

報 文
 화 학 공 학 제13권 제1호
HWAHAK KONGHAK
 J. of the KOREAN INST. CHEM. ENGRS.
 Vol. 13, No. 1, February 1975

脈動系內에 物質傳達이 있을때의 無次元群

李 源 國

韓 國 科 學 院

(접수 1974. 11. 1)

Dimensionless Groups in Vibrating Systems accompanying Mass Transfer

Won Kook Lee

Korea Advanced Institute of Science, Seoul 131, Korea

(Received November 1, 1974)

요 약

振動, 脈流 및 音波作用 등의 脈動을 工程內에 導入하여 物質傳達率을 增進시키려고 할때의 系內의 特性을 分析하기 위하여 考慮해야 할 主要한 無次元數에 對해서 考察하였다. 脈動系內에서 物質傳達現象이 일어날 때는 系全體가 亂流가 아닐 때도 極部的으로 振動物體의 境界近處에서 亂擴散이 일어남을 推論할 수 있으며, 이때의 亂擴散係數는 a^2f 에 比例하고, 振動物體의 狀態가 單一 vibrational mode 일때는 a^2f/vD 가 重要하며, combined mode 일때는 afD/ν 가, 또 crowded bubble system에서는 $\rho(af)^2l/\sigma$ 가 重要함을 次元解析과 實驗結果에서 確認하였다.

Abstract

Important dimensionless groups were investigated to find basic experimental correlations in vibrating systems. When mass transfer occurred in the system, it was deduced that eddy diffusion took place locally near the vibrating bodies without having turbulent flow in the whole system. The eddy diffusivity in the system turned out to be proportional to the factor, a^2f . For a system in a single vibrational mode, a^2f/vD was a very important dimensionless group. For a combined vibrational mode system, $\rho afD/\mu$, and for a crowded bubble system $\rho(af)^2l/\sigma$ became important. These conclusions were confirmed both by dimensional analysis and by experimental results.

1. 緒 論

物質傳達速度를 增進시키기 위하여 化學工程系內에 振動¹⁾ 脈流²⁾, 또는 音波^{3,4)} 등을 導入하여 考察한 事例은 많다. 그러나 物質傳達速度의 增加의 原因에 對해서는 아직 適切한 解明이 되어있지 않다. 本研究에서는 이 原因의 究明을 試圖함과 同時에, 一般적으로 이런 振動系에서 重點의 考慮해야할 無次元群에 對해서 考察해 보았다.

振動系에서 振幅과 振動數가 큰影響을 줌은 잘 알려져 있으며, 또 振動體를 考察할 때에는 振動 mode를 觀察해야하며, 振動體相互間의 影響을 알기 위해서는 振動體間의 距離가 重要な 要素가 될을 알수 있다.

따라서 우선 振動系內에서의 振動速度를 究明하고, 이 速度가 亂擴散係數에 미치는 影響을 推論하여 系內에서 일어나는 全體의인 現象을 考察하고자 한다.

2. 理論의 考察

(1) 振動速度: 振動系內에서의 平均振動速度는 bubble 일 경우 Jackisch³⁾ 및 Lee⁴⁾의 bubble 表面의 velocity equation에서 쉽게 얻어진다.

$$v_r = a_n w_n \left(\frac{R_0}{r} \right)^{n+2} P_n' \cdot \cos w_n t \quad (1)$$

$$v_\theta = \frac{a_n w_n}{n+1} \left(\frac{R_0}{r} \right)^{n+2} P_n' \cdot \cos w_n t \quad (2)$$

이 式들에서 time average는 maximum vibration point에서

$$\bar{v}_r|_{r=R_0} = a_n w_n P_n'(\cos w_n t)_{av} \quad (3)$$

여기서 maximum vibration point에서 $p_n=1$ 임으로

$$\bar{v}_r|_{r=R_0} = a_n \cdot 2\pi f_n \cdot (2/\pi) = 4a_n f_n \quad (4)$$

即 af 의 四倍이며, 또

$$\begin{aligned} \bar{v}_\theta|_{r=R_0} &= \frac{a_n w_n}{n+1} P_n'(\cos w_n t)_{av} \\ &= \frac{a_n 2\pi f_n}{n+1} \left(\frac{2}{\pi} \right) = \frac{4a_n f_n}{n+1} \end{aligned} \quad (5)$$

即 af 의 $4/(n+1)$ 배이다. 따라서 mode n 가 커질수록 \bar{v}_θ 는 \bar{v}_r 에 비해서 無視될 수 있을 정도로 작아짐을 알 수 있다.

