

다단식 흡수탑의 연속모델

金 尙 煥 · 李 賢 九

서울대학교 공과대학 화학공학과

(접수 1976. 11. 10)

Continuous Model for a Multistage Absorption Column

Sang-Hwan Kim and Hyun-Ku Rhee

*Department of Chemical Engineering, College of Engineering
 Seoul National University, Seoul 130-02, Korea*

(Received November 10, 1976)

요 약

다단식 흡수탑의 단수를 연속변수로 취급하여 연속모델을 설정하였다. 이 경우에 비정상상태의 물질수지식은 차분-미분방정식계 대신에 단 하나의 편미분방정식으로 표현되며 그 해가 급수형으로 유도되는데 빨리 수렴하므로 실제 계산에 편리하게 이용될 수 있다. 따라서 종래의 불연속모델에 비하여 특히 단수가 많은 경우에는 연속모델이 장점을 갖게 된다. 6개의 단으로 구성되는 흡수탑을 예로 들어 정상상태 및 과도응답을 해석하고 연속모델과 불연속모델을 비교하여 연속모델의 유효성과 실용성을 입증하였다. 한편 연속모델을 이용하여 여러 경우에 대한 흡수탑의 동특성을 조사하였다.

Abstract

A continuous model for a multistage absorption column is developed by considering the stage number as a continuous variable. Mathematical formulation of the unsteady state material balance gives rise to a single partial differential equation instead of a large system of difference-differential equations. Analytic solution is determined in a series form which converges very fast and thus the

continuous model has merits in comparison to the discrete model especially when the number of stages becomes large. By using a numerical example for a six-stage absorber the two models are compared in terms of the steady state profiles and the dynamic response curves. The agreements turn out to be remarkable and thereby the continuous model proves itself to be valid and useful in describing the dynamic behavior of multistage absorption column. Application of the continuous model is further extended to study the various cases of dynamic behavior.

1. 서 론

다단식 흡수탑의 동특성에 관하여는 이미 많은 연구가 수행된 바 있으나 최근에는 그 공정의 제어, 최적화 및 최적제어와 관련하여 새로운 연구의 대상이 되고 있다. 다단식 흡수탑의 동특성에 관한 연구는 Laplace 변환법을 도입하여 차분-미분방정식계의 해를 유도한 Lapidus와 Amundson¹⁾에서 비롯되며 그 후 Acrivos와 Amundson²⁾은 선형대수학을 이용한 해법을 제시하였다. 이어서 Nobbe³⁾, Coughanowr와 Koppel⁴⁾, Lees⁵⁾ 등은 기포캡 (bubble-cap) 흡수탑의 경우 액체유량의 계단식 변화에 대한 동특성을 면밀하게 검토하였다.

한편 Lapidus와 Luus를 중심으로 하는 연구진들은 다단식 흡수공정의 제어 및 최적화의 문제를 대상으로 상당한 연구의 진전을 이루고 있다. 선형의 평형관계식에 대하여는 이미 다양한 기법을 적용하여 그 결과가 보고되어 있으며⁶⁻¹³⁾ 최근에는 비선형 평형관계식을 도입하여 최적제어의 문제를 해결하는 연구가 진행되고 있다.^{14, 15)}

다단식 흡수탑의 단수는 실제로 불연속변수가 되기 때문에 물질수지식이 차분-미분방정식계로 나타나고 단수가 증가함에 따라서 수식의 처리가 복잡하여지며 계산에 많은 시간을 요하게 된다. 종래의 연구가 6 단 또는 그 이하의 흡수탑에 국한되었던 것도 부분적으로는 이러한 연유에 기인된 것으로 생각된다.

본 연구에서는 흡수탑의 단수를 연속변수로 간주하는 연속모델의 개념을 도입하여 차분-미분방정식계를 하나의 편미분방정식으로 변환시키고 이 연속모델을 이용하여 흡수탑의 여러 특성

을 해석하는 동시에 그 결과를 종래의 불연속모델에 의한 결과와 비교, 검토함으로써 연속모델의 유효성과 실용성을 입증하고자 한다.

2. 연속변수 기법 (Continuons Variable Technique)

화학공학프로세스에 흔히 나타나는 다단식 공정에 대하여 물질 및 에너지수지를 수식화하면 단수 j 와 관련된 차분방정식을 얻게 된다. 그러나 단수가 비교적 커서, 두개의 단사이에서 일어나는 변화가 심하지 않을 때에는 불연속변수 j 를 연속변수로 취급하여도 오차가 심하지 않을 것으로 예견된다. 즉 다음과 같이 연속이며 미분 가능한 함수를 정의하기로 한다.

$$\begin{cases} j = \text{정수이면, } f(j) = f_j \\ j \neq \text{정수이면, } f(j) = \text{유일하게 내삽된 값} \end{cases} \quad (1)$$

그러나 실제로 최종단계에서 필요한 $f(j)$ 의 값은 j 가 정수인 경우뿐이므로 $f(j)$ 를 위한 내삽공식을 구체적으로 정의할 필요는 없다.

