

# 유동학의 이론과 응용 : 비뉴톤 유체의 점도계적 흐름\*

尹 昌 求

한국과학기술연구소 화학공정연구실

## Theory and Applications of Rheology : Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids

C. K. Yun

Chemical Engineering Process Laboratory  
Korea Institute of Science and Technology

### Abstract

We discuss some of major developments of last two decades in the field of rheology, with a particular emphasis on viscometric flows. This lecture consists of five parts: (1) Newtonian fluids, (2) kinematics/dynamics, (3) constitutive equations, (4) viscometric flows of a simple fluid, and (5) viscometers. A book under the same subtitle by Coleman, Markovitz and Noll is used as the text.

### 1. 뉴톤 유체

유체역학의 기초인 뉴톤유체의 이론은 다음 물성의 가정에서 출발한다.

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\eta_0\mathbf{D} \quad (\text{점성}), \quad (1.1)$$

$$\mathbf{D} : \mathbf{I} = 0 \quad (\text{비압축성}), \quad (1.2)$$

단,  $\mathbf{T}$ 는 응력텐서,  $p$ 는 압력,  $\eta_0$ 는 점도(물질상수)다. 이들을 힘의 평형식에 대입하여 유체역학의 운동방정식(Navier-Stokes equations)을 얻는다. 이들 방정식의 특수해중에 잘 알려진 공식은 첫째로, 반경  $R$ 의 모세관을 통해 흘러나오는 유량  $Q$  (단위시간당부피)와 축방향속을 따르는 압

력의 기울기 (단위거리당 변화율)  $f$ 와의 관계를 나타내 주는 모세관 공식 (Hagen-Poiseuille law)

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta_0} f, \quad (1.3)$$

둘째로, 동심의 두 원기둥 벽(반경  $R_1 < R_2$ ) 사이에 유체를 넣고 원기둥 하나는 일정 각속도  $\Omega$ 로 돌려 주고 다른 쪽은 움직이지 않게 붙잡아 주는데에 (Couette flow) 소요되는 토크  $M$  (단위높이당)의 계산식

$$M = \frac{4\pi\eta_0 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \Omega \quad (1.4)$$

나중 경우, 원기둥 벽에 수직으로 작용하는 단위면적당 힘간의 차를 계산하면

$$\Delta T_{rr} \equiv T_{rr}|_{r=R_2} - T_{rr}|_{r=R_1} = - \int_{R_1}^{R_2} \rho r [\omega(r)]^2 dr < 0, \quad (1.5)$$

\* 본총설은 문헌 1을 교재로 사용하였음.

단,  $\rho$ 는 밀도고  $\omega(r)$ 은 중심선에서  $r$ 만큼 떨어져서의 각속도다.

위에 설명한 모세관 점도계와 원기둥점도계의 측정 대상이 뉴턴유체라면 공식 (1.3)~(1.4)에 의하여  $Q$ 와  $f$ ,  $M$ 과  $\Omega$ 가 각각 비례관계일 뿐더러 두 가지 다른 방법으로 결정한 점도상수  $\eta_0$ 의 값이 일치해야 한다. 한편 식 (1.5)에 의하면 원기둥 점도계 속의 뉴턴 유체가 벽을 누르는 단위면적당 힘은 원심력 때문에 안 쪽보다 바깥 쪽에서 더 크다. 뉴턴유체에 대한 이와 같은 예측을 Fig. 1의 왼쪽에 보였는데 물이나 기름 등 대다수의 유체가 이런 성질을 나타내는 것은 옛부터 잘 알려져 있는 사실이다.

그러나 점차로 생활주변의 꿀, 꿀, 비눗물등이나 화학공업에서 취급하는 각종 고분자 물질등의 액체는 위의 예측을 따르지 않음이 판명되었다. Fig. 1의 오른쪽에 보인 것과 같이 점도계에서의 비례관계가 성립 않음은 물론이거니와 원심력에도 불구하고 원기둥 점도계의 벽을 누르는 단위면적당 힘이 가운데 쪽에서 더

큰, 이른바 수직응력효과가 관찰되곤 한다.

이 문제를 경제조건의 가정을 바꾼다던지 하여 뉴턴 유체의 범위내에서 설명해 보려는 노력이 있었으나 별로 성공적이 아니었다. 결국은 식 (1.1) 자체를 따르지 않는 비뉴턴 유체들이 인식되었고 이를 계기로 고전 유체역학을 벗어난 유동학의 발전이 가속되었다.

## 2. 운동론과 동역학

연속체의 역학에서는 물체의 운동과 변형을 다룬다. 물체는 물질  $X$ 들로 구성되므로 이들 하나 하나의 자리가 시간에 따라 바뀌는 것을 고려해야 한다. 물질  $X$ 의 지금(시간  $t$ ) 자리를  $x$ 라 하고 옛적  $\tau \leq t$ 의 자리를  $\xi$ 라 하면, 지금  $x$ 에 있는 물질의 옛 형상을 나타내는 상대변형함수를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\xi &= \chi_t(x, \tau) = \xi(\tau), \\ x &= \chi_t(x, t) = \xi(t).\end{aligned}\quad (2.1)$$

위의 함수가 지금 자리에 따라 바뀌는 것을 보기 위해 그 기울기  $F \equiv \partial/\partial x$ 를 구하면

$$\begin{aligned}F_t(\tau) &\equiv F_{\chi_t}(x, \tau), \\ F_t(t) &= 1.\end{aligned}\quad (2.2)$$

상대변형기울기의 이력을 아래와 같이 정의하면

$$F(s) \equiv F_t(t-s), \quad s \geq 0, \quad (2.3)$$

이 주위의 지금 형상과  $s$  시간전의 형상간의 관계가 표현된다. 당연히  $F(0) = 1$ 이다.

