

수직관내에서의 기-액 2상의 흐름

이 태 희

연세대학교 이공대학 화학공학과

Vertical Gas-Liquid Two-Phase Flow

Tae Hee Lee

Department of Chemical Engineering, College of Engineering
Yonsei University, Seoul 120, Korea

Abstract

Vertical gas-liquid two-phase flow was discussed with an intensive review on flow patterns, gas holdups and various bubble velocities. Particularly so-called flow pattern models were reviewed in relating the average gas holdup to the average bubble velocity.

1. 서 론

액체에 기포가 섞이어 흐르는 현상은 공학자들이 많이 다루어온 문제이다. 경우에 따라서는 이러한 2상계의 흐름이 바람직하지 않지만 대부분의 경우에는 이것의 특수한 이점 때문에 고의적으로 기-액 2상의 흐름을 발생시키고 있다. Gas lift, 부유선광, 액체의 교반 및 혼합, 물질전달을 위한 기체와 액체의 접촉, 증발 및 증류, 수증기의 발생 및 냉동 등은 모두 기-액 2상흐름을 수반하는 조작들이다. 근래에 와서 이 방면의 연구가 특히 관심을 끌게 된 것은, 로켓트용 액체 연료 탱크 내에서 생기는 문제⁷³⁾, 강한 교반 효과를 갖는 이 2상계의 높은 열 전달계수가 핵반응기에서 열의 제거에 필요하다는 점⁵²⁾, 또한 공해물질의 제거에 이 기-액 2상계의 흐름이 효과적으로 이용된다는 점 등 때문이다.

공학자들이 수직관에서의 기-액 혼합물의 일반적 문제를 처음으로 다루게 된 것은 18세기 후반 air-lift 펌

프의 발명에서 부터일 것이다. 그후 한 동안은 특기할 만한 진전이 없다가 1920년대 후반기에 와서 gas-lift의 원리가 원유생산에 응용되자 많은 연구자^{4, 6, 30, 39, 50, 65, 69, 78, 96, 107, 115, 136, 139, 143, 149)}들이 수직관 내에서의 기-액 혼합물의 동태를 다방면으로 연구하기 시작하였다. 현재 이 분야에 관한 문헌은 상당히 많다. Gouse⁵²⁾는 일반적인 기-액 2상계의 흐름에 관한 문헌을 5000종 이상 수집하여 목록을 작성하였으며, Brodkey²²⁾는 그의 저서의 3분의 1 이상을 다상계 현상에 관하여 논의하면서 수많은 문헌을 소개하였다. Wallis¹⁴⁷⁾는 이 문제에 관한 여러가지 해석적 방법을 소개하고, 소위 drift-flux model¹⁵³⁾과 one-dimensional wave theory¹⁴⁷⁾를 강조하고 있다. 최근 Govier와 Aziz⁵³⁾도 역시 이 분야에 관한 단행본을 펴낸 바 있다.

기-액 2상의 흐름은 단일상의 흐름보다 상당히 복잡한데, 이것은 새로운 상의 추가로 인하여 변수가 더 첨가 될 뿐만 아니라, 2상의 경우 흐름의 모양이 여러 가지로 나타나기 때문이다. 기-액 2상계의 흐름의 형태는 단일상에서처럼 단순히 증류나 난류로 설명

할 수는 없고, 주로 void의 분포에 의하여 구분한다. 탑 내에서의 void fraction 혹은 gas holdup은 2상간의 상대속도 때문에, 탑으로 들어오거나 나가는 2상의 조성비와는 같지 않다. 만일 여기에 열이나 물질의 전달이 수반되면 더한층 흐름의 양상은 복잡해 진다.

2. 흐름의 형태

수직관내에서의 기-액 2상의 흐름의 형태를 관찰하기 위한 실험은 주로 저압의 공기-물 계에 관하여 직경이 2 inch 미만인 관에서 행하였다.

흐름 형태의 이름과 설명은 보고자^{13, 27, 31, 47, 51, 54, 98})들에 따라 다르지만, 그 중에서 Nicklin과 Davidson¹¹²⁾은 다음과 같이 다섯가지 형태로 구분하였다.

The division between neighboring flow regimes is not sharply defined, and this has resulted in confusion as to both the number of flow patterns, and the features which characterize each one

(1) In bubble flow, the bubbles are small in comparison with the tube diameter, and the shape of the individual bubbles is not appreciably influenced by the presence of the tube walls.

(2) Slug flow is characterized by large bubbles or 'slugs' which nearly fill the tube and have a round nose and flat bottom. The length of the slugs may vary from less than one tube diameter to hundreds of tube diameters. The individual slugs maintain their identity as they move up the tube, and so measurement of the velocity of slugs is not difficult.

(3) At any instant, semi-annular flow is similar in appearance to slug flow in that there are alternate liquid pistons and gas slugs. However, these do not maintain their identity as they move up the tube. The liquid filled regions of the tube continually build up and break down, with much to-and-fro motion. Measurement of the slug velocity is difficult because of the transient existence of any particular slug, and the gas slugs no longer have the characteristic round nose which is a feature of the slug flow.

(4) In annular flow the liquid no longer bridges the tube, and the fast-moving gas flows up a central core, surrounded by an annulus of liquid which is dragged

up the walls of the tube by the air. The interface is at first very wavy, but the waves do not have sufficient amplitude to bridge the tube.

(5) The final transition-from annular flow to mist flow is a gradual process which takes place while more and more of the water is carried up as droplets by the increasing air-flow.

Classifications by previous authors have included sometimes more, and sometimes fewer patterns. There are conflicting views regarding the transition from slug flow to annular flow, and the intermediate flow regime has been variously named as churn, froth, wave-entrainment, dispersed plug, etc

Fig. 1은 기체의 유속이 커짐에 따라 나타나는 각 흐름의 형태를 간단히 보인 것이다.

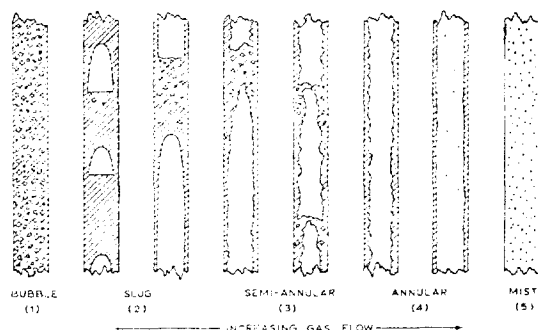


Fig. 1. Two-phase flow patterns in vertical tubes with small upflow of liquid. (From Nicklin and Davidson¹¹²⁾)

Govier 등^{24, 25, 54, 55, 56})은 공기-물 계에서 물이 낮은 속도로 윗 방향으로 흐를 때에는 공기유속이 증가함에 따라 위에서 열거한 다섯가지 형태가 나타나지만 액체의 유속이 높을 때는 semi-annular flow는 나타나지 않는다고 보고하였다. 또 관의 직경과 기체의 밀도에 따라서도 흐름의 형태가 변한다고 하였다.

Griffith와 Wallis⁵⁸⁾은 slug flow와 annular flow 사이의 중간 형태는 존재하지 않으며, semi-annular flow는 단지 entrance-effect가 지연된 것으로서, 관이 충분히 길면 slug flow로 변할 것이라고 하였다.

Mist flow는 단일상의 흐름으로 가정하여도 잘 맞기 때문^{7, 22, 147)}인지 관심을 보인 연구자가 별로 많지 않으며, annular flow에 관하여는 상당한량의 보고서가

제출되었다^{11, 22, 28, 46, 110, 124, 135}). 보고서가 가장 많은 것은 slug flow 와 bubbly flow 에 관한 것이며, 이들은 한결같이 gas holdup 데이터와 기포의 속도에 관하여 보고하였다.

3. Gas Holdup

액상을 통과하는 기체에 의한 2 상층(two phase bed)의 팽창은 기-액 접촉 반응기의 설계에 중요한 인자이며, 또한 기-액 2 상 흐름에 복잡성을 주는 인자중의 하나이다. 이 2 상층의 현상은 gas holdup, liquid holdup, holdup, liquid bed expansion 등의 여러가지 이름으로 보고되고 있다. 그러나 연구자들은 대부분이 단순히 이 gas holdup 데이터만을 보고하거나, 이것을 기포속도와 상관시키는 정도이다. 이 gas holdup 데이터가 열이나 물질의 전달현상 연구의 일환으로 발표되는 경우에는 정확성이나 적절한 설명이 결여되어 있다. 또한 대개의 경우, gas holdup 데이터는 기체의 유속이 비교적 작은 범위에서만 보고되고 있다.