여기서 $f(j+1)$ 과 $f(j-1)$ 을 생각하여 Taylor 급수로 전개하면

$$f(j \pm 1) = f(j) \pm \frac{df(j)}{dj} + \frac{1}{2} \frac{d^2f(j)}{dj^2} + H.O.T. \quad (2)$$

단 $H.O.T.$ 은 3차이상의 도함수를 포함하는 항들의 총화를 나타낸다. 식 (2)에서 $H.O.T.$ 을 무시하고 그 결과를 차분방정식계에 적용하면 하나의 2차미분방정식을 얻게 된다.

한편 연속함수 $f(j)$ 는 Euler-Maclaurin의 합산 공식¹⁶⁾에 의하여 다음과 같이 불연속함수 f_j 와 연관을 갖게 된다. 즉

$$\sum_{j=0}^N f_j = \int_0^N (j) dj + \frac{1}{2} [f(0) + f(N)] + \frac{1}{12} \left[\frac{df(N)}{dj} - \frac{df(0)}{dj} \right] + H.O.T. \quad (3)$$

단수 N 이 클 때에는 $f(j)$ 의 기울기가 작을 것이며 따라서 $H.O.T.$ 을 적분항에비하여 무시하여도 무방할 것이다.

문헌¹⁷⁾에 의하면 이와같은 연속변수기법의 착상은 Lewis¹⁸⁾에서 비롯되는데 그는 증류탑의 정상상태를 해석함에 있어 식(2)의 2차도함수항까지 무시한 결과를 적용하여 증류탑의 단수를 계산하는 공식, 즉 Lewis식을 유도하였다. 그 후 연속변수기법을 이용하여 Cohen¹⁹⁾은 동위원소 분리의 이론을 전개하였으며 Armstrong등^{20,21)}은 증류탑의 동특성해석을 시도하였다. 그러나 연속변수기법의 체계적인 연구와 그 응용성 및 한계성의 상세한 검토는 Zeman과 Amundson^{22,23)}에 의하여 이루어 졌다. 그들은 고분자의 중합도를 연속변수로 취급하여 여러가지 중합반응에 관련된 문제를 정교하게 해석하였다.

3. 흡수탑의 연속모델

Fig. 1에 나타낸 바와같이 N 개의 단으로 구성되는 흡수탑을 생각하여 다음의 조건들이 성립한다고 가정하자.

(1) 액체는 비휘발성, 기체는 불용성이며 하나의 용질만이 액상과 기상사이에 전달된다.

(2) 액체의 질량유속 (mass flow rate) L 과 기체의 질량유속 G 는 각각 일정하며 흡수탑 전체를 통하여 균일하다.

(3) 각 단에서 액체의 호울드업 (holdup) H 와 기체의 호울드업 h 는 일정하게 유지되며 어느 단에서나 각각 같은 값을 갖는다.

(4) 각 단의 액상 및 기상에서 용질은 균일하게 분포되어 있다.

각 단에 대하여 밑에서부터 일련번호를 부여하고 j 번째 단에서 용질의 액상 및 기상에서의 함량을 무게비로 나타내어 각각 X_j 및 Y_j 로 표시하면 시간 t 때 j 번째 단에 대한 용질의 물질수지식은 다음과 같다.

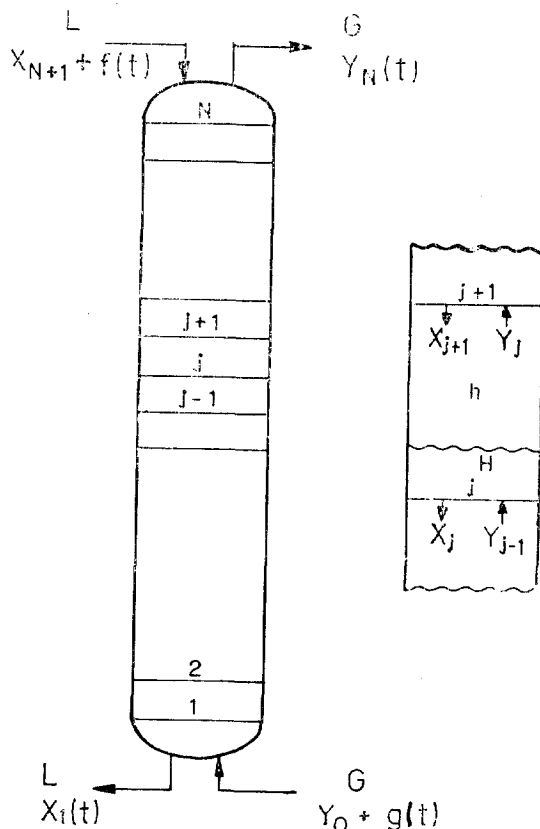


Fig. 1. Schematic diagram of a multistage absorption column.

$$H \frac{dX_j}{dt} + h \frac{dY_j}{dt} = L(X_{j+1} - X_j) + G(Y_{j-1} - Y_j), \quad j=1, 2, 3, \dots, N \quad (4)$$

각 단에서 액상과 기상은 서로 평형상태를 이룬다고 가정하고 우리는 그 평형관계가 1차식으로 주어지는 경우만을 고려하기로 한다. 즉

$$Y_j = mX_j \quad (5)$$

만일 평형관계식이 $Y_j = mX_j + C$ 로 주어지면 다음과 같이 새로운 변수 X'_j 와 Y'_j 를 정의하여 식(5)와 같은 형태로 변형시킬 수 있다.

$$X'_j \equiv X_j - \frac{C}{1-m}, \quad Y'_j \equiv Y_j - \frac{C}{1-m} \quad (6)$$