지금  $x$ 에 있는 물질의 속도와 가속도는 각각

$$\begin{aligned}v(x, t) &= \frac{d}{d\tau} \chi_t(x, \tau) \Big|_{\tau=t}, \\ a(x, t) &= \frac{d^2}{d\tau^2} \chi_t(x, \tau) \Big|_{\tau=t},\end{aligned}\quad (2.4)$$

로 계산되고 이 점의 지금까지의 궤적, 즉 상대변형함수 (2.1)은 아래의 미분방정식과 초기조건

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(\tau) &= v[\xi(\tau), \tau], \\ \xi(t) &= x\end{aligned}\quad (2.5)$$

로부터 구할 수 있다.

속도기울기의 정의는

$$L \equiv Fv(x, t) = -\dot{F}(0), \quad (2.6)$$

이중의 대칭부분인

$$D \equiv \frac{1}{2}(L + L^T) \quad (2.7)$$

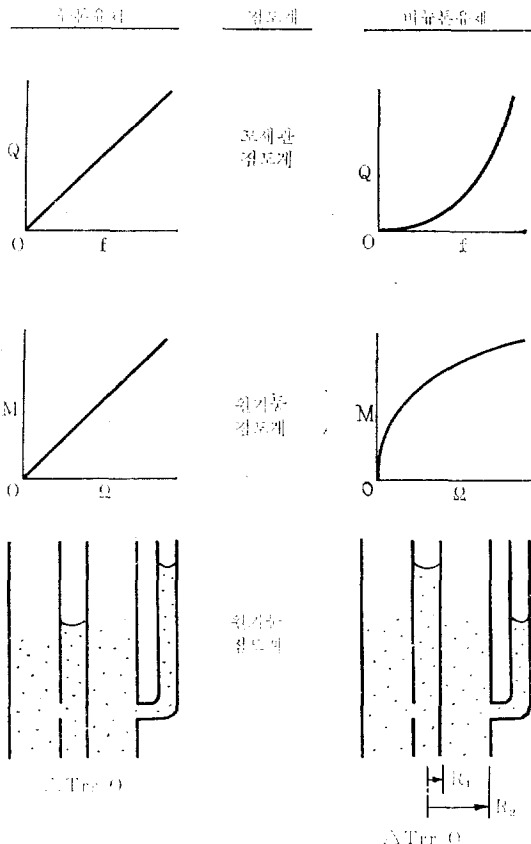


Fig. 1. 뉴턴유체와 비뉴턴유체의 비교

을 변형울텐서라 부르는데 (1.1)–(1.2)에 이미 나와 있다. 운동중에 물체의 어느 부분도 부피가 늘거나 줄지 않는 부피불변운동을 수식으로 표현하면

$$\begin{aligned} |F_t(\tau)| &= |F(s)| = 1, \\ L: 1 &= D: 1 = \nabla \cdot v = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

단,  $|F|$ 는 텐서  $F$ 의 행렬식을 나타낸다.

힘은 물체간 또는 물체의 부분간의 상호작용이다. 이 힘이 어떻게 운동을 일으키는가 하는 것이 동역학의 주제인 것이다. 연속체의 역학에서는 흔히 두 가지의 힘으로 나누어 생각한다. 지금  $x$ 에 있는 물질에 멀리서 미치는 힘의 밀도(단위질량당)를  $b(x, t)$ , 같은 자리에 설정한 임의의 곡면에 접촉해서 작용하는 힘의 밀도(단위면적당)를  $t(n, x, t)$ 로 표기하는데 여기서  $n$ 은 작용면에 수직인 단위벡터다. 힘의 평형법칙으로부터 유도되는 것은 응력텐서  $T(x, t)$ 의 존재와 아래의 관계식들이다.

$$t = T \cdot n, \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot T + \rho b = \rho a. \quad (2.10)$$

한편 힘의 능률의 평형법칙으로부터 응력텐서  $T$ 는 대칭임이 유도된다. 멀리서 미치는 힘의 밀도  $b$ 는 흔히 보존성이라  $-\nabla\phi$ 의 형태로 유도되고 ( $\phi$ 는 포텐셜) 식(2.10)은

$$\nabla \cdot T - \rho \nabla \phi = \rho a \quad (2.11)$$

의 낮은 형태로 바뀐다.

### 3. 물성 방정식

물성방정식이란 물리적 변화량간의 관계식을 일컫는데 역학에서는 물체내에서 작용하는 힘과 물체의 가능한 운동간의 함수관계를 주로 말한다. 각종 이상물질은 적절한 조건하에 실제물질들이 나타내는 반응을 표현하기 위한 수학적 모델로서 특정 물성방정식들에 의해 정의된다. 뉴턴유체가 식(1.1)–(1.2)에 의해 정의되는 것이 한 예다.

