 그러나 이때 H를 極小로 만드는 $T(t)$는 第5圖와 같이 許容된 制限溫度의 上限溫度이다.



第5圖 $E_1 > E_2$일 때의 最適溫度

이 例題에서는 이와 같이 直接的인 數値計算없이도 最小値原理法을 最大限 利用함으로써 E_1과 E_2의 關係만 알고 最適溫度의 模樣을 推理해 낼 수 있다.

7. 最適化利用 分野 및 工程

物質移動 energy 移動 化學反應이 關與하는 모든 工程은 最適化利用의 對象이 된다. 蒸溜塔 最適設計와 制御, 連續蒸溜 回分蒸溜裝置의 最適設計와 操業等을 비롯하여 蒸發 抽出 晶析 吸收 및 吸着裝置의 最適設計 最適操業條件의 決定等도 들수 있다.

또 反應裝置의 最適設計 操業 制御의 選定과 特히 觸媒劣化를 隨伴하는 反應操作의 最適化 熱交換器를 利用한 energy 供給 回收工程과 操作의 最適化 流體의 流動이 關與하는 裝置나 粉體取扱裝置의 最適設計 및 操業最適化, 擴散과 混合裝置의 設計 操業 制御의 最適化 그리고 化學工程 뿐만 아니라 딴 工程에 미치는 利用對象은 헤아릴 수 없이 많다. 더욱 工程하고는 直接關係가 없는 工場經營 및 管理, 原料의 供給과 製品의 貯藏, 輸送 및 販賣等에도 最適化가 適用될 수 있으며 또 實驗室의 實驗計劃 實驗資料의 分析과 處理에도 最適化法이 利用된다. 아래에 最適化의 對象이 되는 몇 個의 主要分野와 工程을 參考로 列擧해 보기로 한다.

經營 및 管理:

在庫管理
受拂業務
生産管理
品質管理

損失時間分析
整備計劃
裝備機能解析
市場分析
販賣計劃

石油工業

油田操業管理 및 制御
石油精製(常壓蒸溜, 接觸媒分解, 熱分解, 接觸媒改質)
Gasoline 混合
重合
Alkyl 化
異性化

鐵鋼工業

Cokes 製造
原料配合
燒結
高炉
鹽基性酸素轉炉
平炉
電氣炉
連續鑄造
均熱炉
壓延(分塊壓延, 熱間壓延, 冷間壓延, 棒鋼壓延)
整精工程
用役(電力, 熱, 用水, 水蒸氣, 空氣)

세멘트工業

原料配合
粉碎
Kiln 作業
熱利用

製紙工業

Pulp 工程
藥品回收工程
漂白
抄紙
水蒸氣發生과 發電

化工藥品工業

Ethylene 工程
Ammonia 工程
酸化工程
鹽化 vinyl 工程
水素添加工程
醫藥品工程
고무生產工程

發 電

火力發電所
水力發電所
原子力發電所
配電

其他分野

採炭 및 輸送
導管施設
給水
汚物 및 廢物處理
개스分配
交通管理
浮遊選鑛
銅製鍊
알루미늄製鍊
精糖
噴霧乾燥
製果
洗滌劑
家畜飼料
化粧品工程
紡織
織物染色
生體醫學
工業試驗
研究計劃
實驗計劃

이렇게 利用되는 分野가 廣範圍하고 그 目的도 多彩多樣하지만 工程의 能率을 올리고 製品의 質을 向上하면서 經費를 減小하고 利得을 最大로 하자는 共通點이 있다. 따라서 製品을 多量으로 生產하는 大規模工場에서는 最適化에 依한 僅少한 向上이라도 全體收支面에서 볼 때에는 莫大한 絶對量이 될 것임으로 最適化로 因한 惠澤이 크다고 할 것이며 또 製品生産量이 少量이라도 그 單價가 비싼 것이라면 最適化로 因한 惠澤은 또한 크다 할 것이다. 또 그와 反面 中小規模의 工場에서는 保有하고 있는 工程과 資源의 最適化를 圖謀함으로서 向上의 理論的 限界點을 把握하고 工場의 將來生產性에 對한 事前計劃에 좀 더 賢明하고 合理的인

對策을 마련할 수 있는데 最適化의 意義가 있을 것이다.