식(5)를 식(4)에 적용하면

$$(H+mh)\frac{dX_j}{dt}=L(X_{j+1}-X_j)+mG(X_{j-1}-X_j) \\ j=1, 2, 3, \dots, N \quad (7)$$

여기서 불연속변수 j 를 연속변수로 간주하면 불연속함수 $X_j(t)$ 는 식 (1)에서 정의된 것과 같이 연속함수 $X(j, t)$ 로 표시되고 식 (7)에 나타난 차분들은 각각 다음과 같이 변형된다.

$$X(j\pm 1, t)-X(j, t)=\pm \frac{\partial X}{\partial j}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 X}{\partial j^2} \\ +H.O.T. \quad (8)$$

$H.O.T.$ 를 무시하고 식 (7)에 대입하면 N 개의 차분-미분방정식대신에 단 하나의 포물선형 편미분방정식을 얻게 된다. 즉

$$\frac{\partial X}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 X}{\partial j^2}+2\tau\frac{\partial X}{\partial j}, \quad 0<j<N+1, \quad \tau>0 \quad (9)$$

단 τ 와 τ 는 다음과 같이 정의되며

$$\tau\equiv \frac{t}{2} \cdot \frac{L+mG}{H+mh}=\text{무차원시간변수} \quad (10)$$

$$\tau\equiv \frac{A-1}{A+1} \quad (11)$$

$$A\equiv \frac{L}{mG}=\text{흡수인자 (absorption factor)} \quad (12)$$

식 (9)에 대한 경계조건과 초기조건은 다음과 같이 적절하게 표시된다.

$$\begin{cases} j=0 & \text{에서, } X=(Y_0+h(\tau))/m \\ j=(N+1) & \text{에서, } X=X_{N+1}+f(\tau) \\ \tau=0 & \text{에서, } X=X_{ss}(j) \end{cases} \quad (13)$$

여기서 $X_{ss}(j)$ 는 양단의 경계조건이 Y_0/m 과 X_{N+1} 로 고정되어 정상상태에 도달하였을 때에 용질의 분포를 나타낸다.

4. 전달함수와 과도응답

정상상태에서의 용질의 분포 $X_{ss}(j)$ 는 다음 방정식의 해로 주어지며

$$\frac{d^2 X}{dj^2}+2\tau\frac{dX}{dj}=0, \quad 0<j<N+1 \quad (14)$$

$$\begin{cases} j=0 & \text{에서, } X=Y_0/m \\ j=(N+1) & \text{에서, } X=X_{N+1} \end{cases} \quad (15)$$

따라서 다음과 같이 표시된다.

$$X_{ss}(j)=\frac{1}{1-e^{2\tau(N+1)}}\left\{\frac{Y_0}{m}(e^{-2\tau j}-e^{-2\tau(N+1)})\right. \\ \left.+X_{N+1}(1-e^{-2\tau j})\right\} \quad (16)$$

새로이 편차변수 (deviation variable)를 정의하여

$$\delta X(j, \tau)\equiv X(j, \tau)-X_{ss}(j) \quad (17)$$

식 (9)와 식 (13)에 적용하면 다음식을 얻고

$$\frac{\partial \delta X}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 \delta X}{\partial j^2}+2\tau\frac{\partial \delta X}{\partial j} \quad (18)$$

$$\begin{cases} j=0 & \text{에서, } \delta X=g(\tau)/m \\ j=(N+1) & \text{에서, } \delta X=j(\tau) \\ \tau=0 & \text{에서, } \delta X=0 \end{cases} \quad (19)$$

여기에 Laplace 변환을 적용하여

$$\mathcal{L}[\delta X(j, \tau)]=\overline{\delta X}(j, s), \quad \mathcal{L}[f(\tau)]=\overline{f}(s), \\ \mathcal{L}[g(\tau)]=\overline{g}(s)$$

로 표시하면 식 (18)은 $\overline{\delta X}(j, s)$ 에 관한 2차의 상미분방정식으로 변환되며 이것을 풀어서 다음식을 얻게 된다.

$$\overline{\delta X}(j, s)=e^{\tau(N+1-j)}\overline{f}(s)\frac{\sinh \sqrt{\tau^2+s}j}{\sinh \sqrt{\tau^2+s}(N+1)} \\ +\frac{e^{-\tau j}}{m}\overline{g}(s)\frac{\sinh \sqrt{\tau^2+s}(N+1-j)}{\sinh \sqrt{\tau^2+s}(N+1)} \quad (20)$$

식 (20)은 입력 (input)의 변화에 대한 출력 (output)의 변화를 나타내는 전달함수의 성격을 가지며 실제로 상단의 입력은 변하지 않고 하단의 입력에만 변화가 있는 경우에는 $\overline{f}(s)=0$ 이므로 전달함수는

$$G(s)=\frac{\overline{\delta X}(j, s)}{\overline{g}(s)}=\frac{e^{-\tau j}}{m}\frac{\sinh \sqrt{\tau^2+s}(N+1-j)}{\sinh \sqrt{\tau^2+s}(N+1)} \quad (21)$$

로 주어진다. 반대의 경우에도 전달함수의 분모는 동일하므로 흡수탑의 동특성에 관한 한 상단 및 하단의 입력변화는 동일한 효과를 갖는 것임을 알 수 있다.