근래 유동학 이론의 경향은 뉴턴유체보다 더 포괄적이면서도 수식적으로 단순한 모델의 추구하고 응용이 있다고 말할 수 있다. Fig. 1의 바른 편에 보인 비뉴턴 현상은 물론, 응력해소현상까지도 설명할 수 있는 모델로서 가장 합리적으로 확립된 것이 비압축성 단순유체다. 이 새로운 이상물질은 부피불변운동(식(2.8))밖에 못하며 응력텐서는 임의의 정압부분외에는 전적으로 상대변형이력(식(2.3))에 의해 결정된다. 즉,

비압축성 단순유체를 정의하는 물성방정식은

$$|F(s)| = 1, \quad (3.1)$$

$$T + p1 = \bar{H}(F(s)), \quad (3.2)$$

단,  $H$ 는  $s$ 를 매개변수로 하는 일반함수(functional)다. 정압부분은 임의로 편의상  $p = -\frac{1}{3}T:1$ 의 관계를 취한다.

같은 물체의 변형이라도 관측자 자신의 운동에 따라 다르게 나타날 것은 당연하지만 고유의 물성만은 관측자마다 다르게 보일 수가 없겠다. 이 개념을 공식화한 것이 물성불변칙 또는 객관성의 원칙으로서, 이를 요약해 보면, 만약 어느 한관측자가 보는 물체의 운동이 그 물체를 구성하는 물질의 물성방정식과 어긋나지 않으면 어느 다른 관측자가 보기에 또 마찬가지로 되는 것이다. 이 원칙의 수식적 활용을 위하여 관측자라는 말 대신에 아래의 틀이라는 개념을 도입한다.

틀이란 어느 사건에 시간과 좌표를 부여하는 것을 말한다. 같은 사건에 대하여 무수히 많은 다른 틀이 있을 수 있으므로 틀바꿈(changes of frame)을 고려하게 된다. 일반적으로 틀바꿈은 시간에 의존하는데 새 틀에 의한 것을 \*로 표기하면

$$x^* = c(t) + Q(t) \cdot x, \quad (3.3)$$

단,  $c$ 는 시간의 벡터함수고  $Q$ 는 직교(orthogonal) 텐서함수로서  $Q \cdot Q^T = 1$ 이다. 텐서  $Q$ 의 이력을 다음과 같이 정의하고

$$R(s) \equiv Q(t-s), \quad s \geq 0, \quad (3.4)$$

접속력의 객관성을 가정하면

$$\begin{aligned} F^*(s) &= R(s) \cdot F(s) \cdot R(0)^T, \\ T^* &= R(0) \cdot T \cdot R(0)^T, \end{aligned} \quad (3.5)$$

단, 붙여쓴  $T$ 는 텐서의 전위(transpose)를 의미하고  $T = T(x, t)$ . 물성불변칙을 비압축성 단순유체에 적용시키면 식(3.2)와 마찬가지로

$$T^* + p1 = \bar{H}(F^*(s)), \quad (3.6)$$

이로부터 일반함수  $H$ 가 만족시켜야만 하는 관계식을 간단한 계산에 의하여 아래와 같이 얻는다.

$$R(0) \cdot \bar{H}(F(s)) \cdot R(0)^T = \bar{H}[R(s) \cdot F(s) \cdot R(0)^T] \quad (3.7)$$

이 관계식으로 손쉽게 증명할 수 있는바는, 강체회전(rigid rotation)의 경험법에 없는 단순유체내의 응력은 정압에 불과하다( $T = -p1$ )는 것으로서, 유체란 가위

응력 (shearing stress)을 무한정 버티어 낼 수 없는 물질이라는 통상 개념을 재확인하게 된다.

#### 4. 단순유체의 점도계적 흐름

유체의 속도분포가 어느 직교좌표상에서 아래와 같으면 단순가위흐름 (simple shearing flow)이라 부른다.

$$V_x=0, \quad V_y=\kappa x, \quad V_z=0, \quad (4.1)$$

단,  $\kappa$ 는 상수로서 가위변형을 또는 가위율이라 부른다. 이 경우에는 상대 변형기울기의 이력 (식(2.3))이 다음과 같아야함을 바로 증명할 수 있다.

$$F(s)=1-sM, \quad (4.2)$$

단, 텐서  $M$ 의 행렬은

$$[M]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

식 (2.6)과 (4.2)를 사용하면 단순가위 흐름의 경우에는  $L=M$ 임을 알 수 있다. 점도계적 흐름이란 각 물질점의 상대변형 이력을 틀바꿈하여 (4.2)를 얻을 수 있는 운동으로 정의된다. 물론 이 때에는 텐서  $M$ 이 (4.3)의 형태로 되는 단위직교벡터의 기본셋트  $b_i$ 가 존재해야만 하고 이를 위한 필요충분조건은  $M^2=0$ 임을 증명할 수 있다. 가위율  $\kappa$ 와 벡터셋트  $b_i$ 는 단순가위흐름에서와 같이 일정하지 않고 시간  $t$ 와 자리  $x$ 에 의존한다.