Verschoor¹⁴²⁾는 정지상태의 물, 에타놀 및 42% 글리세롤-물 계 등에 공기를 통과시켜서 gas holdup을 재고, 데이터를 분석한 결과, 액체의 표면장력 보다 액체의 점도가 여기에 미치는 영향이 크다고 보고하였다.

Schulman과 Molstad¹²⁶⁾는 물에 공기, 탄산가스, 수소, 에틸렌, 아황산가스 등을 통과시켜서 gas holdup을 측정하고 오직 액체의 유속에 따라서만 데이터가 변화함을 보고하였다.

Houghton, McLean 그리고 Ritchie^{66, 67)}는 물, 아세트, 에틸아세테이트, 글리세린 및 초산 등에 질소, 산소 및 탄산가스를 통과시켜서 gas holdup을 측정하고, 기체의 종류에는 상관없다는 것을 발견했다. 그들은 또 indented strip으로 충전한 기포탑에서도 실험하였다.

Fair, Lambright 그리고 Anderson⁴⁴⁾은 공기-물 계에 관하여 직경이 18 inch 및 42 inch 인 탑에서 실험하고 baffle에 의한 영향도 발표하였다.

그외에 Hagedorn과 Brown⁶²⁾은 액체점도가 gas holdup에 미치는 영향을 연구하였고, Koide⁷⁶⁾는 저항측정법을 이용하여 gas holdup의 반경방향의 분포를 측정하였으며, Siemes¹²⁷⁻¹³⁰⁾는 gas holdup과 기체분산관의 종류와의 관계를 관찰하였다. 최근 Yoshida와 Akida¹⁵⁰⁾는 gas holdup은 기체분산노즐의 직경, 2 상층의 높이, 온도 및 액체 점도등에는 무관하고, 기체

의 속도와 관의 직경에 의하여서만 영향을 받는다고 발표하였으나, Braulick 등¹⁸⁾은 gas holdup은 2 상층의 높이에 영향을 받는다고 보고하였다. Fig. 2는 이에서 언급한 여러연구의 gas holdup 데이터를 모아본 것이다.

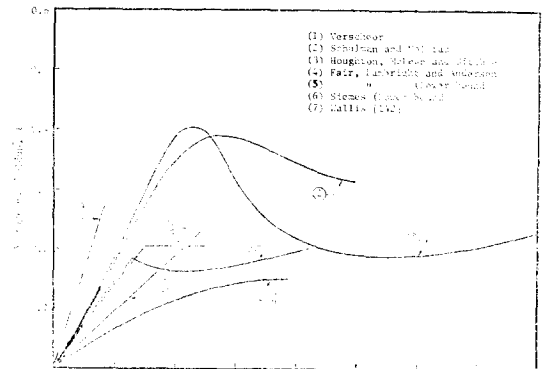


Fig. 2. Gas holdup data of different investigators for air-water system with $U_L=0$.

4. 실험식(Empirical Correlations)

수직관내에서의 기-액 2 상의 흐름에 관한 연구는 단순한 실험적 관찰과 측정의 범위를 넘어 데이터를 상관시키는 데로 발전하였다. 즉 각상의 유속 및 물리적 성질과 관의 직경 등이 2 상계의 흐름의 형태 천이와 gas holdup에 미치는 영향이 관심사가 되었다. 그러나 각 연구자는 각자 자기 나름대로 데이터를 정리하였으며 따라서 상호간에 거의 일치하지 않는 결과를 나타내고 있다.

Gallegar, Stovall 및 Huntington⁴⁷⁾은 공기-물 계와 공기-석유 계에 있어서 각상의 질량속도와 흐름의 유형과의 관계를 나타내는 도표를 작성하였으나, bubble flow와 slug flow의 경계면에 관한 언급이 없다.

Govier⁵⁴⁻⁵⁶⁾은 공기-물 계에 대하여 관으로 들어가는 공기와 물의 비, 공기의 밀도, 관의 직경을 포함하는 dimensional product와 물의 면적속도 등과 흐름의 형태와의 관계를 나타내는 도표를 작성하였으며, gas holdup도 각 흐름의 형태에 따라서 각각 일정한 변수로서 추정할 수 있도록 하였다.

Griffith와 Wallis⁵⁸⁾은 자신들의 데이터 뿐만 아니라 다른 연구자들의 데이터를 사용하여 2 상계의 흐름의

형태를 관으로 들어가는 기체의 체적비와 Froude 수로서 추정할 수 있는 도표를 구성하였는데, 오직 semi-annular flow를 포함한 slug flow 부분 만을 다른 유형으로 부터 분리하여 취급하였다.

Ros¹²²⁾도 흐름의 형태의 경계를 여러가지 무차원 수로서 나타낼 수 있다고 제안하였고, Hughmark와 Pressburg⁷¹⁾는 전자계산기를 사용하여 여러 연구자들의 데이터를 종합하였으며, Richardson과 Higson¹²¹⁾은 gas holdup을 기체와 액체의 속도를 포함한 복잡한 지수함수로서 표시하였다.

몇몇 연구자들^{9, 45)}은 주로 유전에서의 gas-lift 원리의 응용에 관심이 있었기 때문에 상당히 높은 기체의 속도 범위에 관하여 연구하였으며, gas holdup이나 흐름의 형태보다는 비교적 작은 적경의 관을 사용하여 관 내의 압력손실에 관한 데이터를 상관시켰다.

5. 단일 기포

액체 중 단일 기포의 상승은 기-액 2상제의 흐름에서 기체가 분산되어 있는 형태의 가장 간단한 것으로, 이 분야는 실험적으로나 이론적으로나 상당한 연구가 이루어졌다.

(1) 기포의 형성

기포를 생성시키는 장치로서는 보통 orifice를 사용하는데, Leibson 등⁸⁷⁾과 Davidson과 Amick⁹²⁾은 기체의 유속이 변함에 따라 생성되는 기포의 모양을 연구한 바 있다. 기포의 체적은 공급되는 기체의 유량에 관계가 있으며, 이 현상을 Brodkey²²⁾는 다음과 같이 설명하고 있다.

As the gas flow rate is increased, three distinct regions of bubble formation are found [141, 206 in the original]. At very low rates the bubble volume remains essentially constant for a given orifice diameter, and hence the frequency of bubble production is proportional to the gas-flow rate. This type of formation is called the constant-volume or static bubble. As the gas flow is increased past a transition region, the bubble frequency levels off to a constant value and the volume increases in proportion to the gas-flow rate. This second type is called the constant-frequency bubble. At higher rates of flow, breakup and coalescence occur; these are the conditions of operation of most industrial equipment. The various regions are qualitatively

described in

Fig. 3은 위에 기술한 것을 도식한 것이다.

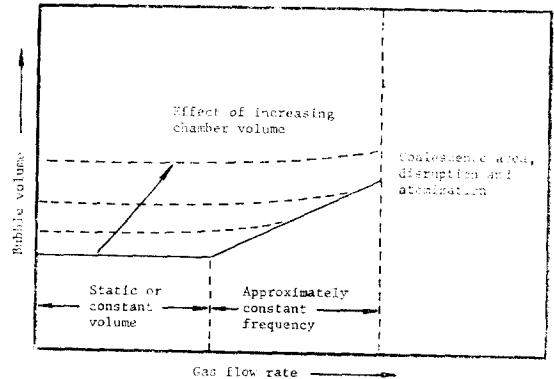


Fig. 3. Bubble volume as a function of gas flow rate. (After Brodkey²²⁾)

성용구역(constant volume region)에 있어서 기포가 구형이라고 가정하면 다음 식이 성립한다¹⁾.

$$\frac{\pi d^3}{6} g (\rho_L - \rho_G) = \pi d \sigma \cos \theta \quad (1)$$

여기서 θ 는 3상의 경계면의 접촉각이다. 식 (1)은 정확하지는 않지만 실험적으로 보정할 수 있다.

실제로 기포의 체적은 gas chamber⁶⁸⁾와 공급되는 기체의 유량^{33, 87)}의 영향을 받는다. 또 같은 orifice에서 같은 조건 하에서 발생된 기포라도 그 크기가 일정한 것은 아니다. Leibson⁸⁷⁾ 등은 이 기포의 크기 분포는 log-normal distribution function이 잘 맞는다고 하였다.

(2) 단일기포의 종말속도

기포의 상승속도는 유체 내에서 낙하하는 고체의 속도와 자주 비교되는데, 종전의 이상유체의 가정 하에 고체 주위로 흐르는 유체에 관한 수학적 해⁸¹⁾는 모든 실제 유체에 잘 맞는 것은 아니다.