입력의 변화에 대한 흡수탑의 과도응답 (transient response)은 식 (20)을 역 Laplace 변환하여 얻게 되는데 식 (20)의 분모는 다음의 식으로

표현되는 무한개의 단순 폴 (simple pole)을 가지므로²⁴⁾

$$s_k = -\left(\frac{\pi k}{N+1}\right)^2 - \gamma^2, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

레지듀 (residue) 정리와 콘볼루션 (convolution) 정리를 이용하면 다음과 같이 과도응답식을 얻게 된다^{24, 25)}.

$$\begin{aligned} \delta X(j, \tau) = & \frac{2\pi}{(N+1)^2} e^{\gamma(N+1-j)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k \sin \frac{\pi k j}{N+1} \\ & \int_0^{\tau} f(\tau-\theta) e^{s_k \theta} d\theta + \frac{2\pi}{(N+1)^2 m} e^{-\gamma j} \sum_{k=1}^{\infty} k \sin \\ & \frac{\pi k j}{N+1} \int_0^{\tau} g(\tau-\theta) e^{s_k \theta} d\theta \end{aligned} \quad (23)$$

여기서 주목할 점은 모든 폴이 음의 실수로 주어지므로 모든 유한한 변화에 대하여 흡수탑의 거동 (behavior)은 항상 안정하며 또한 k 가 증가함에 따라서 s_k 의 절대값이 급격히 커지므로 식(23)의 급수는 상당히 빨리 수렴하게 된다는 것이다

5. 불연속모델 (Discrete Model) 과의 비교

흡수탑의 상단의 입력에는 변화가 없고 하단의 입력에 크기 Δ 의 계단변화가 도입되는 경우를 생각하자. 즉

$$f(\tau)=0, \quad g(\tau)=\Delta(\text{상수}) \quad (24)$$

식(23)에 대입하여 적분을 행하면 계단응답(step response)식을 얻게 되며

$$\delta X(j, \tau) = \frac{2\pi \Delta}{(N+1)^2 m} e^{-\gamma j} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{s_k} \sin \frac{\pi k j}{N+1} \{1 - e^{s_k \tau}\} \quad (25)$$

이 식의 우변에서 시간 τ 에 무관한 부분은 $(\Delta/m) (1 - e^{2\gamma(N+1-j)}) / (1 - e^{2\gamma(N+1)})$ 의 sine 급수전개에 해당하므로 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta X(j, \tau) = & \frac{\Delta}{m} \frac{1 - e^{2\gamma(N+1-j)}}{1 - e^{2\gamma(N+1)}} - \frac{2\pi \Delta}{(N+1)^2 m} e^{-\gamma j} \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{s_k} e^{s_k \tau} \sin \frac{\pi k j}{N+1} \end{aligned} \quad (26)$$

여기서 우변의 첫째 항은 최종변위를 나타내며

무한급수항은 시간에 대한 변화를 나타내고 있다.

식(26)에 식(16)을 더하면 실제로 시간 τ 에서 j 번째 단의 액상이 갖는 용질의 함량을 나타내는 식을 얻는다. 상부에서 유입되는 액체가 용질을 포함하지 않는 경우에는 $X_{N+1}=0$ 이며 따라서

$$\begin{aligned} X(j, \tau) = & \frac{Y_0 + \Delta}{m} \frac{1 - e^{2\gamma(N+1-j)}}{1 - e^{2\gamma(N+1)}} - \frac{2\pi \Delta}{(N+1)^2 m} e^{-\gamma j} \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{s_k} e^{s_k \tau} \sin \frac{\pi k j}{N+1} \end{aligned} \quad (27)$$

동일한 경우에 대하여 불연속모델에 의한 과도응답은 Lapidus와 Amundson¹⁾이 보고한 바 있으며 본 논문의 기호를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$X_{j,ss} = \frac{Y_0}{m} \frac{1 - A^{N+1-j}}{1 - A^{N+1}}$$

$$\begin{aligned} X_j(\tau) = & -\frac{2}{N+1} A^{(N+1-j)/2} \sum_{k=1}^N (-1)^k e^{\alpha_k \tau} \\ & \sin \frac{\pi k j}{N+1} \sum_{n=1}^N X_{n,ss} A^{-n/2} \sin \frac{\pi k n}{N+1} \\ & + \frac{2G(Y_0 + \Delta) A^{(1-j)/2}}{(H + mh) (N+1)} \sum_{k=1}^N \frac{e^{\alpha_k \tau} - 1}{\alpha_k} \sin \frac{\pi k j}{N+1} \\ & \sin \frac{\pi k j}{N+1} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\alpha_k = -2 \left(1 - \frac{2\sqrt{A}}{1+A} \cos \frac{\pi k}{N+1} \right), \quad k=1, 2, 3, \dots, N \quad (30)$$

식(29)에 비하여 식(27)은 훨씬 간편한 형태로 표현되어 있어 계산에 편리할 뿐만 아니라 식(30)에 의하여 결정되는 N 개의 α_k 들은 그 값이 서로 대등하므로 식(29)에 포함된 급수의 모든 항들을 전부 계산하여야 하지만 식(27)의 경우에는 급수가 매우 빨리 수렴하므로 대체로 처음의 셋 또는 네항정도만 계산하면 만족할 만한 결과를 얻게되는 잇점이 있다. 이러한 장점은 횡단수 N 이 증가함에 따라서 더욱 효과적인 것을 알 수 있다.