따라서 점도계적 흐름의 이력은

$$F(s)=R(s) \cdot (1-sM), \quad (4.4)$$

$$R(0) \equiv 1, \quad (4.5)$$

로 쓸 수 있고 단순유체의 물성방정식 (3.2)에 이를 대입하면

$$[h(M)] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2(T_{11}-T_{33})-(T_{22}-T_{33}) & T_{21} & 0 \\ T_{12} & 2(T_{22}-T_{33})-(T_{11}-T_{33}) & 0 \\ 0 & 0 & -(T_{11}-T_{33})-(T_{22}-T_{33}) \end{bmatrix}$$

따라서  $T_{12}$ ,  $T_{11}-T_{33}$ ,  $T_{22}-T_{33}$ 을 결정해 주는  $M$ 의 함수 세개만이 남는데 이들이  $M$ 를 식(4.3)의 형태로 만드는 단위직교벡터 셋트에 의존 않는 것은 쉽게 증명되어 결국 가위율  $\kappa$ 만의 함수들로 된다. 따라서 점도계적으로 흐르는 단순유체의 응력을 결정해 주는 물성함수들은

$$T_{12}=\tau(\kappa), \quad (4.11)$$

$$T+p1=\lim_{s \rightarrow 0} H(R(s) \cdot (1-sM)). \quad (4.6)$$

물성불변칙을 적용하기 위해 우선 식(3.7)에 이력 (4.2)와 정의(4.5)를 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} H(1-sM) &= \lim_{s \rightarrow 0} H(R(s) \cdot (1-sM)) \\ &= h(M), \end{aligned} \quad (4.7)$$

단,  $H$ 는 일반함수(functional) 임에 반하여  $h$ 는 보통의 함수(function)다. 이 함수가 받는 제약을 물성불변칙에서 유도하려면 (4.5) 대신에  $R(s)=R(0) \equiv Q$ 로 놓아  $s$ 에 무관한 일정 텐서  $Q$ 를 도입하고 이력 (4.2)를 식(3.7)에 다시 대입하여 다음을 얻는다.

$$Q \cdot h(M) \cdot Q^T = h(Q \cdot M \cdot Q^T). \quad (4.8)$$

이 식은 모든 직교텐서  $Q$ 에 대해 성립하여야 한다. 함수  $h$ 와 같이 식(4.8)을 만족시키는 함수를 등방성함수라 부른다. 즉, 단순유체의 점도계적 흐름의 경우에는 응력  $(T+p1)$ 은  $M$ 의 등방성 함수라는 것이다.

다음에 식(4.8)에

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

을 사용하면  $Q \cdot M \cdot Q^T = M$  이고 따라서

$$Q \cdot T \cdot Q^T = T \quad (4.9)$$

이를 행렬로 표기하면

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & -T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & -T_{23} \\ -T_{31} & -T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

그러므로

$$T_{13}=T_{31}=T_{23}=T_{32}=0. \quad (4.10)$$

응력텐서의 대칭성 ( $T_{12}=T_{21}$ )과 이미 채택한 관례 ( $3p=T_{11}+T_{22}+T_{33}$ )를 고려하면

$$T_{11}-T_{33}=\sigma_1(\kappa), \quad (4.12)$$

$$T_{22}-T_{33}=\sigma_2(\kappa). \quad (4.13)$$

여기서  $\tau$ 를 가위응력함수,  $\sigma_1$ 과  $\sigma_2$ 를 수직응력함수라 부른다. 이들은 물질고유의 것이므로 어느 점도계를 사용하더라도 같은 함수관계가 나와야만 한다.

가위변형율이  $\kappa=0$ 인 경우에는  $M=0$ 이고 이를 물성불변칙 (4.8)에 대입하면

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}(0) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{h}(0)$$

변하지않는 텐서로서 등방성인 것은 1에 비례하는 것 뿐인데  $\mathbf{h}:\mathbf{1}=0$  이므로  $\mathbf{h}(0)=0$  이라는 결론에 도달한다. 즉,

$$\tau(0)=\sigma_1(0)=\sigma_2(0)=0 \quad (4.14)$$

또한, 물성불변칙 (4.8)에

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

을 사용하면  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q}^T = -\mathbf{M}$  이고 따라서

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{h}(-\mathbf{M}). \quad (4.15)$$

이를 행렬로 표기하면 원 쪽 항에서는  $\tau(\kappa)$ 의 부호만 바뀌므로

$$\begin{aligned} \tau(-\kappa) &= -\tau(\kappa), \\ \sigma_1(-\kappa) &= \sigma_1(\kappa), \quad \sigma_2(-\kappa) = \sigma_2(\kappa). \end{aligned} \quad (4.16)$$

즉, 가위응력은 가위율의 홀함수고 수직응력은 짝함수라는 것이다.

점도함수  $\eta$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \eta(\kappa) &\equiv \tau(\kappa)/\kappa, \quad \kappa \neq 0, \\ \eta(0) &\equiv \tau'(0). \end{aligned} \quad (4.17)$$

이밖에  $\eta(\kappa) > 0$  라는 가정을 하는데 이는 흔히 열역학적 논의와 깊은 관계가 있다. 이 가정에 의하면  $\kappa=0$  주위에서 가위응력 함수  $\tau(\kappa)$ 는 항상증가하므로 그 역인 가위율함수  $\lambda$ 가 존재한다.

$$S = \tau(\kappa), \quad \kappa = \tau^{-1}(S) \equiv \lambda(S). \quad (4.18)$$

예를 들어 뉴턴유체의 경우에는

$$\begin{aligned} \tau(\kappa) &= \eta_0 \kappa, \quad \sigma_1(\kappa) = \sigma_2(\kappa) = 0, \\ \eta(\kappa) &= \eta_0, \quad \lambda(S) = S/\eta_0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