Stokes¹³²⁾는 무한히 펼쳐 있는 유체내의 단단한 구형 주위를 지나는 질점을 가진 유체에 관한 방정식을 풀었는데 이것을 액체 내에서 상승하는 단일 기포에 적용하면

$$U_t(Sf) = \frac{1}{18} \cdot \frac{(\rho_L - \rho_G) g d^2}{\mu_L} \quad (2)$$

이 된다.

Rybczynski¹²⁵⁾와 Hadamard⁶¹⁾는 구의 계면에서의 속도 즉 기포 안의 유체의 circulation을 감안하여 무한

히 펼쳐 있는 유체 내의 작은 액체방울의 운동에 관한 다음 식을 유도하였다.

$$U_t(RH) = 3K \left[\frac{1}{18} \cdot \frac{(\rho_L - \rho_G)gd^2}{\mu_L} \right];$$

$$K = \frac{\mu_L + \mu_D}{2\mu_L + 3\mu_D} \quad (3)$$

Boussinesq¹⁷⁾는 계면 근처에는 점성이 높은 얇은 층이 있다는 가정 하에 다음 식을 유도하였다.

$$U_t(B) = 3K \left[\frac{1}{18} \cdot \frac{(\rho_L - \rho_G)gd^2}{\mu_L} \right];$$

$$K = \frac{\mu_L + \mu_D + \frac{e}{3d}}{2\mu_L + 3\mu_D + \frac{2e}{d}} \quad (4)$$

여기서 e 는 계면에서의 표면점도계수이고 표면장력과 관련된단.

위의 식들은 모두 액체방울의 상대 운동이 충분히 느려서 관성효과를 무시할 수 있다는 가정에 근거를 둔 것으로서, Reynolds 수가 약 1보다 작을 때에만 실험치와 일치한다.

Levich⁸⁸⁾는 Reynolds 수가 1~1500의 범위에서 다음 식을 유도하였다.

$$U_t(L) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{18} \cdot \frac{(\rho_L - \rho_G)gd^2}{\mu_L} \right] \quad (5)$$

여기서는 기포의 모양이 정확히 구형이며 계면에는 표면활성제가 없다는 가정을 사용하였다. 그는 또 공기-물 계에서 비교적 크고 변형된 기포에 관하여

$$U_t(L)' \simeq \left(\frac{4\sigma^2 g \rho_G}{\alpha \rho_L \mu_L \rho_L} \right)^{\frac{1}{5}} \simeq 1 \text{ ft/sec} \quad (6)$$

이 성립함을 보고하였다.

1900년에 Allen³⁾은 물에서 기포의 운동은 $N_{Re} < 1$ 의 범위에서 Stokes의 법칙이 적용되고 $N_{Re} < 2$ 의 범위에서는 기포의 속도는 기포의 반경에 비례한다고 발표하였다. 그러나 그가 실험한 기포의 가장 큰 반경은 겨우 0.015 inch였다.

Miyagi¹⁰²⁾는 물에서 상승하는 기포의 운동을 기포반경 0.138 inch까지 조사하고 Allen의 실험결과를 확인하는 한편, 기포의 종말속도는 기포반경이 임계치(약 0.065 inch)에 이룰때 최대치(약 0.91 ft/sec)를 가지며 이 임계반경 이하에서는 기포의 크기에 따라 종말속도가 직선적으로 증가하나, 임계반경 이상에서는 거의 포물선적으로 감소하다가 기포가 더 커지면 일정한 값(약 0.75ft/sec)를 갖는다고 발표하였다.

Bond¹⁵⁾는 water-glass 및 golden syrup에서 기포의

운동을 측정하고, Rybczynski-Hadamard 식이 잘 맞음을 보고하였다. 그러나 Garner와 Hammerton⁴⁸⁾은 기포내에서의 운동을 관찰하고 Bond와 Newton¹⁶⁾이 주장하는 식이 맞지 않는다고 보고하였다.

그의 여러 연구자들^{26, 113, 117)}이 여러가지 액체에서 크기가 다른 단일기포의 종말 상승속도를 측정하였는데, 데이터가 좀 흩어지기는 했으나 대체로 일치하고 있다. Figure 4는 물에서 상승하는 기포의 속도를 기포 직경에 관하여 Van Krevelen과 Hoftijzer¹⁴¹⁾가 수집한 것을 도시한 것이다.

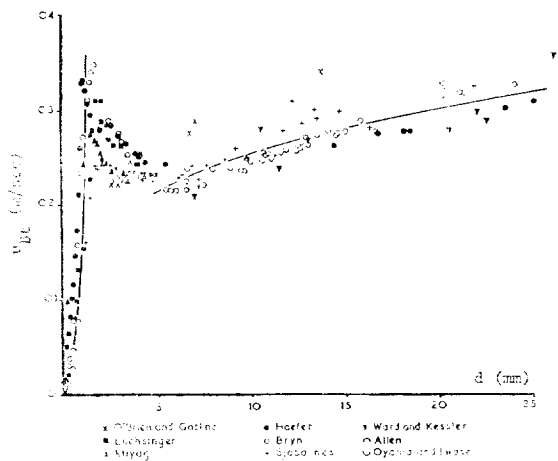


Fig. 4. Ascending velocity of separate gas bubble in water. (From Van Krevelen and Hoftijzer¹⁴¹⁾)

Bryn²⁶⁾은 기포의 운동을 3가지 종류로 나누었는데, 후에 O'Brien과 Goslin¹⁴²⁾, Van Krevelen과 Hoftijzer¹⁴¹⁾, 그리고 Levich⁸⁸⁾도 유사한 구분을 하였다. Van Krevelen과 Hoftijzer¹⁴¹⁾의 말을 인용하면

- Small bubbles (<1.5 mm). These have a spherical shape and ascend in a straight line. The ascending velocity increases with increasing bubble diameter.
- Medium-size bubbles (1.5—6 mm). In this region the bubbles are visibly deformed; they ascend with a spiral movement. The irregular character of the movement causes spreading of the data....
- Large bubbles (>6 mm). The bubbles again ascend in a straight line but they are largely deformed and finally they obtain a more or less mushroomlike shape. Bubble velocity increases slightly with increasing diameter.

(3) 큰 기포의 상승속도

큰 기포가 비교적 큰 직경의 관에서 상승하면 반구형 모자모양이 되고, 기포가 더 커지거나 관의 직경이 줄어들면 기포는 관벽에 걸치게 되어 총알 모양의 원통형 기포가 된다.

Davis 와 Taylor³⁴⁾는 자유롭게 상승하는 반구 모자모양의 기포에 관하여 그 앞 부분의 압력이 구의 주위를 흐르는 이상유체에서와 같다는 가정 하에 다음과 같은 식으로 그 상승속도를 계산할 수 있다고 하였다.

$$U_{Bt} = \frac{2}{3} (gR)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

여기서 R 은 기포의 Vertex 부근의 곡률 반경이다. 또 직경이 D 인 관내에 낀 기포의 상승속도는

$$U_s = 0.328 (gD)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

로 주어진다고 하였다. Harberman 과 Morton⁶⁰⁾은 모든 액체에서 상승하는 반구형 모자모양의 기포에 관하여

$$U_{Bt} = 1.02 (gR)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

가 성립함을 발표하였고, Dumitrescu⁴⁰⁾와 Layzer⁸⁵⁾도 식 (8)과 같은 식을 얻었는데 다만 계수가 각각 0.361과 0.364로 달랐다.

실험적으로 Davies 와 Taylor는 식 (7)이 잘 맞음을 증명하고, 또 2.75 inch 직경의 관에서 행한 실험에서 식 (8)의 계수의 값이 0.338에서 0.347 사이에 있음을 발표하였다. 그의 Gibson⁵⁰⁾, Barr⁸⁾, Laird 와 Chisholm⁶⁰⁾ 그리고 White 와 Beardmore¹⁴⁹⁾도 공기-물 계에 관하여 원주형 기포에 관한 실험데이터를 발표하였다.

이렇게 큰 반구형의 모자모양의 기포에 관하여 Davies 와 Taylor는 drag coefficient는 Reynolds 수에 무관할 것이며 따라서 기포의 상승속도는 기포체적의 6분의 1승에 비례할 것이라고 추리하였다. 즉

$$U_{Bt} \propto V^{\frac{1}{6}} \quad (10)$$

실험에 의하여 그들은 식 (10)에서 비례상수가 24.8이라고 발표하였으나, Gerwels⁴⁹⁾는 0.61in³. 내지 213.5in³. 크기의 기포에 관하여 실험하고 상수가 26.8이라고 하였다.

Harmathy⁶³⁾와 다른 연구자들^{29, 83, 138)}은 관벽이 기포 상승 속도에 미치는 영향을 조사하고, 일반적으로 관 내에서 상승하는 기포는 무한한 유체에서 상승하는 기포보다 속도가 낮다고 보고하였다.