6. 예제 (Numerical Example)

연속모델을 실제로 불연속모델과 비교하여 그

유효성을 입증하는 한편 흡수탑의 여러 특성을 구체적으로 검토하기 위하여 특정한 예제를 들어 고찰하기로 한다. 이 예제는 Lapidus와 Amundson¹⁾에 의하여 연구된 것과 동일하며 각 파라미터의 값과 단위는 다음과 같다.

$$N=6, \quad m=0.72 \frac{\text{g-solute}}{\text{g-air}} / \frac{\text{g-solute}}{\text{g-water}},$$

$$H=34.05 \text{ kg-water}, \quad h=0.45 \text{ kg-air},$$

$$L=18.52 \text{ kg-water/min}, \quad G=30.28 \text{ kg-air/min}$$

$$Y_0=0.2 \text{ g-solute/g-air}, \quad X_{N+1}=0, \quad g(\tau)=0.$$

이 예제에 대하여 정상상태를 해석하고 계단 응답과 입력의 게이트(gate) 형변화에 대한 과도 응답을 통하여 등특성을 관찰하면서 연속모델과 불연속모델을 비교하기로 한다.

7. 정상상태의 해석

제 6 절의 예제에서 흡수인자는 $A=0.85$ 이며 따라서 $\gamma=-0.081$ 로 주어진다. 식 (16)에 의하여 정상상태에서 용질의 분포를 계산하면 Fig. 2에 실선 ($A=0.85$)으로 표시한 바와 같으며 (연속모델), 식 (28)에 의한 결과는 점선으로 나타내었다(불연속모델).

이 경우에 정상상태의 분포곡선은 그 기울기가 심하게 변화하지 않으므로 연속모델이 만족할만한 결과를 나타낼 것으로 예상되며 실제로 두 모델에 의한 결과는 거의 일치하고 있음을 관찰할 수 있다.

흡수인자 A 의 값을 여러가지로 변화시키면서 두 모델에 의한 정상상태를 계산하여 Fig. 2에 함께 나타내었다. L 과 mG 의 값이 거의 대등하여 흡수인자 A 가 1 근처의 값을 가질 때에는 흡수탑의 전단에 걸쳐 물질전달이 효과적으로 일어나며 용질의 분포가 거의 직선적이므로 두 모델에 의한 결과가 좋은 일치를 보여준다.

그러나 A 의 값이 상당히 작게 되면 흡수탑의 상반부에서만 물질전달이 주로 일어나고 용질의 분포곡선이 상반부에서는 큰 곡률을 가지므로 연속모델에 의한 결과가 비교적 큰 오차를 나타내게 된다. 반대로 A 의 값이 상당히 클 때에는 흡수탑의 하반부에서만 물질전달이 주로 일어나며

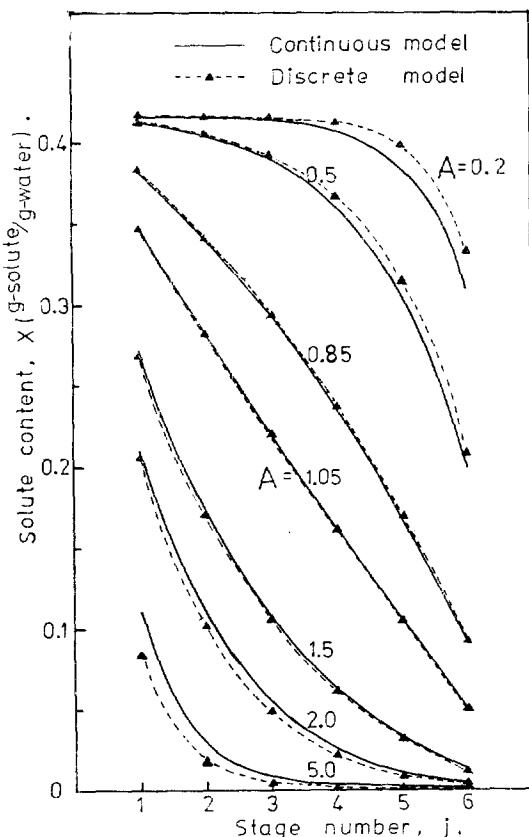


Fig. 2. Steady state profiles of the solute content in the six-stage absorption column.

용질의 분포곡선이 하반부에서 큰 곡률을 갖게 되어 역시 큰 상위를 나타내고 있다.

이상의 관찰을 종합하면 흡수탑의 조작시에는 흡수인자 A 의 값이 1 근처로 되도록 액체 및 기체의 유량을 조절하는 것이 바람직하며 이러한 경우에는 연속모델을 이용하면 만족할만한 결과를 얻을 수 있다.

8. 계단응답 (Step Response)

제 6 절의 예제에서 흡수탑이 일단 정상상태에 도달한 후 다시 하단의 입력에 크기 $\Delta=0.1$ g-solute/g-air의 계단변화가 도입되는 경우를 생각하자. 이 경우에 흡수탑 각단의 응답은 식 (26)으로 주어지며 편차변수 δX 를 각 단에서 시간의 함수로 계산하여 Fig. 3에 실선으로 표시하였다 (연속모델). 다시 식 (28)과 식 (29)로부터 편차변수를 산출하여 Fig. 3에 점선으로 나타내고 (불연속모델) 양자를 서로 비교하였다.