## 5. 각종 점도계

지금까지의 관점에 비추어 보면 비압축성 단순유체를 다루는 점도계의 역할은 일차적으로는 세 개의 응력함수를 결정하는 일이고 그 다음으로는 수직응력효과와 같은 독특한 현상들을 관찰하는 일이다. 점도계 내의 속도분포를 계산하려면 식(2.11)에 응력함수를 대입하여 얻은 운동방정식

$$\nabla \cdot [\mathbf{h}(\mathbf{M})] - \nabla(\rho\phi + p) = \rho \mathbf{a} \quad (5.1)$$

을 주어진 경계조건을 써서 풀어야 한다. 여기서는 지나친 혼잡을 피하기 위해 주요 계산결과만 보이고 나서 실제 물질에 대한 관찰과 비교토의키로 한다.

### (1) 모세관 점도계 (Poiseuille flow)

속도분포 :  $v_r=0, v_\theta=0, v_z=u(r).$

경계조건 :  $\begin{cases} u(R)=0, \\ \text{중심축 } (r=0) \text{ 에서 } T \text{ 는 연속적.} \end{cases}$

계산결과 :

$$\begin{aligned} u(r) &= \int_r^R \lambda \left( \frac{1}{2} f W \right) dW, \\ \kappa^* &\equiv -\frac{4Q}{\pi R^3} = -\frac{4}{S^{*3}} \int_0^{S^*} S^2 \lambda(S) dS \equiv \lambda^+(S^*), \quad (5.2) \\ \lambda(S^*) &\equiv -\frac{1}{\pi R^3 f^2} \frac{\partial}{\partial f} (f^3 Q) = \lambda^+(S^*) \left[ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{\partial \ln \lambda^+(S^*)}{\partial \ln S^*} \right], \end{aligned} \quad (5.3)$$

단,  $f$ 는 상수고

$$S^* \equiv \frac{1}{2} f R = -T_{rz}|_{r=R}$$

은 모세관 벽에 작용하는 가위응력이다. 실제 유체에 대하여 모세관 점도계로 측정할 수 있는 것은 겉보기 가위율  $\kappa^*$ 과 겉보기 가위응력  $S^*$ 으로 직접결정 되는 것은 함수  $\lambda^+$ 고, 진짜 물성함수  $\lambda$ 는 공식(5.3)을 사용 환산하여 구해야 된다.

모세관 점도계의 끝에서 유체가 대기중 (일정 기압  $p_0$ )으로 나올 때에 출구의 관벽에 작용하는 수직응력은 표면장력등을 무시하면

$$\begin{aligned} P &\equiv p_0 - (-T_{rr}|_{r=R}) \\ &= \frac{1}{R^2} \int_0^R r \left[ \hat{\sigma}_1 \left( \frac{1}{2} f r \right) - 2 \hat{\sigma}_2 \left( \frac{1}{2} f r \right) \right] dr, \end{aligned} \quad (5.4)$$

단,  $\hat{\sigma}_1(S) \equiv \sigma_1[\lambda(S)]$ 고  $\hat{\sigma}_2$ 도 마찬가지다. Fig. 2.에 보인 바와 같이  $P < 0$  이면 나오는 유체 출구가 부풀 것이고  $P > 0$  이면 오히려 가늘어질 것임이 예측된다. 이런 현상은 폴리에틸렌 산화물의 수용액등에서 흔히 관찰되며 합성섬유를 뽑아낼 적에 특히 중요하다.

뉴턴유체의 경우에는

$$\kappa^* = \lambda(S^*) = \lambda^+(S^*) = S^*/\eta_0, \quad P = 0,$$

이므로  $\lambda$ 와  $\lambda^+$ 간의 차나 수직응력효과나 모두 없어진다. (식 (1.5) 참조)

### (2) 원기둥 점도계 (Couette flow)

속도분포 :  $v_r=0, v_\theta=r\omega(r), v_z=0.$

경계조건 :  $\omega(R_1)=0, \omega(R_2)=\Omega.$

계산결과 :

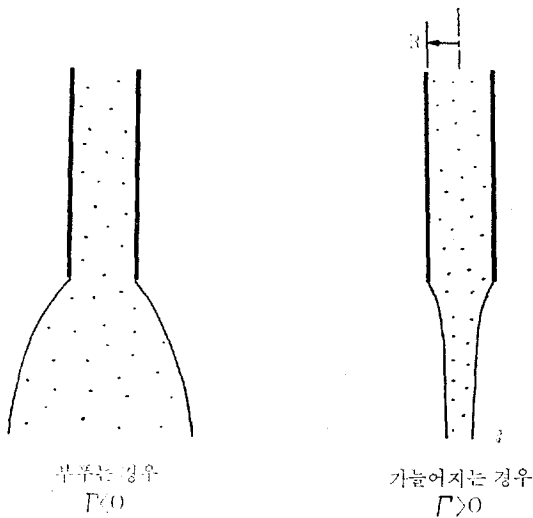


Fig. 2 모세관 점도계 끝에서 나오는 유체 줄기의 모양

$$\omega(r) = \int_{R_1}^r \lambda \left( \frac{M}{2\pi W^2} \right) \frac{dW}{W},$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_{\beta S_1}^{S_1} \lambda(S) \frac{dS}{S}$$

단  $S_1 \equiv M/2\pi R_1^2$  이고  $\beta \equiv R_1^2/R_2^2$ .

$$Y(S_1) \equiv 2M \frac{\partial \Omega}{\partial M} = \lambda(S_1) - \lambda(\beta S_1), \quad (5.5)$$

이로부터 귀납법에 의하여

$$\kappa_1 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} Y(\beta^n S_1) = \lambda(S_1). \quad (5.6)$$

따라서 각속도  $\Omega$ 와 단위높이당 소요되는 토크  $M$ 을 측정함으로써 원칙적으로 물성함수  $\lambda$ 를 결정할 수 있다.