6. 해석적 방법 (Analytical Approach)

어느 분야나 마찬가지로이겠지만, 수직관 내에서의 기-

액 2상흐름에 관한 연구도 초기에는 테이타의 측정과 correlation에 그치다가 최근에 와서 몇몇 연구자들이 흐름의 기구(mechanism)를 연구하려고 노력하고 이론적인 모델을 설정하기 시작하였다. 그러나 현재까지의 모델은 대부분 실제로 흐름의 기구를 이해하는 것 보다는 어떻게 일어나 물질전달 연구에 쉽게 적용할 수 있는나에 목적을 두었기 때문에 그 해석이 다양하고 엄밀성이 결여되어 있다.

많은 연구자들은 2상계의 흐름을 설명하는 데에 단순히 다음의 일반적인 continuity relationship

$$U_{Bm} = \frac{U_G}{\epsilon} \quad (11)$$

을 사용하였는데 여기서는 주로 평균 기포속도, U_{Bm} ,에 관한 연구만을 살펴보기로 한다.

(1) 평균 기포속도

단일 단일 orifice로 부터 기포가 계속적으로 발생한다면 앞의 기포와 그 뒤에 따라 오는 기포는 서로 그 속도에 영향을 주게 되며, 이러한 사실같은 기포군을 chain-like bubble, train of bubbles 혹은 bubbles in series 라고 부른다.

Van Krevelen 과 Hoftijzer¹⁴¹⁾는 기포열(series of bubble)의 평균 속도에 관하여 다음의 실험식

$$U_{Bm} = \left(\frac{gd}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

을 얻었는데, 이 값은 같은 크기의 단일 기포의 상승속도보다 크다. 이 현상을 Poutanen 과 Johnson¹²⁰⁾은 상승하는 기포열이 주위의 유체에 상승속도를 주고, 주위 유체에 circulation을 일으킴으로 기포와 유체의 상대속도가 기포의 관에 대한 상승속도보다 작게 되며, 따라서 drag force가 단일 기포의 경우 보다 감소하기 때문이라고 설명하였다.

기포열의 평균상승속도를 그 성분속도(component velocity)로서 고려하기는 아마 Behringer¹⁰⁾가 처음일 것이다. 그는 흐르지 않는 액체내에서의 기포열의 속도는 다음의 두 성분 즉,

(1) 고정된 관의 직경과 주어진 기-액계에 관하여 일정한 값을 갖는 각개 기포의 상대속도(이것은 부력과 저항에만 좌우되며 같은 조건에서의 단일 기포의 속도와 같다.)

(2) 기체의 유량때문에 생기는 전체 2상층의 속도(lift velocity)로서 구성되었다고 하였다.

Griffith 와 Wallis⁵⁸⁾는 Dumitrescu-Taylor 기포의 종말 속도에 관한 식 (8)과 유체의 연속성(continuity)을 감

관하여 순수한 slug flow 에 관한 다음의 식을 얻었다.

$$U_{Bm} = 0.35(g^D)^{\frac{1}{2}} + U_G + U_L \quad (13)$$

이 해석은 Moissis 와 Griffith¹⁰³⁾에 의하여 entrance effect 를 고려하여 이를 더욱 발전되었고, 다시 Moissis¹⁰³⁾는 slug flow 에서 froth flow 에로의 전이를 설명하였으며, Griffith⁹⁷⁾는 열전달의 문제를 고려하였다.

Laird 와 Chisholm⁸⁰⁾은 2 inch 직경의 관에서 slug의 길이가 50 inch 정도가 되면 상승속도가 약 10% 증가함을 관찰하였으나, Griffith 와 Wallis⁹⁸⁾는 일단 slug이 충분히 비대하여져서 그 모양이 potential flow theory로 설명할 수 있게 되면 상승속도는 크기에 관계없음을 발견하였고, Laird 와 Chisholm의 관찰 결과는 기체를 주입시 생기는 액체의 속도 때문이라고 설명하였다. 이러한 속도의 증가를 고려하여 Griffith 와 Wallis는 다음 식

$$U_{Bm} = C_1 C_2 (g^D)^{\frac{1}{2}} + U_G + U_L \quad (14)$$

를 제안하였는데 여기서 C_1 과 C_2 는 기포 Reynolds 수의 함수이다.

그러나 Nicklin, Wilkes 그리고 Davidson¹¹³⁾은 slug의 길이가 증가함에 따라 상승속도가 증가하는 것은 slug이 상승함에 따른 부피의 팽창때문이라고 설명하고 상승하는 slug을 실제로 촬영하여 slug의 앞부분이 slug의 길이나 wake에 관계없음을 보였다. 그들은 다음식

$$U_{Bm} = 0.35 (g^D)^{\frac{1}{2}} + C_3 (U_G + U_L) \quad (15)$$

을 제안하였는데, 여기서 C_3 는 무차원 상수이다. Bubbly flow에 관하여는 Nicklin¹¹¹⁾이 균일하게 흩어져 있는 같은 크기의 기포를 가정하여 식(13)에서 slug의 속도 대신 기포의 속도를 써서 다음식

$$U_{Bm} = U_{Bmo} + U_G + U_L \quad (16)$$

을 유도하였다. 여기서 U_{Bmo} 는 정지 상태의 액체에서 부력에 의하여 상승하는 기포의 속도이다. 그는 U_{Bmo} 의 값을 측정하고 기포군이 밀집됨에 따라서 감소함을 발견하였다.

(2) 억제효과(Hindering Effect)

기포의 속도를 그 성분속도인 각상의 속도와 부력에 의한 속도로 분리한다면, 다음 문제는 부력에 의한 기포의 성분속도를 어떻게 정확히 나타낼 수 있는나 하는 것이며, 주어진 조건 하에서 가장 영향을 미치는

인자는 기포군의 농도이다. 즉 hindered settling에서와 마찬가지로 기포들은 상호 그 상승을 방해할 것이기 때문이다.

액체 내에서 침강하는 고체입자간의 hindering effect에 관한 연구는 많이 이루어 졌다^{20, 79, 84)}. 여러가지 해석적 방법이 제안되었으나 한 방법은 속도에 대한 hindering effect는 입자 농도에 의한 2 상계의 점도의 변화때문이라고 생각하여, 소위 viscosity function을 찾아 내는 것이다. 즉 2 상계의 effective viscosity는

$$\mu_e = \frac{\mu_L}{f_1(\epsilon)} \quad (17)$$

으로 표시되며, 여기서 $f_1(\epsilon)$ 이 viscosity function이다.

여러 연구자들은 단단한 구가 소밀하게 떠 있는 유체에 관한 Einstein⁴¹⁾ 식으로 부터 출발하여 많은 가정하에 좀더 복잡한 식을 유도하고, 제한된 Reynolds 수 범위에서 실험적으로 그들의 식을 증명하였다.

Steinour¹³¹⁾는 서로 달라붙지 않는 균일한 크기의 구의 suspension의 침강 속도에 관하여 입자의 농도가 유체의 밀도에 영향을 주고, 따라서 부력에 영향을 줄 것이라는 가정하에 semi-empirical equation을 유도하였으나, Lapidus 와 Elgin 조^{20, 84)}는 Steinour의 이론을 반박하고 입자농도에 관계되는 함수는 각 경우에 있어서 실험적으로 결정하여야 한다고 하였다.

여하튼 hindered settling에 관한 대부분의 이론이나 semi-empirical equation은

$$U_p = U_{pt} f_2(\epsilon) \quad (18)$$

의 형태로 표현된다. Zuber¹⁵²⁾는 종류에 있어서

$$f_2(\epsilon) = (1-\epsilon)^2 f_0(\epsilon) \quad (19)$$

라고 놓을 수 있다고 하였으며, Richardson 과 Zaki¹²²⁾는 차원해석법에 의하여

$$f_1(\epsilon) = (1-\epsilon)^{n-2} \quad (20)$$

가 된다고 하였다. 여기서 n 은 실험적으로 결정되는 상수이다. ($N_{Re} > 500$ 에서 2.39)

액체에서 상승하는 기포군의 hindering effect에 관한 연구는 별로 되어 있지 않다. Wallis¹⁴⁵⁾는 기포농도의 두 극한(0와 1)을 고려하여 단순히 다음식

$$U_{Bmo} = U_{Bt} (1-\epsilon) \quad (21)$$

을 채택하였다. Zuber와 Findlay¹⁵³⁾은 stokes의 법칙을 따르는 작은 기포와 직경이 0.04에서 0.08 inch되는 큰 기포에 관하여 각각 다른 표현을 사용하였으나 모두

$$U_{Bmo} = U_{Bt}(1-\varepsilon)^n \quad (22)$$

으로 표시되며, 여기서 n 은 기포의 크기에 따라 0부터 3까지의 값을 갖는다. Marucci⁽⁹⁷⁾는 cellular spherical model에 기준하여 높은 N_{Re} 의 범위에서 다음식을 유도하였다.

$$U_{Bmo} = U_{Bt}(1-\varepsilon)^2/(1-\varepsilon^{3/2}) \quad (23)$$

(3) 평균 gas holdup

Azbel⁽⁵⁾은 2상층의 전체 에너지가 최소가 될 때에 기체의 분포가 정상상태가 될 것이라는 가정하에, 평균 gas holdup을 추정할 수 있는 이론식

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \frac{1}{(N_{Fr})^{1/2}}} \quad (24)$$

을 유도하였다. 여기서 새로운 Froude 수를 $(U_G)^2/g^D$ 로 놓는다면 식 (24)는

$$\varepsilon = \frac{U_G}{(g^D)^{1/2} + U_G} \quad (25)$$

가 되며, 이는 $U_L=0$ 일 때 식 (11)과 식 (14)를 합친 것과 일치한다.