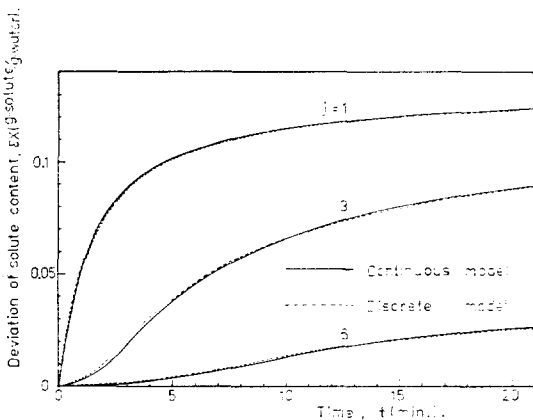


Fig. 3. Step response of the solute content in the six-stage absorption column.

흡수탑의 총단수가 불과 6개인 점을 감안할 때 두 모델에 의한 결과가 Fig. 3에서와 같은 일치를 보인 것은 주목할 만하며 흡수탑의 전단을 통하여 양자 사이의 오차는 3% 미만이었다. 특히 식 (27)의 급수계산에서는 제 4 항의 절대값이 10^{-6} 이하로 되어 무한급수가 상당히 빨리 수렴하므로 실제 계산에 편리함을 알 수 있었다.

Fig. 3에 의하면 연속모델에 의한 계단응답은 불연속모델에 의한 것보다 초기에는 완만하다가 중간에 약간 빨라지며 정상상태에 도달하기 전에 다시 늦어진다. 한편 연속모델이 분포변수계 (distributed parameter system)의 성격을 지님에

도 불구하고 흡수탑의 상부로 갈수록 계단응답이 완만하여 지는 현상을 잘 나타낼 수 있음은 주목할 만하다. 환언하면 흡수탑의 각 단은 일차계와 유사한 동특성을 나타내며 흡수탑 전체로는 여러개의 일차계가 직렬로 연결된 경우와 대등한 동특성을 나타내고 있다.

연속 모델에 의한 각 단의 계단응답곡선을 Fig. 4에 나타내었고 정상상태의 99%에 도달하는 시간을 점선으로 연결하였다. 변화가 도입되는 하단의 응답은 상당히 빨라 정상상태에 먼저 도달하며 점차로 그 영향이 상부로 전파됨을 알 수 있다.

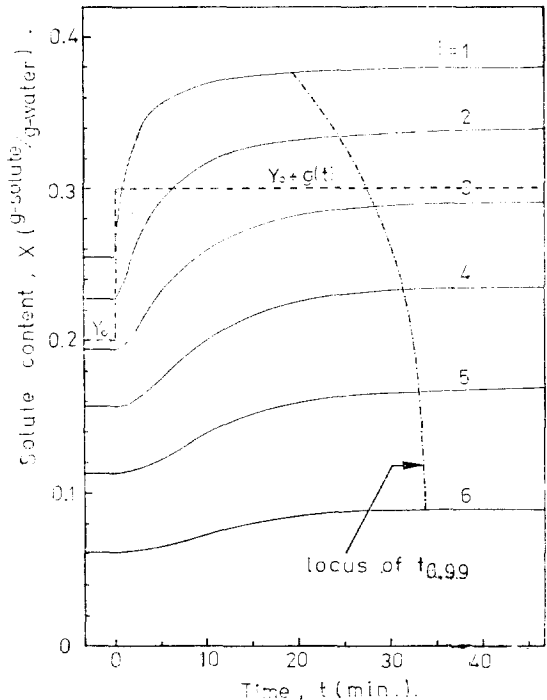


Fig. 4. Step response curves for each stage in the six-stage absorption column.

Fig. 5에서는 용질의 분포가 최초의 정상상태로부터 새로운 정상상태로 옮겨가는 과정을 나타내었다. 시간이 경과함에 따라서 분포곡선에 변형하는 모양을 관찰할 수 있다.

한편 연속모델에 의한 결과는 흡수탑의 총 단수가 증가할수록 더욱 만족스러운 것이 됨을 확

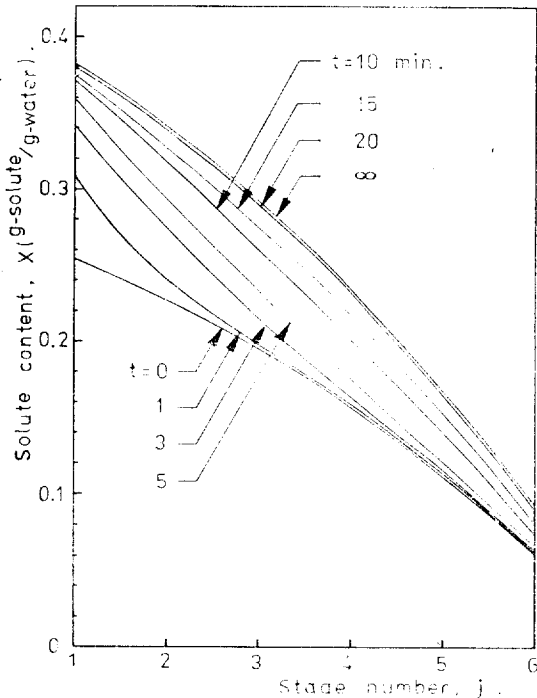


Fig. 5. Time evolution of the solute distribution in the six-stage absorption column.