또 이 式들에서 振動體의 表面速度가 af 에 比例함으로 無次元數中의 速度項을 振動系에서는 af 로 代置한

수 있음을 알게 된다.

(2) 振動擴散係數: Jackisch³⁾는 vibrational diffusivity가

$$\mathcal{D}_{vib} \simeq a^2 f$$

라고主張했다. 그러나 Lee⁴⁾의 계산 및 實驗結果에 依하면 이는 約 1000 배가량이나 큰 값을 나타내고 있다. 그래서 이때의 diffusivity는 振動體로 因한 境界近處에서의 local turbulence 때문에 생기는 eddy diffusion 일 것이라는 假定下에 Hinze⁵⁾의 turbulent theory를 導入하여 誘導하면⁴⁾

$$\mathcal{D}_{vib} = \left(\frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{a_n w_n}{n+1} \right)^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n'(\cos\theta) \int_0^T \frac{v(t) \cdot v(t+\tau)}{v(t)^2} d\tau d\theta \quad (6)$$

이 된다. $a^2 f$ 와 \mathcal{D}_{vib} 와의 關係를 computer로 연관시킨 結果는

$$\mathcal{D}_{vib} \simeq \frac{a^2 f}{760} \quad (7)$$

이 結果는 前記의 測定結果와 잘 一致한다. 이를 逆으로 생각할때 $a_n w_n$ 는 $4\pi af$ 임으로 (6)식의 마지막項인 Lagrangian correlation coefficient의 積分值

$J_L = \int_0^T \frac{v(t) \cdot v(t+\tau)}{v(t)^2} d\tau$ 는 振動系에서는 f 에 逆比例함을 알수있다. 따라서 振動系의 無次元群中의 diffusivity는 $a^2 f$ 로 代置할수 있음을 알게 된다.

(3) 次元解析: 一般의 convective diffusion은

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})c = \mathcal{D} \nabla^2 c \quad (8)$$

로 表示되며, 이를 dimensional form로 바꿔쓰면

$$\left[\frac{c}{t} \right] + \left[\frac{vc}{L} \right] = \left[\frac{\mathcal{D}c}{L^2} \right] \quad (9)$$

이다. 첫項과 둘째項은 $v=L/t$ 임을 생각할때 dimension이 同一함으로 둘째項으로 右側項을 나누면

$$\phi_1 \left(\frac{\mathcal{D}}{vL} \right) = \text{const.} \quad (10)$$

또 vibrational system內에서는 \mathcal{D} 는 \mathcal{D}_{vib} 임으로 이를 代置하면

$$\phi_2 \left(\frac{\mathcal{D}_{vib}}{vL} \right) = \text{const.} \quad (11)$$

또는

$$\phi_3 \left(\frac{a^2 f}{vD} \right) = \text{const.} \quad (12)$$

即 vibrational Peclet number 라고 부를수있는 a^2f/vD 가 重要한 dimensionless group 임을 알수 있다.

또 振動體 自體를 생각할때는 mode n 이 重要하며,³⁾ 또 振動體 相互影響을 생각할때는 相互距離 및 表面張力이 影響을 줄것임으로 vibrational Weber number 라고 부를수 있는 $\rho(af)^2l/\sigma$ 이 重要한 것임을 알수있다. 따라서 完全한 dimensionless form 은

$$\phi\left(\frac{a^2f}{vD}, n, \frac{\rho(af)^2l}{\sigma}\right) = \text{const.} \quad (13)$$

이다.

3. 實驗裝置 및 方法

Vibrating system 에서의 物質傳達速度의 增加를 測定하기 위해서 Fig. 1 과 같은 裝置를 利用하였다.