식(1.5)에서 논의하였던 수직응력효과의 계산은

$$\Delta T_{rr} = \int_{R_1}^{R_2} \left[ \hat{\sigma}_2 \left( \frac{M}{2\pi r^2} \right) - \hat{\sigma}_1 \left( \frac{M}{2\pi r^2} \right) - \rho r^2 \omega(r)^2 \right] \frac{dr}{r}, \quad (5.7)$$

따라서 Fig. 1의 아랫편에 보인 바와 같이 바깥쪽 벽의 수직응력이 더 크거나 ( $\Delta T_{rr} < 0$ ) 안쪽 벽이 더 크거나 ( $\Delta T_{rr} > 0$ )의 두 가지 가능성이 있다.

원기둥간의 간격이 아주 좁을 때에는 위의 공식들이 아래와 같이 간단해진다.

$$\left\| \frac{\Omega}{\Delta T_{rr}} \right\| = \frac{R_2 - R_1}{R_1} \left\| \frac{\lambda(S_1)}{\hat{\sigma}_2(S_1) - \hat{\sigma}_1(S_1)} \right\| + O \left[ \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right)^2 \right], \quad (5.8)$$

원기둥 점도계의 윗 면이 대기중(일정 기압  $p_0$ )에 노출되어 있을 때에 중력과 계면현상등을 무시하면

$$A \equiv \frac{\partial}{\partial r} [p_0 - (-T_{zz})]$$

$$= -\rho r \omega(r)^2 + \frac{1}{r} \left[ \hat{\sigma}_2 \left( \frac{M}{2\pi r^2} \right) - \hat{\sigma}_1 \left( \frac{M}{2\pi r^2} \right) \right]$$

$$+ \frac{M}{\pi r^3} \hat{\sigma}_1' \left( \frac{M}{2\pi r^2} \right), \quad (5.9)$$

즉 Fig. 3에 보인 바와 같이 유체 윗 면이 안쪽 벽을 따라 기어 내리는 경향일수도 ( $A < 0$ ) 있고 반대로 기어 오르는 경향일 수도 ( $A > 0$ ) 있다.

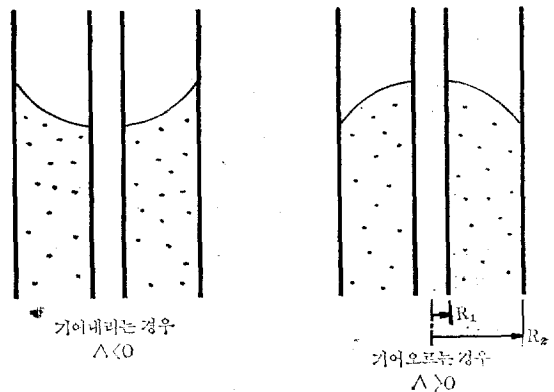


Fig. 3. 원기둥 점도계에 든 유체 윗 면의 모양

이들 수직응력효과는 폴리이소부틸렌 용액등의 다양한 물질에서 관찰되며 특히 표면이 중심 벽을 따라 기어 오르는 현상은 교반기 설계등에 큰 영향을 끼친다.

뉴턴유체의 경우에는 식(1.4)-(1.5) 참조)

$$\kappa_1 = \frac{2\Omega}{1-\beta} = \lambda(S_1) = \frac{S_1}{\eta_0},$$

$$\Delta T_{rr} < 0, \quad A < 0,$$

따라서 원기둥 점도계내의 뉴턴유체는 Fig. 1과 Fig. 3의 원편과 같은 모양을 나타낸다.

### (3) 원뿔 점도계 (Cone and plate flow)

원뿔점도계는 Fig. 4에 보인 것과 같이 중심축이 일치하는 원뿔과 원판 사이에 유체를 넣고 한 쪽은 일정한 각속도  $\Omega$ 로 돌리며 다른 쪽은 움직이지 않도록 유지하는데 소요되는 토크  $M$ 과 축방향의 수직력  $N$ 을 측정하도록 되어 있다. 이를 위한 계산에는 관성을 무시하는 것과 원뿔·원판 사이의 각도  $\alpha$  (Fig. 4 참조)가 극히 작다는 가정이 필요하다.