8. 結 論

위에서 工程最適化에 對하여 構成要素, 對象과 範圍 및 最適化過程을 考察하였다. 最適化過程에서는 問題의 形成과 解答을 얻는데 使用되는 最適化手法을 說明하였고 問題型의 分類法과 一般的인 解法을 說明하였다. 最適化가 適用되는 對象은 廣範圍한데 한 工程에서 問題를 捕捉하는 것도 重要過程中의 하나이며 適切한 問題로서 模型을 짜고 가장 適合한 最適化手法으로 必要로 하는 答을 얻는 것도 매우 重要한 過程의 하나이다. 形成된 問題에 對한 最適化手法의 選擇은 根本的인 問題型의 分類에 크게 左右되지만 또한 實際施行面의 制約을 받고 問題를 取扱하는 個人의 嗜好와 經驗에도 左右된다는 것을 附記하여 둔다.

文 獻

1. Abadie, J, Integer and Nonlinear Programming (ed. J, Abadie), North-Holland(1970).
2. Abadie, J and J. Carpentier, Optimization (ed. R. Fletcher), Academic Press (1968).
3. Akhiezer, N. I., The Calculns of Variations. Blaisdell (1962).
4. Aohi, M., Optimization of Stochastic Systems, Academic Press (1967).
5. Aohi, M., Introduction to Optimization Techniques, Macmillan (1971).
6. Aris, R., Discrete Dynamic Programming, Blaisdell (1964).
7. Aris, R., L. Nemhauser, and D. J. Wilde, A. I. Ch. E. J., **10**, 913 (1964).
8. Åström, K. J., Introduction to Stochastic Contral Theory. Academic Press(1970).
9. Athans, M. and P. L. Falb, Optimal Control, Mc Graw-Hill (1966).
10. Balas, E., Operations Research, **13**, 517(1965).
11. Bansal, J. G. and K. S. Chang, Int. J. Control, **16**, 481 (1972).
12. Bates, H. T., Computer Code for Wolfe Aegorithm, Kansas State Uniuersity.
13. Bauman, E. J., Advances Control Syst, **6**, 159 (1968).
14. Beale, E. M. L., J. Roy. Stat. Soc. (B), **17**, 173 (1955).
15. Bellman, R., Dynamic Programming, Princeton University Press (1957).
16. Bellman, R. and S. E. Dreyfus, Applied Dynamic Programming, Princeton Uniuersity Press (1962).
17. Bellman R. and R. Kalaba, Dynamic Programming and Modern Control Theory, Academic Press (1965).
18. Beltrami, E. J. An Algorithmic Approach to Nonlinear Analysis and Optimization, Academic Press (1970).
19. Bessiere, F. and E. A. Sautter, Manage. Sci. **15**, (1968).
20. Beveridge, G. S. G. and R. S. Schechter, Optimization Theory and Practice, McGraw-Hill (1969).
21. Box, M. J., Computer J, 8, 42 (1965).
22. Box, M. J., Computer J, **9**, 67 (1966).
23. Box, M. J., D, Dauis, and W. H. Swann, Nonlinear Optimization Teihniques, Oliver and Boyd (1969).
24. Box, G. E. P. and N. R. Draper, Evolutionary Operatration, Wiley (1969).
25. Box, G. E. P. and K. B. Wilson, J. Roy. Stat. Soc. (B) **13**, (1951).
26. Brosilow, C. B., L. S. Lasdon, and J. D. Pearson. Proc 1965 JÂCC, Rochester, N. Y.
27. Brosilow, C. B. and E. Nunez, Can J. Ch. E., **46**, 205 (1968).
28. Bryson, Jr. A. E. and Y. C. Ho, Applied Optinal Control, Blaisdell (1969).
29. Carroll, C. W. Operations Research, **9**, 169 (1961).
30. Chang, K. S. and S. G. Banhoff, A. I. Ch. E. J., **15**, 410 (1969).
31. Chang, K. S. and S. G. Banhoff, A. I. Ch. E. J., **15** 414 (1969).
32. Cragg, E. E. and A. V. Levy, J. Opt. Theory Appl., **4**, 191 (1969).
33. Dantzig, G. B, Linear Programming and Extensions, Princeton University Press (1963).
34. Dantzig, G. B. and P. Wolfe, Econometrica, **29**, (Oct 1961).