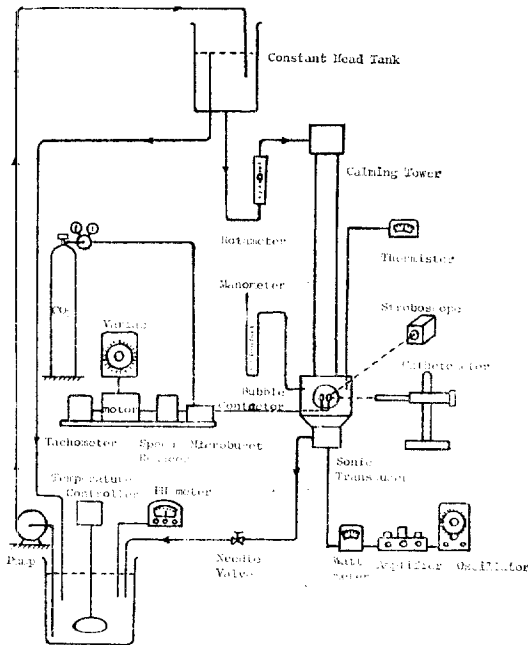


Fig. 1. Schematic diagram of experimental apparatus

水槽內에는 溫度調節裝置와 pH meter 가 붙어있어 온도와 pH 가 恒常 임어지고 있으며, 調節된 물은 pump 로서 constant head tank 로 보내지고 여기서 rotameter 및 calming tower 를 지나서 bubble contactor 를 통하여 水槽로 되돌아간다. CO₂ gas 가 tank 에서 壓力調整器를 통하여 microburet 속에 들어가고, 이는 또 motor 에 依해서 tubing 을 통하여 contactor 내에

있는 bubble tip 로 나가 그끝에서 CO₂ 의 bubble 을 만든다. Bubble 의 크기와 振幅은 stroboscope 와 cathetometer 에 依해서 測定하고, bubble 은 sonic transducer 에 依해서 振動되며, 그 振動數와 振幅은 oscillator 와 amplifier 에 依해서 調整된다.

三個의 bubble tip 을 正三角形을 이루도록 配置하였으며, tip 은 거리를 서로 任意로 調整할 수 있게 하였다. Bubble 의 必要한 數에 따라 tip 을 하나, 둘, 또는 셋을 利用하여 同時에 만들고 거리를 調整하면서 觀察하였다. 물질전달된 總量은 bubble 의 크기를 cathetometer 로 觀察하여 一定하게 調整하고 一定時間동안의 microburet 를 통하여 tip 으로 읊아간 gas 의 量으로 定하였으며, bubble 이 振動하였을때와 진동하지 않았을때의 總量의 差를 振動으로 因한 傳達率의 增加로 하였다. 振幅은 stroboscope 로서 振動모양을 천천히 볼수 있도록하여 cathetometer 로서 읽었다. 또 振動數는 bubble 이 共鳴振動을 일으킬때의 stroboscope 의 frame 數와 oscillator 의 振動數로서 읽었다.

4. 實驗結果

Bubble 의 數에따르는 物質傳達速度의 增加를 測定한 結果는 Fig. 2 와 같다.

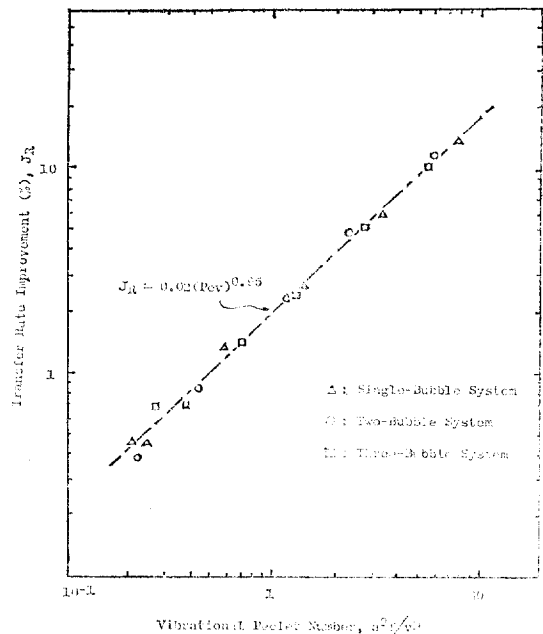


Fig. 2. Plot of mass transfer rate improvement versus vibrational Peclet number.

위의 結果에서 보는바와같이 全般的으로 data들이 系內的 全體의 bubble數는 bubble間의 거리가 어느程度以上으로 維持될때는 物質傳達速度的 増加에 影響을 주지않는것을 나타내고 있다. 卽 bubble가 한개때나, 두개, 세개때나 別差가 없이 거의 一致함은 이를 말해 주고있다. 그리고 傳達速度增加는 single bubble때와 마찬가지로 vibrational Peclet number와 vibrational mode의 函數로 表示되어 그結果式은

$$J = 0.02Pe_v^{0.95}n^{1.4} \quad (14)$$

으로 表示되었다. 이때 勿論 모든 bubble은 한 實驗 set에서는 같은 크기, 그리고 같은 振動數로서 振動시켰다.