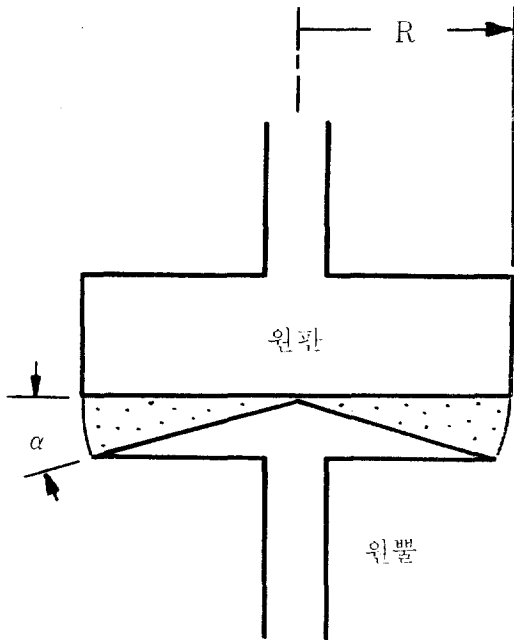


Fig. 4. 원뿔 점도계

속도분포 :  $v_r=0, v_\theta=0, v_\phi=r \sin \theta \omega(\theta)$ .

경계조건 :  $\omega\left(\frac{1}{2}\pi\right)=0, \quad \omega\left(\frac{1}{2}\pi-\alpha\right)=\Omega,$

$$T_{rr}|_{r=R}=-p_0.$$

계산결과 :  $\kappa=\Omega/\alpha,$

$$M=\frac{2}{3}\pi R^3 \tau(\kappa), \quad (5.10)$$

$$n \equiv \frac{N}{\pi R^2} + p_0 = \frac{1}{2}(\sigma_1(\kappa) - \sigma_2(\kappa)), \quad (5.11)$$

$$p_0 - (-T_{\theta\theta}) = \sigma_1(\kappa) - \ln\left(\frac{R}{r}\right)(\sigma_1(\kappa) + \sigma_2(\kappa)). \quad (5.12)$$

따라서 측정치  $\Omega, M, N$ 으로부터 물성함수  $\tau$ 와  $\sigma_1 - \sigma_2$ 를 바로 구할수 있다. 공식(5.12)에 보인 것은 원판에 수직으로 작용하는 응력으로서, 중심으로부터의 위치  $r$ 에 의존하는 관계를 실험적으로 결정하려면 원판에 작은 구멍들을 뚫고 모세관을 하나씩 꽂아 올라 오는 액면 높이의 분포를 기록하면 된다. 실제로 폴리에틸렌 산화물의 수용액등에서 식(5.12)의 예측과 같은 대수적 분포가 확인되었고 그로부터 함수  $\sigma_1 + \sigma_2$ 를 계산해낼 수 있었다. 그러므로, 원칙적으로는 원뿔 점도계의 사용으로 단순유체의 세 응력함수를 모두 결정할 수 있는 것이다.

#### (4) 원판 점도계(torsional flow)

원판점도계는 여러가지 면에서 원뿔 점도계에 가까우므로 설명의 중복을 피한다. 이를 위한 계산에도 역시 관성을 무시하지 않으면 안된다. (Fig.5 참조)

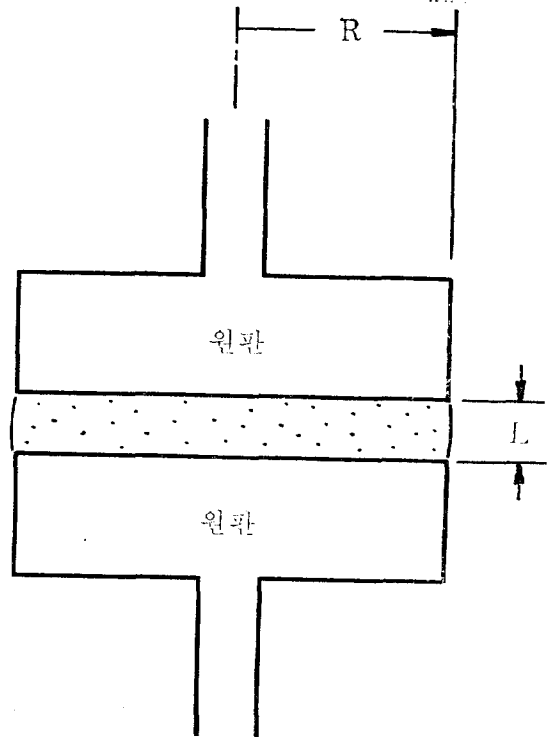


Fig. 5 원판 점도계

속도분포 :  $v_r=0, v_\theta=r\omega(z), v_z=0.$

경계조건 :  $\omega(0)=0, \quad \omega(L)=\Omega,$

$$T_{rr}|_{r=R}=-p_0.$$

계산결과 :  $\kappa=\frac{r}{L}\Omega, \quad \omega(z)=\frac{z}{L}\Omega,$

$$S^+ \equiv \frac{2M}{\pi R^3} = \frac{4}{\kappa^{*3}} \int_0^{\kappa^*} \kappa^2 \tau(\kappa) d\kappa, \quad (5.13)$$

$$\tau(\kappa^*) = S^+ \left[ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{\partial \ln S^+(\kappa^*)}{\partial \ln \kappa^*} \right], \quad (5.14)$$

단,  $\kappa^* \equiv R\Omega/L$ 은 겔보기 가위율. 따라서 직접 결정되는 겔보기 함수  $S^+(\kappa^*)$ 로부터 공식(5.14)에 의하여 물성함수  $\tau$ 를 계산해야 한다.