35. Davidon, W. C. Variable Metric Metnod for Minimization, AEC Report, ANL-5990 (1959).
36. Davidon, W. C., Compnter J., **10**, 406(1968).
37. Denn, M. M., R. D. Gray, and J. R. Ferron, IEC Fund, **5**, 59 (1966).
38. Denn, M. M., Optimization by Variational Metnods, Prentice-Hall (1969).
39. Dreyfus, S. E., Dynamic Programming and the Calculns of Variations, Academic Press (1965).
40. Duffin, R. J., E. L. Peterson, and C. Zener, Geometic Programming : Theory and Applications, John Wiley (1967).
41. Dyer, P. and S. R. McReynolds, The Computation and Theory of Optimal Control, Academic Press (1970).
42. Elsgolc, L. E., Calculus of Variations, Addison-Wesley (1962).
43. Everett, H., Operations Research, **11**, 399 (1963).
44. Fan, L. T. The Continuons Maximum Principle, Joein Wiley (1966).
45. Fan, L. T. and C. S. Wang, The Discrete Maximum Principle, John Wiley (1964).
46. Fend, F. A. and C. B. Chandler, Numerical Optimization for Multidimensional Problems, GE Report 61GL78 (1961).
47. Fiacco, A. V. and A. P. Jones, SIAM Appl. Math, **17**, 996 (1969).
48. Fiacco, A. V and G. P. McCormick, Management Sci., **10**, 360 (1964).
49. Fiacco, A. V. and G. P. McCormick, Management Sci., **10**, 601 (1964).
50. Fiacco, A. V. and G. P. McCormick, Management Sci., **12**, 816 (1966).
51. Fiacco, A. V. and G. P. McCormick, Nonlinear Sequential Unconstrainel Minimization Techniques, John Willy (1968).
52. Findeisen, W., J. Pulaczowshi, and A. Manitius, Automatica, **6**, 581 (1970).
53. Fletcher, R. and M. D. Powell, Computer J., **6**, 63 (1963).
54. Fletcher, R. and C. M. Reeves, Computer J., **7**, 149 (1964).
55. Forsythe G. E. and T. S. Motzkin, Bull. American Math. Soc., **57**, 304 (1951).
56. Garvin, W. W., Linear Programming, Mc-Graw-Hill (1960).
57. Gass, S. I., Linear Programming : Methods and Applications, McGraw-Hill (1968).
58. Gelfand, I. M. and S. V. Fomin, Calculus of Variations, Prentice-Hall (1963).
59. Geoffrion, A. M., Operations Research, **18**, 375 (1970).
60. Glover, F., Operations Researich, **13**, 879(1965).
61. Goldfarb, D. and L. Lapidus, IEC Fund., **7**, 142 (1968).
62. Goldfarb, D., SIAM J. Appl. math., **17**, 739 (1969).
63. Haarhoff, P. C. and J. D. Buys, Computer J., **13**, 178 (1970).
64. Hadley, G, Linear Programming, Addison-Wesley (1962).
65. Hadley, G, Nonlinear and Dynamic Programming, Addison-Wesley (1964).
66. Hestenes, M. R., J. O. T. A., **4**, 303 (1969).
67. Hestenes, M. R, and E. Stiefel, Report 1659, NBS (1952).
68. Heymann, M. and M. Avriel, J. O. T. A., **3**, 392 (1969).
69. Himmelblau, D. M., Applied Nonlinear Programming, McGraw-Hill (1972).
70. Hooke, R. and T. A. Jeeves, J. Assoc. Comp. Mach., **8**, 212 (1961).
71. Horowitz, L. B. and P. E. Sarachik, SIAM J. Appl. Math., **16**, 676 (1968).
72. Hu, T. C, Integer Programming and Network Flows, Addison-Wesley (1969).
73. Jackson, R., Int J. Contral, **4**, 127 (1966).
74. Jacobson, D. H. and D. Q. Mayne, Differential Dynamic Programming, Elsevier (1970).
75. Jacobson, D. H., S. B. Gershwin, and M. M. Lele, IEEE Trans. A. C., **AC-15**, 67 (1970).
76. Jacobson, D. H. and M. M. Lele, IEEE Trans. A. C., **AC-14**, 457 (1970).
77. Jazwinski, A. H, Stochastic Prouesses and Filtering Theory, Academic Press (1970).
78. 化學工學, **28**, No 10, 841 (1964).