기체의 유속이 매우 커서 관벽을 걸치는 기체의 slug이 생기는 경우 식 (13), (14), (15) 중 어느 것이나 식 (1)에 대입하여도 비교적 정확한 평균 gas holdup 값을 준다. 또 기체의 유속이 매우 작아서 hindering effect를 무시할 수 있을 경우에는 식 (16)과 식 (22)를 식 (11)에 대입하여 근사한 평균 gas holdup 값을 얻을 수 있다.

그러나 기체의 유속이 위의 두 경우의 사이에 들면 위에 열거한 어느 식을 사용하여도 실제로 측정한 평균 gas holdup과는 다른 값을 얻게 된다. Wallis⁽¹⁴⁵⁾는 이 천이구역 (transition region)에서는 부분적인 기포의 합체 현상때문에 해석적인 방법으로는 설명할 수 없다고 하였다.

Zuber와 Findlay⁽¹⁵³⁾는 위의 문제점, 특히 식 (14)와 식 (15)에서 상수로 보정하여야 한다는 점을 감안하여 좀더 일반적인 관계식을 추구하다가 Bankoff⁽⁷⁷⁾의 flow parameter와 비슷하게 관내에서의 기포의 속도와 농도의 분포를 고려한 distribution parameter를 도입하였다.

일반적으로 실제의 기-액 2상흐름에서는 순수한 slug flow는 잘 나타나지 않으며 더구나 관의 직경이 2 inch 이상이 되면, 만일 관벽을 걸치는 기체의 slug이 생긴다 하여도, 관 길이의 이론적인 최소치⁽⁸⁶⁾가 매우 길어서 실제 응용면에서 볼 때 고려할 가치가 없다.

따라서 위에 열거한 식들을 실제 문제에 그대로 사용하는 것은 위험하다. De Nevers⁽⁹⁶⁾는, 기-액 2상의 흐름은 액체에 대한 기포의 상대속도로서 해석하기 보다는 기-액 혼합물의 bulk motion으로 분석하는 것이 타당하다고 하였는데, 이것은 지금까지 기술한 해석방법과는 좀 다르게 접근하는 방법이다.

7. 결 론

수직관내에서의 기-액 2상의 흐름은 그 응용이 다양하고 관련된 연구 논문도 많으나 아직 단일상의 흐름에 관한 지식에 비하여 매우 미약하다. 사실상 현재 있는 데이터로서는 실험한 범위 밖에서 어떤 장치를 설계하는 것은 위험하다. 앞으로 열전달이나 물질전달 연구의 일환으로서가 아니라 본체적인 2상계의 흐름에 관한 연구를 함으로서 근본적인 2상계의 flow mechanism을 이해하게 된다면 2상계를 수반하는 열이나 물질의 전달은 쉽게 해석할 수 있을 것이다.

갑 사

이 글의 초고를 읽고 좋은 재안을 하여 주신 연세대학교 화공과 조영일 교수와 이글의 편집에 수고하여 주신 연세대학교 화공과 강안수씨에게 감사를 드립니다.

사 용 기 호

D	diameter of column, in.
d	diameter of bubble, in.
d_o	diameter of orifice, in.
e	surface viscosity coefficient in Eq. (4).
$f(\varepsilon)$	arbitrary function of ε .
f_1, f_2	functional relationships defined in Section 6—(2).
g	acceleration due to gravity, ft/sec ² .
H_L	height of liquid, in.
K	parameter in Eqs. (3) and (4).
n	number.
N_{Re}	Reynolds number ($\equiv \frac{DW_G}{\mu_G}$ for gas).
N_{Fr}	Froude number ($\equiv \frac{(U_G)^2}{gD}$ or $\frac{(U_{Bm})^2}{gH_L}$ for gas).

R radius of curvature, in.
 R_e equivalent radius, in.
 U_{Bm} average velocity of bubbles, ft/sec.
 U_{Bmo} average velocity of bubbles ascending in a stagnant liquid by buoyancy only, ft/sec.
 U_{Bt} terminal velocity of a bubble, ft/sec.
 U_G superficial gas velocity, ft/sec.
 U_L superficial liquid velocity, ft/sec.
 U_p settling velocity of particles in a liquid, in/sec.
 U_{pt} terminal velocity of a particle in a liquid, in/sec.
 $U_t(St)$ terminal velocity of a drop or a bubble by Stokes, ft/sec.
 $U_t(RH)$ terminal velocity of a drop or a bubble by Rybcinski-Hadamad, ft/sec.
 $U_t(B)$ terminal velocity of a drop or a bubble by Boussinesq, ft/sec.
 $U_t(L)$ terminal velocity of a drop or a bubble by Levich, ft/sec.
 $U_t(L')$ terminal velocity by Levich for a large drop or bubble, ft/sec.
 V two-phase volume, ft³.
 α numerical coefficient in Eq (6), ft³/ft³.
 ϵ average gas holdup, or concentration of solid particles in solid-liquid mixture.
 θ contact angle.
 μ_D viscosity of dispersed phase, lb_m/ft-sec.
 μ_e effective viscosity, lb_m/ft-sec.
 μ_L viscosity of liquid, lb_m/ft-sec.
 ρ_D density of dispersed phase, lb_m/ft³.
 ρ_G density of gas, lb_m/ft³.
 ρ_L density of liquid, lb_m/ft³.
 σ surface tension, dyne/cm.

참 고 문 헌

1. N. K. Adam, "The Physics and Chemistry of Surface," 3rd ed., Oxford University Press, London (1941).
2. A. W. Adamson, "Physical Chemistry of Surfaces," Interscience Publishers, Inc., New York (1960).
3. H. S. Allen "The Motion of a Sphere in a Viscous Fluid," *Phil. Mag.*, Ser. 5, 50 (1900), 323-328.
4. G. H. Anderson and B. G. Mantzouranis, "Two-Phase Flow Phenomena," *Chem. Eng. Sci.*, 12 (1960), 109-126 and 233-242.
5. D. S. Azbel, "The Hydrodynamics of Bubbler Processes," *Khim. Prom.*, No. 11 (1962), 74; translation, *Int. Chem. Eng.*, 3 (1963), 319-323.
6. A. G. Azizyan and N. I. Smirnov, "The Hydrodynamics of Bubbling Process. Verification of Equations for Calculation of the Hydrodynamics of Sparging Reactors," *Izv. Akad. Nauk Arm. SSR*, No. 6, (1964), 53-58; translation, *Int. Chem. Eng.*, 5 (1965), 533-539.
7. S. G. Bankoff, "A Variable Density Single-Fluid Model for Two-Phase Flow with Particular Reference to Steam Water Flow," *Trans. ASME*, Ser. C, 82 (1960), 265-272.
8. G. Barr, "The Air-Bubble Viscometer," *Phil. Mag.*, Ser. 7, 1 (1926), 395-403.
9. P. B. Baxandall and R. Thomas, "Calculation of Pressure Gradients in High-Rate Flowing Wells," *J. Petrol. Tech.*, 13 (1961), 1023-1028.
10. H. Behringer, "The Flow of Liquid-Gas Mixtures in Vertical Tubes," *Zeit. Ges. Kälte-Ind.*, 43 (1936) 55-58; AEC translation No. 1777, O. T. S. Dept. of Commerce, Washington, D. C.
11. J. A. R. Bennett, J. G. Collier, H. R. C. Pratt, and J. D. Thornton, "Heat Transfer to Two-Phase Gas-Liquid Systems, Part I: Steam-Water Mixtures in the Liquid-Dispersed Region in an Annulus," *Trans. Inst. Chem. Engrs. (London)*, 39 (1961), 113-126.
12. J. A. R. Bennett and J. D. Thornton, "Pressure-Drop Data for the Vertical Flow of Air-Water Mixtures in the Climbing-Film and Liquid-Dispersed Regions," *Trans. Inst. Chem. Engrs. (London)*, 39 (1961), 101-112.
13. O. P. Bergelin, "Flow of Gas Liquid Mixtures," *Chem. Eng.*, 56, No. 5 (1949), 104-107.
14. G. Birkhoff, "Hydrodynamics," 2nd ed., Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1960).
15. W. N. Bond, "Bubbles and Drops and Stokes' Law," *Phil. Mag.*, Ser. 7, 4 (1927), 889-898.