수직응력효과에 대한 아래의 계산결과와는 원뿔 점도계의 경우와 마찬가지로 방법으로 활용된다.

$$2\sigma_1(\kappa^*) - \sigma_2(\kappa^*) = n \left[ 2 + \frac{\partial \ln n(\kappa^*)}{\partial \ln \kappa^*} \right], \quad (5.15)$$

$$p_0 - (-T_{zz}) = \sigma_1(\kappa) - \int^{\kappa*} \sigma_2(W) \frac{dW}{W}, \quad (5.16)$$

단,  $n$ 의 정의는 식(5.11)에서와 같다.

지금까지 다른 점도계들이 가장 대표적인 것이기는 하나 이 밖에도 몇 가지 다른 종류들이 간혹 쓰여진다. 가장 고부적인 사실은 윤활유, 고부진, 각종 고분자 액체 및 용액등의 광범위한 물질들에 대하여 여러 다른 점도계로 결정된 응력함수들이 서로 일치하는 것이다. 따라서 이들을 비압축성 단순유체로 간주하는 데에 별로움이 없다.

점도계사용시의 기술적 문제점은 무수히 많으나 가장 중요한 몇 가지만 생각해 보면 다음과 같다. 첫째로 이론식에서 가정하는 것과 같은 정상상태, 이상적 경계조건등은 실제와는 거리가 있는 것이 보통이다. 따라서 초기효과(시간적 제약), 말단효과(공간적 제약) 등의 충분한 이해가 필요하다. 흔히 가정하는 경계조건 중에 유체가 점도계의 벽에 항상 붙어 움직인다는 것이 있는데 극히 희박한 필드의 기체나 농도가 높은 고분자 용액등의 경우에는 미끄러지기도 하는 것이 알려져 있으나 대부분 액체의 경우에는 이 가정이 별로 틀리지 않는 것으로 보인다. 둘째로 점도계내 유체의 운동으로 인하여 단위부피, 단위시간당

$$T:D = \kappa \tau(\kappa) = \kappa^2 \eta(\kappa) > 0$$

의 열이 발생하여 온도를 높여 주는데 점도는 온도에 아주 예민하므로 이를 어떻게 조절하느냐에 따라 실험 오차의 범위가 크게 좌우된다. 셋째로 점도를 측정하려는 샘플의 문제인데 순도, 균일성, 이력 등이 미치는 영향이 큰 것이 보통이다. 점도계운전중의 고분자 액체의 저급화, 샘플의 산화, 점도계 벽으로의 일부 성분의 흡착등도 그 원인이 된다. 어느 경우건 실험자가 취급하는 물질에 충분히 익숙해짐으로서 샘플링 방법이나 실험방법의 특성이 아닌, 물질 고유의 대표적 특성을 측정할 수 있도록 노력해야 한다.

## 노 트

텐서 표현을 간략히 하기 위하여 Gibbs 식의 기호를 사용하였고 각종 텐서성분간의 구분은 명시하지 않았다. §4에 나오는  $M$ 과  $T$ 의 행렬은 각각

$$[M] = (b_i \cdot M \cdot b_j), \quad [T] = (b_i \cdot T \cdot b_j)$$

을, 그리고  $b_i$ 의  $i$ 와 그 외의  $T_{rr}$ ,  $v_\theta$  등속은 모두 물리적 성분을 나타낸다.

좌표는 통상의 직교좌표  $(x, y, z)$ , 원주좌표  $(r, \theta, z)$ ,

구좌표  $(r, \theta, \phi)$  등을 사용하였다.

아래의 문헌 1은 본강좌의 교재므로 보다 상세한 내용과 참고문헌의 출처는 여기서 찾아 보기 바란다. 문헌 2는 유동학 이론의 발전에 결정적 기여를 한 논문들을 모아 놓은 것이고 문헌 3은 이들을 체계화한 저술이다. 연속체 역학의 제일 가는 교재로는 문헌 4를, 텐서의 기초와 유체역학의 교재로는 문헌 5를 각각 추천한다. 유동학의 연구대상이 되는 각종 현상들을 풍부한 경험으로 주의깊게 토의한 것은 문헌 6, 7이다. 유동학의 최근 응용예들은 문헌 8에서 찾을 수 있고 열역학측으로의 연장에 대하여 국내에서 손쉽게 찾아 볼 수 있는 자료는 문헌 9다.

## 문 헌

1. B. D. Coleman, H. Markovitz & W. Noll, "Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids," Springer, Berlin, 1966.
2. C. Truesdell (ed.), "Continuum Mechanics. II. The Rational Mechanics of Materials," Gordon & Breach, New York, 1965.
3. C. Truesdell & W. Noll, "Handbuch der Physik (S. Flügge, ed.). III/3. The Non-Linear Field Theories of Mechanics," Springer, Berlin, 1965.
4. C. Truesdell & R. A. Toupin, "Handbuch der Physik (S. Flügge, ed.). III/1. Principle of Classical Mechanics and Field Theory," Springer, Berlin, 1960.
5. R. Aris, "Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1962.
6. A. G. Fredrickson, "Principles and Applications of Rheology," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.
7. F. R. Eirich (ed.), "Rheology. Volumes 1-4," Academic Press, New York, 1967.
8. C. D. Han, "On Slit and Capillary-Die Rheometry," Trans. Soc. Rheol. 18, 163-190 (1974).
9. 윤창구, "혼합물의 열역학(제 1보). 이상기체," 대한화학회지 17, 324-331 (1973).