79. 化學工學, 31, No. 4, 302 (1967).
80. 化學工學, 36, No. 10, 1043 (1972).
81. Kaufmann, A. and R. Faure, Introduction to Operations Research, Academic Press (1968).
82. Kelley, H. J. Optimization Techniques (ed. G. Leitmann) Academic Press (1962).
83. Kiefer, J., Proc. American Math. Soc., 4, 502 (1953).
84. Kodoma, S. and E. Bamba, Elect. Eng. Jap., 88, 69(1968).
85. Koppel, L. B., Introdnction to Control Theory with Applications to Prouess Control, McGraw-Hill (1968).
86. Kowalik, J. and M. R. Osborne, Methods for Unconstrained Optimization Problems, Elsevier (1968).
87. Kuester, J. L. and J. H. Mize, Optimization Techniques with Fortran, McGraw-Hill (1973).
88. Kuhn H. W. and A. W. Tucker, Proc. Second Berkeley Symp. Math. Stat. p. 481 (1950).
89. Kulikowshi, R., Automatica, 6, 315 (1970).
90. Kunzi, H. P., W. Krelle, and W. Oettli, Nonlinear Programming, Blaisdell (1966).
91. Lapidus, L. and R. Luus, Optimal Control of Enginedring Processes, Blaisdell (1967).
92. Larson, R. E., State Increment Dynamic Programming, Elsevier (1968).
93. Lasdon, L. S., IEEE Trans. Syst. Sci. Cybern. SSC 4, 86 (1968).
94. Lasdon, L. S., Optimization Theory for Large Sgstems, Macmillan (1970).
95. Lasdon, L. S., S. K. Mitter, and A. D. Waren, IEEE Trans. A. C., AC-12, (1967).
96. Lasdon, L. S., A. D. Waren, and P. K. Rice, IEEE Trans. A. C., AC-12, 388 (1967).
97. Lee, E. B. and L. Markus, Foundations of Optimal Control Theory. Wiley (1967).
98. Lee E. S., A. I. Ch. E. J., 15, 393 (1969).
99. Lee, E. S., Can J. Ch. E., 47, 431 (1969).
100. Leitmann, G. (ed), Optimization Techniques, Academic Press (1962).
101. Luenberger, D. G., Optimization by Vector Space Methods, Wiley (1969).
102. Mangasarian, O. L., Nonlinear Programming, McGraw-Hill (1969).
103. Marquardt, D. M., J. SIAM, 11, 431 (1963).
104. Meditch, J. S. Stochastic Optimal Linear Estimation and Contiol, McGraw-Hill (1969).
105. Mesarovic M. D., D. Macko and Y. Takahara, Automatica, 6, 261 (1970).
106. Mesarovic, M. D. Macko, and Y. Takahara, Theory of Hierarchical Multilevel Systems, Academie Press (1970).
107. Miele, A. and J. W. Cantrell, J. O. T. A., 3, 459 (1968).
108. Murtagh, B. A. and R. W. H. Sargent, Computer J, 13, 185 (1970).
109. Nelder, J. A. and R. Mead, Computer J, 7, 308 (1964).
110. Ogunye, A. F. and W. H. Ray, A. I. Ch. E. J., 17, 43 (1971).
111. Ogunye, A. F. and W. H. Ray, A. I. Ch. E. J, 17, 365 (1971).
112. Ornea, J. C. and G. G. Eldredge, Paper No. 4.15, AIChE-IChE Joint Meeting, London (1965)
113. Ortega J. M. and W. C. Rheinboldt, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press (1970).
114. Peterson, C., Management Sci., 13, 736(1967).
115. Petrov, I. P. Variational Methods in Optimum Control Theory, Academic Press (1968).
116. Pierre, D. A., Optimization Theory with Applications, John Wiley (1969).
117. Pinsker. I. S. and B. M. Tseitlin, Auto. Remote Control, 23, 1510 (1962).
118. Pliskin, L. G. and T. G. Rzaev, Auto. Remote Control, 29, 1864 (1968).
119. Polak, E. Computational Methods in Optimization, A Unified Approach, Academic Press (1971).
120. Pontryagin L.S. et al., The Mathematical Theory of Optimal Processes, John Willy (1962).
121. Powell, M. J. D., Compnter J., 7, 155 (1964).
122. Powell, M. J. D., Compnter J., 7, 303 (1965).
123. Ray, W. H. and J. Szekely, Process Optimization with Applications in Metallurgy and Chemical Engineering, John Wiley (1973).
124. Roberts, S.M., Dynamic Programming in Chemical