16. W. N. Bond and D. A. Newton, "Bubbles and Drops and Stokes' Law," *Phil. Mag.*, Ser. 7, **5** (1928), 794-800.
17. J. Boussinesq, "Contribution to the Theory of Capillary Action with an Extension of Viscous Forces to the Surface Layers of Liquids and an Application Notably to the Slow Uniform Vertical Motion of a Spherical Fluid Drop," *Comp. rend.*, **156** (1912), 983-989, 1035, 1040, 1124-1129 and **157** (1913), 7-13, 89-94, 171-176, 313, 318.
18. W. J. Braulick, J. R. Fair, and B. J. Lerner, "Mass Transfer in a Sparged Contactor, Part I: Physical Mechanisms and Controlling Parameters," *AIChE Journal*, **11** (1965), 73-79.
19. F. P. Bretherton, "The Motion of Long Bubbles in Tubes," *J. Fluid Mech.*, **10** (1961), 166-188.
20. A. G. Bridge, L. Lapidus and J. C. Elgin, "The Mechanics of Vertical Gas-Liquid Fluidized System I: Countercurrent Flow," *AIChE Journal*, **10** (1964), 819-826.
21. H. C. Brinkman, "On the Permeability of Media Consisting of Closely Packed Porous Particles," *Appl. Sci. Res.*, **1A** (1947), 27 and **1A** (1948), 81-86.
22. R. S. Brodkey, "The Phenomena of Fluid Motions," Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass. (1967).
23. R. A. S. Brown, "The Mechanics of Large Gas Bubbles in Tubes," *Can. J. Chem. Eng.*, **43** (1965), 217-223 and 224-230.
24. R. A. S. Brown and G. W. Govier, "High Speed Photography in the Study of Two-Phase Flow," *Can. J. Chem. Eng.*, **39** (1961), 159-164.
25. R. A. S. Brown, G. A. Sullivan and G. W. Govier, "The Upward Vertical Flow of Air-Water Mixture," *Can. J. Chem. Eng.*, **38** (1960), 62-66.
26. T. Bryn, "Rate of Rise of Gas Bubbles in Liquids," *Forsch. Gebiete Ingenieur*, **4**, No. 1 (1933) 27; David Taylor Model Basin, Trans-132, Carderlock, Md.
27. S. Calvert and B. Williams, "Upward Cocurrent Annular Flow of Air and Water in Smooth Tubes," *AIChE Journal*, **1** (1955), 78-86.
28. C. O. Carter and R. L. Huntington, "Cocurrent Two-Phase Upward Flow of Air and Water Through an Open Vertical Tube and Through an Annulus," *Can. J. Chem. Eng.*, **39** (1961), 248-251.
29. R. Collins, "The Effect of a Containing Cylindrical Boundary on the Velocity of a Large Gas Bubble in a Liquid," *J. Fluid Mech.*, **28** (1967), 97-112.
30. B. G. Cox, "On Driving a Viscous Fluid out of Tube," *J. Fluid Mech.*, **14** (1962), 81-96.
31. S. Cromer and R. L. Huntington, "Visual Studies of the Flow of Air-Water Mixtures in a Vertical Pipe," *AIChE Trans.*, **136** (1940), 79-90.
32. J. K. Davidson and D. Harrison, "Fluidised Particles," Cambridge University Press, Cambridge, England (1963).
33. L. Davidson and E. H. Amick, Jr., "Formation of Gas Bubbles at Horizontal Orifices," *AIChE Journal*, **2** (1956), 337-342.
34. R. M. Davis and G. Taylor, "The Mechanics of Large Bubbles Rising Through Extended Liquids and Through Liquids in Tubes," *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A200** (1950), 375-390.
35. N. de Nevers, "The Energy Balance for a Bubble Column or a Gas Lift," *AIChE Journal*, **13** (1967), 387-389.
36. N. de Nevers, "Bubble Driven Fluid Circulations," *AIChE Journal*, **14** (1968), 222-226.
37. N. de Nevers and J.-L. Wu, "Bubble Coalescence in Viscous Fluids," *AIChE Journal*, **17** (1971), 182-186.
38. B. E. Dixon and P. R. Kiff, "Use of perforated and Porous Plates in Gas Absorption," *J. Appl. Chem.*, **5** (1955), 390-402.
39. A. E. Dukler, M. Wicks and R. G. Cleveland, "Frictional Pressure Drop in Two-Phase Flow," *AIChE Journal*, **10** (1964), 38-51.
40. D. T. Dumitrescu, "Flow of a Single Air Bubble in a Vertical Tube," *Zeit. Ang. Math. und. Mech.*, **23** No. 3 (1943), 139-149.
41. A. Einstein, "Eine neue Bestimmung der Molekuldimensionen," *Ann. Phys.*, **19** (1906), 289-306.
42. J. E. Ellis and E. L. Jones, "Vertical Gas-Liquid

- Flow Problems," pp B101-B140, "Symposium on Two Phase Flow" Vol. 2, University of Exeter, England (1965).
43. J. R. Fair, "Designing Gas-Sparged Reactors," *Chem. Eng.*, **74**, No. 14, (1967) 67-74 and No. 15, (1967) 207-214.
 44. J. R. Fair, A. J. Lambright and J. W. Anderson, "Heat Transfer and Gas Holdup in Sparged Contactor," *Ind. Eng. Chem. Process Design and Devel.*, **1**, No. 3 (1962), 33-36.
 45. G. H. Faucher and K. E. Brown, "Prediction of Pressure Gradients for Multiphase Flow in Tubing," *Soc. Pet. Eng. J.*, **3** (1963), 59-69.
 46. O. D. Gaither, H. W. Winkler and C. V. Kirkpatrick, "Single and Two-Phase Fluid Flow in Small Vertical Conduits Including Annular Configurations," *J. Petrol. Tech.*, **15** (1963), 309-320.
 47. W. C. Galegar, W. B. Stovall and R. L. Huntington, "Report on Two-Phase Vertical Flow," *Pipe Line Industry*, 38-42 (Feb. 1956).
 48. F. H. Garner and D. Hammerton, "Circulation Inside Gas Bubble," *Chem. Eng. Sci.*, **3** (1954), 1-11.
 49. R. E. Gerwels, "The Rise Velocity of Large Single Air Bubbles in Water," B. S. Thesis, University of Utah (1968).
 50. A. H. Gibson, "On the Motion of Long Air-Bubbles in a Vertical Tube, *Phil. Mag.*, Ser. 6, **26** (1913) 952-965.
 51. J. E. Goslin, "Experiments on the Vertical Flow of Gas-Liquid Mixtures in Glass Pipes," *AIME Trans.*, **118** (1936), 56-70.
 52. S. W. Gouse Jr., "Index to the Two-Phase Gas-Liquid Flow Literature," MIT Rept. No. 9, The MIT Press, Cambridge, Mass. (1966).
 53. G. W. Govier and K. Aziz, "The Flow of Complex Mixtures in Pipes," Van Nostrand Reinhold Co., New York (1972).
 54. G. W. Govier, B. A. Radford and J. S. C. Dunn, "The Upward Vertical Flow of Air-Water Mixtures-I," *Can. J. Chem. Eng.*, **35** (1957) 58-70
 55. G. W. Govier and W. L. Short, "The Upward Vertical Flow of Air-Water Mixtures-II," *Can. J. Chem. Eng.*, **36** (1958), 159-202.
 56. G. W. Govier, G. A. Sullivan and R. K. Wood, "The Upward Vertical Flow of Oil-Water Mixtures," *Can. J. Chem. Eng.*, **39** (1961), 67-75.
 57. P. Griffith, "The Prediction of Low-Quality Boiling Voids," *Trans. ASME, Ser. C*, **86** (1964), 307-333.
 58. P. Griffith and G. B. Wallis, "Two-Phase Slug Flow," *Trans. ASME, Ser. C*, **83** (1961), 307-320.
 59. Grove, Wise, Marsh, and Gray, "Viscosity of Fire-Fighting Foam," *Ind. Eng. Chem.*, **43** (1951), 1120-1122.
 60. W. L. Haberman and R. K. Morton, "An Experimental Investigation of the Drag and Shape of Air Bubbles Rising in Various Liquids," David Taylor Model Basin Report 802 (1953).
 61. M. J. Hadamard, "Slow Permanent Motion of a Viscous Liquid Sphere in a Viscous Fluid," *Compt. rend.*, **152** (1911), 1735-1738, and **154** (1912), 109.
 62. A. R. Hagedorn and K. E. Brown, "Effect of Liquid Viscosity in Two-Phase Vertical Flow," *J. Petrol. Tech.*, **16** (1964), 203-210.
 63. T. Z. Harmathy "Velocity of Large Drops and Bubbles in Media of Infinite or Restricted Extent," *AIChE Journal*, **6** (1960), 281-288.
 64. W. B. Hayes III, B. W. Hardy and C. D. Holland, "Formation of Gas Bubbles at Submerged Orifices," *AIChE Journal*, **5** (1959), 319-324.
 65. F. W. Helsby and D. C. P. Birt, "Foam as a Medium for Gas Absorption," *J. Appl. Chem.*, **5** (1955), 347-352.
 66. G. Houghton, A. M. McLean, and P. D. Ritchie, "Absorption of Carbon Dioxide in Water Under Pressure Using Gas Bubble Column," *Chem. Eng. Sci.*, **7** (1957), 26-40.
 67. G. Houghton, A. M. McLean and P. D. Ritchie, "Mechanism of Formation of Gas Bubble Beds," *Chem. Eng. Sci.*, (1957), 40-50.
 68. R. R. Hughes, A. E. Handlos, H. D. Evans and R. L. Maycock, "The Formation of Bubbles at Simple Orifices" *Chem. Eng. Prog.*, **51** (1955),