그러나 위의 (14)식은 bubble間의 거리가 짧아짐에 따라서 그대로 유지되지 않고 점차 增加率이 줄어드는 경향을 보였다. 그래서 이 (14)식의 適用範圍를 決定하기 위해서 거리와 增加率間의 關係를 測定한 結果는 Fig. 3과 같다.

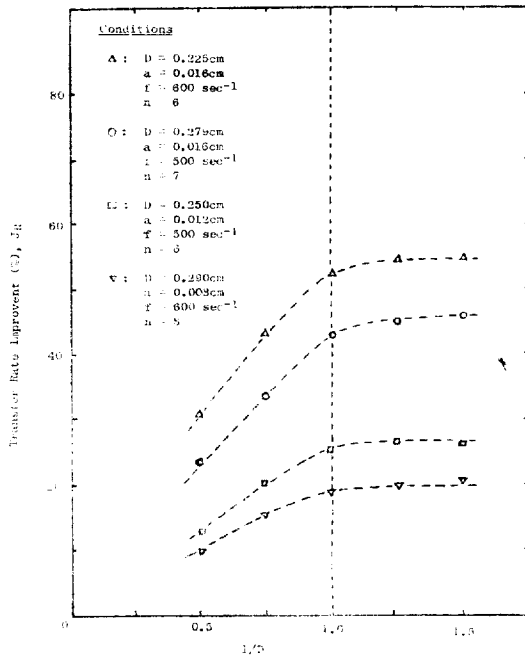


Fig. 3. Plot of mass transfer rate improvement versus bubble distance for various bubble size.

이 結果에서 뚜렷이 나타나는 바와같이 bubble이 $l/D > 1$ 일때는 振動物體間의 거리가 移動率增加에 거의 影響을 주지않았으나 $l/D < 1$ 일때는 거리가 작아짐

에 따라 그 영향이 점차 커짐을 알 수 있으며, 이를 vibrational weber number와 關聯시키면 Fig. 4와 같다.

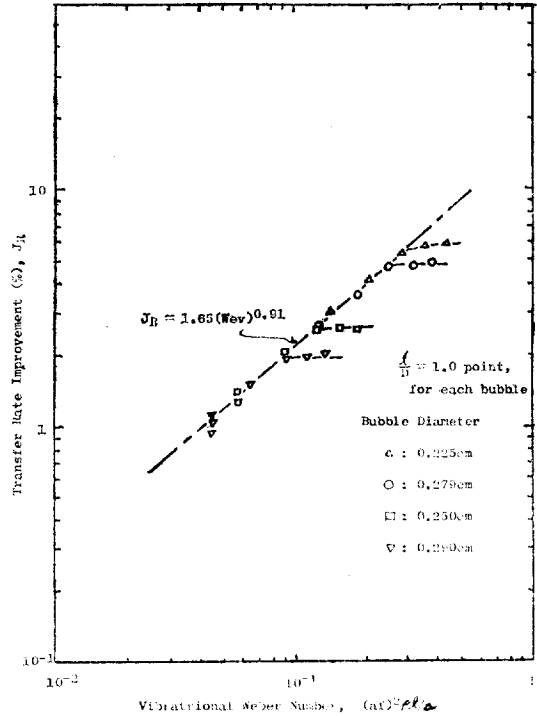


Fig. 4. Plot of mass transfer rate improvement versus vibrational Weber number.

이 Correlation의 實驗式은

$$J_R = 1.65 (We_v)^{0.91} \quad \text{for } l/D < 1 \quad (15)$$

으로 나타났으며 이때 vibration Weber number가 重要な factor임을 알수 있다.