Engineering and Proceee Control, Academic Press (1964).
125. Rosen, J. B., J. SIAM, 8, 181 (1960).
126. Rosen, J. B., J. SIAM, 9, 514 (1961).
127. Rosen, J. B. and J. C. Ornea, Management Sci., 10, 160 (1963).
128. Rosenbrock, H. H., Compnter J., 3, 175(1960).
129. Rosenbrock, H. H. and C. Storey, Compntational Techniques for Chemical Engineers, Pergamon Press (1966).
130. Saaty, T. L. and J. Bram, Nonlinear Mathematics McGraw-Hill (1964).
131. Sage, A. P. Optimum Systems Control, Prentice-Hall (1968).
132. Savas, E. S., Compnter Control of Indnstuial Processes, McGraw-Hill (1965).
133. Schultz, D. G. and J. L. Melsa, State Functions and Linear Contiol Systems, McGraw-Hill(1967).
134. Shah, B. V., R. J. Buehler, and O. Kempthorne, J. SIAM, 12, 74 (1964).
135. Spendley, W. G. R. Hext and F. R. Himsworth, Technometrics, 4, 441 (1962).
136. Srinivasan, Stochastic Theory and Cascade Processes. Elsevier (1969).
137. Sugie, N., IEEE Trans, A. C., AC-9, 105(1964).
138. Tabak, D. and B. C. Kuo, Optimal Control by Mathematical Programming, Prentice-Hall(1971)
139. Wilde, D. J., Optimum Seeking Methods, Prentice-Hall (1964).
140. Wilde, D. J, Chem, Eng Prog, 61, 3, 86(1965).
141. Wilde, D. J. and C. S. Beightler, Foundations of Optimization, Prentice-Hall (1967).
142. Wismer, D. A. (ed.) Optimization Methods for Large-Scale Sptems, McGraw-Hill (1971).
143. Wolfe, P., Econometrica, 27, 382 (1959).
144. Wolfe, P., Methods of Nonlinear Programming, in Recent Advances in Mwthematical Programming (ed. R. L. Graves and P. Wolfe), Mc Graw-Hill (1963).
145. Wolfe, P., Methods of Nonlinear Programming, in Non-Linear Prvgramming (ed. J. Abadie) John Wiley (1967).
146. Yoshida, O., Electr, Eng. Jap., 87, 29 (1968).
147. Zadeh, L. A. and C. A. Desoer, Linear System Theory, McGraw-Hill (1963).
148. Zangwill, W. I., Compnter J., 10, 293 (1967).
149. Zangwill, W. I., Nonlinear Programming, Prentice-Hall (1969).
150. Zone, G. and K. S. Chang, Int. J. Control, 15, 255 (1972).
151. Zoutendijk, G., Methods of Feasible Directions, Elsevier (1960).
152. Zontendijk, G., SIAM J. Control, 4, 194(1966).