- 557-563.
69. G. A. Hughmark, "Holdup in Gas-Liquid Flow," *Chem. Eng. Prog.*, **58**, No. 4 (1962), 62-65.
 70. G. A. Hughmark, "Holdup and Mass Transfer in Bubble Column," *Ind. Eng. Chem. Process Design and Devel.*, **6** (1967), 218-220.
 71. G. A. Hughmark and B. S. Pressburg, "Holdup and Pressure Drop with Gas-Liquid Flow in a Vertical Pipe," *AIChE Journal*, **7** (1961), 677-682.
 72. H. S. Isbin, R. H. Moen and D. R. Mosher, "Void Fractions in Two-Phase Steam Water Flow," *AIChE Journal*, **3** (1957), 136-142.
 73. D. D. Kana and F. T. Dodge, "Bubble Behavior in Liquid Contained in Vertically Vibrating Tanks," AIAA paper No. 66-68, AIAA 3rd Aerospace Science Meeting, New York, Jan. 24-26 (1966).
 74. A. Klinkenberg and H. H. Mooy, "Dimensionless Groups in Fluid Friction, Heat and Material Transfer," *Chem. Eng. Prog.*, **44** (1948), 17-36.
 75. H. Koelbel and *et al.*, "Waermenebergang an Blasensaulen," *Chem.-Ing.-Tech.*, **30** (1958), 400-404 and 729 and **32** (1960), 84.
 76. K. Koide, "Flow Mechanism in Bubble Column," Ph. D. Thesis, Tokyo Institute of Technology, Japan (1965).
 77. B. K. Kozlov, "Forms of Flow of Gas-Liquid Mixtures and Their Stability Limits in Vertical Tubes," *Zhur. Tekh. Fiz.*, **24** (1954) 2285. Associated Technical Service Translation 136R.
 78. S. S. Kutateladze and V. N. Moskvicheva, "Hydrodynamics of a Two-Component Layer as Related to the Theory of Crisis in the Process of Boiling," *Zhur. Tech. Fiz.* (English ed.), **29** No. 9 (1955), 1135-1139.
 79. G. J. Kynch, "A Theory of Sedimentation," *Trans. Faraday Soc.*, **48** (1952), 166-176.
 80. D. A. K. Laird and D. Chisholm, "Pressure and Forces Along Cylindrical Bubbles in a Vertical Tube," *Ind. Eng. Chem.*, **48** (1956), 1361-1364.
 81. H. Lamb, "Hydrodynamics," 6th ed., Art. 274, Cambridge University Press; reprinted by Dover Publications, New York (1945).
 82. L. Landau and E. Lifshits, "Fluid Mechanics," Pergamon Press, London (1959).
 83. R. Landenburg "Über den Einfluss von Wänden auf die Bewegung einer Kugel in einer reibenden Flüssigkeit," *Ann. Phys.*, **23** (1907), 447.
 84. L. Lipidus and C. J. Elgin, "Mechanics of Vertical-Moving Fluidized System," *AIChE Journal*, **3** (1957), 63-68.
 85. D. Layzer, "On the Instability of Superposed Fluids in a Gravitational Field," *The Astrophysical Journal*, **122**, No. 1 (1955), 1-12.
 86. T. H. Lee, "Hindered Flow of Masses of Gas Bubbles in a Liquid," Ph. D. Thesis, University of Utah (1972).
 87. I. Leibson, E. G. Holcomb, A. G. Cacao and J. J. Jacmic, "Rate of Flow and Mechanics of Bubble Formation from Single Submerged Orifices," *AIChE Journal*, **2**, (1956), 296-306.
 88. V. G. Levich, "Physicochemical Hydrodynamics," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. (1962).
 89. S. Levy, "Steam Slip-Theoretical Prediction From Momentum Model," *Trans. ASME, Ser. C*, **82** (1960), 113-124.
 90. S. Levy, "Prediction of Two-Phase Pressure Drop and Density Distribution From Mixing Length Theory," *Trans. ASME, Ser. C*, **85** (1963), 137-152.
 91. S. Levy, "Theoretical Predictions of Fully Developed Adiabatic Two-Phase Flow," pp 35-53, "Symposium on Two-Phase Flow," Vol. 1, University of Exeter, England (1965).
 92. M. J. Lighthill and G. B. Whitham, "On Kinematic Waves, I. Flood Movement in Long Rivers," *Proc. Roy. Soc.*, **A229** (1955), 281-316.
 93. M. J. Lighthill and G. B. Whitham, "On Kinematic Waves, II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads," *Proc. Roy. Soc.*, **A229** (1955), 317-345.
 94. R. W. Lockhart and R. C. Martinelli, "Proposed Correlation of Data for Isothermal Two-Component Flow in Pipes," *Chem. Eng. Prog.*, **45** No. 1 (1949), 39-48.
 95. J. F. Mahoney and L. A. Wenzel, "Formation of Moderate Sized Bubbles," *AIChE Journal*, **9**