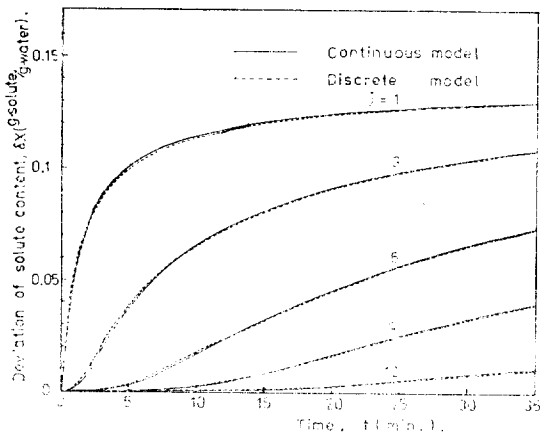


Fig. 6. Step response curves for the 12-stage absorption column.

인하기 위하여 제 6 절의 예제에서 총 단수를 12 단으로 증가시키고 계산하여 그 결과를 Fig. 6에 비교하여 나타내었다. 6 단의 경우보다 두 모델의 접근이 훨씬 더 양호하며 따라서 연속모델은 단수가 많을수록 더 효과적으로 적용될 수 있음을 알 수 있다.

9. 게이트(gate)형 변화에 대한 응답

제 6 절의 예제에서 일단 정상상태에 도달한 후 하단의 입력에 다음과 같이 게이트형 변화가 도입되는 경우를 생각하자. 즉

$$g(\tau) = \Delta \{u(\tau) - u(\tau - \tau_0)\} \quad (31)$$

단 $u(\tau)$ 는 단위계단함수 (unit step function)를 나타낸다.

식 (31)을 식 (23)에 대입하여 적분하면 (단 $f(\tau) = 0$) $\tau < \tau_0$ 인 구간에 대하여는 식 (26)과 동일한 결과를 얻으며 $\tau > \tau_0$ 인 범위에서는 다음의 응답식을 얻게 된다.

$$\delta X(j, \tau) = \frac{2\pi \Delta}{(N+1)^2 m} e^{-\tau j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{-s_k} e^{s_k \tau} (e^{-s_k \tau_0} - 1) \sin \frac{\pi k j}{N+1}, \quad \tau > \tau_0 \quad (32)$$

실제로 $\Delta = 0.1 \text{ g-solute/g-air}$, $\tau_0 = 8.8$ (실제 시간 15분에 해당)로 택하고 식 (26)과 식 (32)를 이용하여 각 단의 응답곡선을 계산한 결과를 Fig. 7에 실선으로 나타내었다. 그리고 불연속모델에 의한 계산 결과를 점선으로 표시하여 서로 비교하였다.

흡수탑의 전단에 걸쳐 두 모델에 의한 결과는 거의 일치하고 있으며 각 단에서 용질의 함량이 감소하기 시작하는 시각이 연속모델의 경우에 약간 늦어지는 것으로 나타나지만 전체적으로 보아 두 모델에 의한 응답곡선은 몇차례 서로 교차하고 있으며 그 상위를 무시할만 하다.

하단에서 도입되는 게이트형변화의 영향은 제 1단에서 가장 심하고 상부로 올라 갈수록 그 영향이 점차하게 감소되지만 다시 정상상태로 되돌아 가는데 요하는 시간은 제 1단에서 가장 짧고 상부로 갈수록 길어 진다. 제 1단의 응답곡

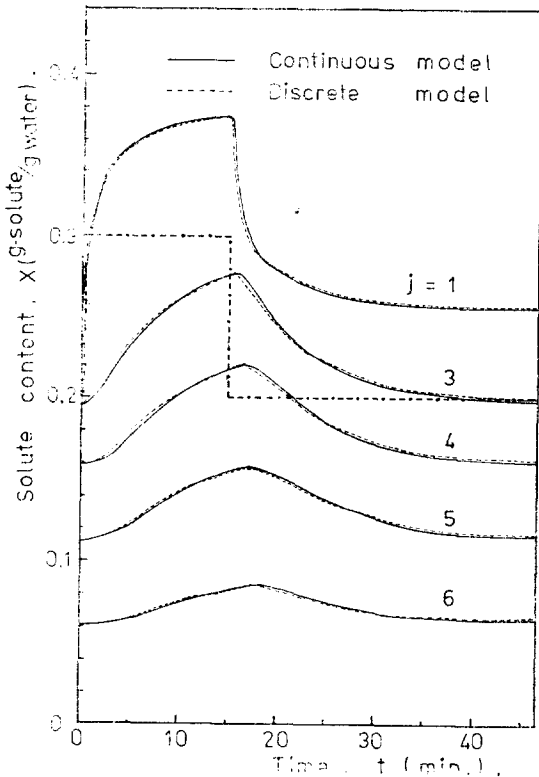


Fig. 7. Transient response to a gate-type change in the gas-phase feed composition.