5. 結果의 考察

Lamb equation⁶⁾

$$f_n = \frac{1}{2\pi R_0} \left[\frac{(n^2 - 1)(n + 1)\sigma}{\rho_0 R_0} \right]^{1/2} \quad (16)$$

을 考察할때 n 이 커짐에 따라

$$f_n \propto n^{3/2} \quad \text{또는} \quad n \propto (f_n)^{2/3}$$

의 關係가 있음을 알수 있고, 이結果를 (14)식에 代入하면

$$J \propto (a^2 f)^{0.95} [(f)^{2/3}]^{1.4} \approx (a^2 f)^{0.95} (f)^{0.95} \quad (17)$$

또는

이 결과를 考察할 때 增加率 J 는 vibrational mode n 이 여러가지로 복합된 mode 일 때는 af 卽 vibrational velocity에 영향을 받는다는 것을 알 수 있다. 이는 이제까지의 여러 研究者들이 增加率은 各自의 實驗結果에 따라 a 에 더 큰 영향을 받는다고 主張한 사람들⁷⁾과 a 나 f 에 같은 영향을 받는다고 主張한 사람들^{8,9)}의 異論을 解消시켜 준다. 卽 振動體가 Single mode 일 때는 a 가 더 큰 영향을 주며, combined mode 일 때는 a 와 f 가 같은 영향을 준다는 것이다.

그래서 J 를 af 와 연관을 시켜 보면 $(af)^{1.95}$ 에 比例하게 되며 이指數 1.95는 Lemlich 등^{8,9)}의 2.13과 比較的 잘 一致한다. 이結果는 또 이런 Combined mode의 vibrational system에서는 vibrational Peclet number 보다는 vibrational Reynolds number afD/ν 의 函數임을 알려 주며, data의 correlation에서

$$J = 252.3 (Re_v)^{1.95} \quad (18)$$

임을 나타내었다.

6. 結 論

以上的 結果에서 다음과 같은 結論을 내릴 수 있다.

- 1) 振動系에서는 $Pe_v = a^2 f / \nu D$, $Re_v = D(af)\rho/\mu$ 및 $We_v = \rho(af)^2 l / \sigma$ 가 重要な 無次元群이다.
- 2) 單一 振動 mode로서 振動體가 振動할 때는 Pe_v 가 重要하여

$$J_R = 0.02 (Pe_v)^{0.95}$$

로 表示된다.

- 3) 複合 振動 mode로서 振動할 때는 Re_v 가 重要하여

$$J = 252.0 (Re_v)^{1.95}$$

로 表示된다.

- 4) Crowded bubble system에서는 $l/D > 1$ 일 때는 振動體間의 距離는 物質傳達增加率에는 無關하나, $l/D < 1$ 일 때는

$$J_R = 1.65 (We_v)^{0.91}$$

로 表示된다.

Nomenclature

- a amplitude, cm.
 c concentration, gm-mole/cm³
 D bubble diameter, cm
 \mathcal{D} diffusivity, cm²/sec.

- f frequency, sec⁻¹
 J mass transfer rate improvement, $N_v/N_0 - 1$
 J_R $J/n^{1.4}$
 l distance between bubbles, cm.
 n vibrational mode.
 N mass transfer rate, gm/sec. —cm²
 Pe_v vibrational Peclet number, $a^2 f / \nu D$
 P_n n-th order Legendre polynomial
 P_n' $\sin\theta \frac{dP_n}{d(\cos\theta)}$
 r bubble radius, cm
 R_0 bubble radius at equilibrium, cm.
 Re_v vibrational Reynolds number, $D(af)\rho/\mu$
 t time, sec
 v velocity, cm/sec
 We_v vibrational weber number, $\rho(af)^2 l / \sigma$
 α fluctuation velocity coefficient
 ρ density, gm/cm³
 ν kinematic viscosity, cm²/sec.
 σ surface tension, g/sec²
 ω angular frequency, rad/sec.

Subscripts

- r, θ r -, θ -component
 vib vibration
 n n-th mode

References

1. G. L. Constan and W. Y. Chon, *Chem. Eng. Progr. Symp. Ser.* No 77, **66**(1967), 44.
2. F. J. M. Horn and K. L. Kipp, Jr., *Chem. Eng. Sci.* **22**(1967), 1879.
3. D. A. Jackisch, Ph. D. Thesis, University of Minnesota, Minneapolis, Minn., 1964.
4. W. K. Lee, Ph. D. Thesis, University of Missouri; Columbia, Mo., 1971.
5. J. O. Hinze, "Turbulence", McGraw-Hill, N. Y., 1959.
6. H. Lamb, "Hydrodynamics," 6th ed., Dover Paperback, N. Y., 1945.
7. D. I. R. Low and J. W. Hodgins, *Can. J. of Chem. Eng.* **41**(1963), 241.
8. R. Lemlich, *Ind. Eng. Chem.* **47**(1955), 1175.
9. R. Lemlich and M. R. Levy, *AIChE J.* **7**(1961), 240.