- (1963), 641-645.
96. J. F. Marchaterre and *et al.*, "Correlation for Two-Phase Flow," *Nucleonics*, **20**, No. 8 (1958), 142.
 97. G. Marrucci, "Rising Velocity of a Swarm of Spherical Bubbles," *Ind. Eng. Chem. Fundamentals*, **4** (1965), 224-225.
 98. R. C. Martinelli, L. M. K. Boelton, T. H. M. Taylor, E. G. Thomsen and E. H. Morrin, "Isothermal Pressure Drop for Two Phase Two-Component Flow in a Horizontal Pipe," *Trans. ASME*, **66** (1944), 139-151.
 99. K. A. Melkersson, Private Communication cited by Nicklin [111].
 100. J. E. Meyer, "Conservation Laws in One-Dimensional Hydrodynamics," *Bettis Technical Review*, **20** (1960), 61-72.
 101. G. D. Miles, L. Shedlovsky and J. Ross, "Form Drainage," *J. Phys. Chem.*, **49** (1945), 93-107.
 102. O. Miyagi, "The Motion of an Air Bubble Rising in Water," *Phil. Mag.*, Ser. 6, **50** (1925), 112-140.
 103. R. Moissis, "The Transition from Slug to Homogeneous Two-Phase Flow," *Trans. ASME*, Ser. C, **85** (1963), 366-370.
 104. R. Moissis and P. J. Berenson, "On the Hydrodynamic Transitions in Nucleate Boiling," *Trans. ASME*, Ser. C, **85** (1963), 221-229.
 105. R. Moissis and P. Griffith, "Entrance Effects in a Two-Phase Slug Flow," *J. of Heat Transfer*, *Trans. ASME*, Ser. C, **84** (1962), 29-39.
 106. R. Moissis and N. A. Radovich, "Two-Phase Flow Through a Vertical Venturi," ASME paper 63-HT-42 (1963).
 107. D. W. Moore, "The Rise of a Gas Bubble in a Viscous Fluid," *J. Fluid Mech.*, **6** (1959), 113-130.
 108. D. W. Moore, "The Boundary Layer on a Spherical Gas Bubble," *J. Fluid Mech.*, **16** (1963), 161-176.
 109. T. V. Moore and H. D. Wilde, "Experimental Measurements of Slippage in Flow Through Vertical Pipes," *AIME Trans.*, **92** (1931), 296-313.
 110. R. M. Nedderman and C. J. Shearer, "The Motion and Frequency of Large Disturbance Waves in Annular Two-Phase Flow of Air Water Mixtures," *Chem. Eng. Sic.*, **18** (1963), 661-670.
 111. D. J. Nicklin, "Two-Phase Bubble Flow," *Chem. Eng. Sic.*, **17** (1962), 693-702.
 112. D. J. Nicklin and J. F. Davidson, "The Onset of Instability in Two-Phase Slug Flow," *Proc. Inst. Mech. Engrs. (London)*, Symposium on Two-Phase Flow, paper No. 4 (Feb. 1962).
 113. D. J. Nicklin, J. O. Wilkes and J. F. Davidson, "Two-Phase Flow in Vertical Tubes," *Trans. Inst. Chem. Engrs. (London)*, **40** (1962), 61-68.
 114. M. P. O'Brien and J. E. Gosline, "Velocity of Large Bubbles in Vertical Tubes," *Ind. Eng. Chem.*, **27** (1935), 1436-1440.
 115. J. S. Owens, "Experiments on Air Lift Pumping," *Engineering*, **112** (1921), 458-461.
 116. Y. Park, "The Formation of Bubbles from Submerged Orifices," Ph. D. Thesis, University of Utah (1974).
 117. F. N. Peebles and H. J. Garber, "Studies of the Motion of Gas Bubbles in Liquids," *Chem. Eng. Prog.*, **49** No. 2 (1953), 88-97.
 118. J. H. Perry, ed., "Chemical Engineers' Handbook," 4th ed., McGraw-Hill Book Company, New York (1963).
 119. S. J. Pirson, "Oil Reservoir Engineering," McGraw-Hill Book Company, New York (1958).
 120. A. A. Poutanen and A. I. Johnson, "Studies of Bubble Formation and Rise," *Can. J. Chem. Eng.*, **38** (1960), 93-99.
 121. J. F. Richardson and D. J. Higson, "A Study of the Energy Losses Associated with the Operation of An Air-Lift Pump," *Trans. Inst. Chem. Engrs.*, **40** (1962), 169-182.
 122. J. F. Richardson and W. N. Zaki, "Sedimentation and Fluidisation; Part I," *Trans. Inst. Chem. Engrs.*, **32** (1954), 35-53.
 123. N. C. J. Ros, "Simultaneous Flow of Gas and Liquid as Encountered in Well Tubing," *J.*

- Petrol. Tech.*, **31**, (1961), 1037-1049.
124. T. W. F. Russell and D. E. Lamb, "Flow Mechanism of Two-Phase Annular Flow," *Can. J. Chem. Eng.*, **43** (1965), 237-245.
 125. D. P. Rybczynski, "On the Translatory Motion of a Fluid Sphere in a Various Medium," *Bull. Intl. Acad. Sci. Cracovie*, **A1** (1911), 40-46.
 126. H. L. Shulman and M. C. Molstad, "Gas Bubble Columns for Gas-Liquid Contacting," *Ind. Eng. Chem.*, **42** (1950), 1058-1070.
 127. W. Siemes, "Gasblasen Flüssigkeiten, Teil I: Entstehung von Gasblasen an nach Oben Gerichtet, Kreisförmigen Düsen," *Chem.-Ing.-Tech.*, **26** (1954), 479-496.
 128. W. Siemes, "Gasblasen in Flüssigkeiten, Teil II: Der Aufstieg von Gasblasen in Flüssigkeiten," *Chem.-Ing.-Tech.*, **26** (1954), 614-629.
 129. W. Siemes and E. Borchers, "Begasung von Flüssigkeiten durch poröse Sintermetalle," *Chem.-Ing.-Tech.*, **28** (1956), 783-785.
 130. W. Siemes and K. Günther, "Gasdispersion in Flüssigkeiten durch Düsen bei hohen Durchsätzen," *Chem.-Ing.-Tech.*, **28** (1956), 389-395.
 131. H. H. Steinour, "Rate of Sedimentation," *Ind. Eng. Chem.*, **36** (1944), 618-624, 840-847, and 901-907.
 132. G. G. Stokes, "On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulum," *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **9** (1851), 8.
 133. K. Takeda, "A Method for Analyzing the Vertical Flow of Liquid-Solid Systems," *Kagaku Kogaku*, **23** (1959), 574.
 134. G. I. Taylor, "The Formation of Emulsions in Definable Fluids of Flow," *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A146** (1934), 501-523.
 135. N. H. Taylor, G. F. Hewitt, and P. M. C. Lacey, "The Motion and Frequency of Large Disturbance Waves in Annular Two-Phase Flow of Air-Water Mixtures," *Chem. Eng. Sci.*, **81** (1963), 537-552.
 136. M. R. Tek, "Multiphase Flow of Water, Oil, and Natural Gas Through Vertical Flow Strings," *J. Petrol. Tech.*, **13** (1961), 1029-1036.
 137. S. Uchida, "Slow Viscous Flow Through a Mass of Particles," *Ind. Eng. Chem.*, **46** (1954), 1194-1195.
 138. S. Uno and R. C. Kintner, "Effect of Wall Proximity on the Rate of Rise of Single Air Bubbles in a Quiescent Liquid," *AIChE Journal*, **2** (1956), 420-425.
 139. L. C. Uren, P. P. Gregory, R. A. Hancock and G. V. Feskov, "Flow Resistance of Gas Oil Mixtures Through Vertical Pipes," *Trans. AIME*, **91** (1930), 209-219.
 140. V. Vand, "Viscosity of Solutions and Suspensions," *J. Phys. Coll. Chem.*, **52** (1948), 277-321.
 141. D. W. van Krevelen and P. J. Hoftijzer, "Studies of Gas-Bubble Formation," *Chem. Eng. Prog.*, **46** No. 1 (1950), 29-35.
 142. H. Verschoor, "Some Aspects of the Motion of a Swarm of Gas Bubbles Rising Through a Vertical Liquid Column," *Trans. Inst. Chem. Engrs. (London)*, **28** (1950), 52-62.
 143. J. Versluys, "Some Principles Governing the Choice of Length and Diameter of Tubing in Oil Wells," *AIME Trans.*, **92** (1931), 279-293.
 144. J. Versluys, "Mathematical Development on the Theory of Flowing Oil Wells," *AIME Trans.*, **118** (1936), 56-70.
 145. G. B. Wallis, "Some Hydrodynamic Aspects of Two-Phase Flow and Boiling," Intl. Heat Transfer Conf., Boulder, Colorado, Paper No. 38, ASME, (1961).
 146. G. B. Wallis, "One-Dimensional Waves in Two-Component Flow," United Kingdom Atomic Energy Authority rept. AEEW-R162 (1962).
 147. G. B. Wallis, "One-Dimensional Two-Phase Flow," McGraw-Hill Book Company, New York (1969).
 148. J. W. Westwater and J. G. Santagelo, "Photographic Study of Boiling," *Ind. Eng. Chem.*, **47** (1955), 1605-1610.
 149. E. T. White and R. H. Beardmore, "The Velocity of Rise of Single Cylindrical Air Bubbles through Liquids in Vertical Tubes," *Chem. Eng. Sci.*, **17** (1962), 351-361.

150. F. Yoshida and K. Akida, "Performance of Gas Bubble Columns: Volumetric Liquid-Phase Mass Transfer Coefficient and Gas Holdup," *AIChE Journal*, **11** (1965), 9-14.
151. C. B. F. Young and K. W. Coons, "Surface Active Agents," Chemical Rubber Company, Inc., Brooklyn, New York (1945).
152. N. Zuber, "On the Dispersed Two-Phase Flow in the Laminar Flow Regime," *Chem. Eng. Sci.*, **19** (1964), 897-917.
153. N. Zuber and J. A. Findlay, "Average Volumetric Concentration in Two-Phase Flow," *Trans. ASME, Ser. C*, **87** (1965), 453-468.
154. N. Zuber and F. W. Staub, "An Analytical Investigation of the Transient Response of the Volumetric Concentration in a Boiling Forced-Flow System," *Nuclear Sci. and Eng.*, **30** (1967), 268-278.