선은 입력이 감소하는 것과 거의 같은 시간에 감소하기 시작하지만 상부로 올라 가면서 응답곡선이 감소하기 시작하는 시간이 조금씩 늦어진다.

이상의 관찰로 보아 다단식 흡수탑은 펄스(pulse)형의 입력변화에 대하여 좋은 안정성을 나타내며 흡수탑의 각 단을 거치는 동안에 입력변화의 영향이 빠른 속도로 소멸됨을 알수있다.

10. 결 론

본 연구에서 얻은 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 다단식 흡수탑의 단수를 연속변수로 취급하는 연속모델의 개념을 도입하여 물질수지식을 편미분방정식으로 변환하고 그 해를 구하였다.

(2) 불연속모델에 비하여 연속모델에 의한 해는 그 형태가 간단하며 급수가 빨리 수렴하므로 실제 계산에 편리한 장점이 있다.

(3) 6 개의 단으로 구성되는 흡수탑을 예로 들어 정상상태 및 과도응답을 해석하고 연속모델과 불연속모델을 비교하여 연속모델의 유효성과 실용성을 입증하였다.

(4) 흡수탑의 조작시에 흡수인자가 1근처의 값을 갖도록 유량을 조절하는 것이 효과적이다.

(5) 흡수탑의 각 단은 일차체와 유사한 동특성을 가지며 전체로는 일차체가 직렬로 연결된 경우와 유사한 동특성을 나타낸다.

(6) 흡수탑은 펄스형의 입력변화에 대하여 양호한 안정성을 가지며 각 단을 거치면서 그 영향이 빠른 속도로 소멸된다.

사 용 기 호

$A = L/mG$, 흡수인자 (-)

G 기체의 질량유속 (kg-air/min)

H 각 단의 액체 호울드업 (kg-water)

h 각 단의 기체 호울드업 (kg-air)

j 흡수탑 하단으로부터의 단수 (-)

L 액체의 질량유속 (kg-water/min)

m 상평형정수 $\left(\frac{\text{kg-solute}}{\text{kg-air}} / \frac{\text{kg-solute}}{\text{kg-water}} \right)$

N 흡수탑의 총단수 (-)

S Laplace 변환 파라미터 (-)

$S_k = \left(\frac{\pi k}{N+1} \right)^2 - \gamma^2$, k 번째 폴 (-)

t 실제시간 (min)

X 액상에서의 용질의 함량 (g-solute/g-water)

$\delta X = X - X_{ss}$, 편차변수 (g-solute/g-water)

Y 기상에서의 용질의 함량 (g-solute/g-air)

회 답 문 자

$\alpha_k = -2 \left(1 - \frac{2\sqrt{A}}{1+A} \cos \frac{\pi k}{N+1} \right)$, 식 (30)

Δ 계단변화의 크기 (g-solute/g-air)

$\gamma = (A-1)/(A+1)$, 식 (11)

$\tau = t(L+mG)/2(H+mh)$, 무차원시간

하첨자(Subscripts)

- j 흡수탑 하단으로부터의 단수
 k k 번째 폴 혹은 급수의 k 번째 항
 O 흡수탑 하단의 입력조건
 $N+1$ 흡수탑 상단의 입력조건
 ss 정상상태

참 고 문 헌

1. L. Lapidus and N. R. Amundson, *Ind. Eng. Chem.*, **42**(1950), 1071.
2. A. Acrivos and N. R. Amundson, *Ind. Eng. Chem.*, **47**(1955), 1533.
3. L. B. Nobbe, "Transient Response of a Bubble-cap Plate Absorber," M. S. Thesis, Purdue University, 1961.
4. D. R. Coughanowr and L. B. Koppel, "Process Systems Analysis and Control," McGraw-Hill, N. Y., 1965.
5. F. P. Lees, *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **9**(1970), 512.
6. L. Lapidus, E. Shapiro, S. Shapiro, and R. E. Stillman, *AIChE J.*, **7**(1961), 288.
7. L. Lapidus and R. Luus, "Optimal Control of Engineering Processes," Blaisdell, Waltham, 1967.
8. H. A. Lesser and L. Lapidus, *AIChE J.*, **12**(1966), 143.
9. V. G. Chant and R. Luus, *Can. J. Chem. Eng.*, **46**(1968), 376.
10. H. A. Bennet and R. Luus, *Can. J. Chem. Eng.*, **49**(1971), 685.
11. G. Bashien, *IEEE Trans. Auto. Control*, **AC-16**(1971), 479.
12. E. J. Schlossmacher, *AIChE J.*, **19**(1973), 409.
13. R. Luus, *Can. J. Chem. Eng.*, **52**(1974), 98.
14. A. P. J. Weber and L. Lapidus, *AIChE J.*, **17**(1971), 649.
15. N. Nishida, Y. A. Liu, L. Lapidus, and S. Hiratsuka, *AIChE J.*, **22**(1976), 505 and 513.
16. F. B. Hildebrand, "Introduction to Numerical Analysis," McGraw-Hill, N. Y., 1956.
17. C. S. Robinson and E. R. Gilliland, "The Elements of Fractional Distillation," 3rd ed., McGraw-Hill, N. Y., 1939.
18. W. K. Lewis, *Ind. Eng. Chem.*, **14**(1922), 492.
19. K. Cohen, "The Theory of Isotope Separation," McGraw-Hill, N. Y., 1951.
20. W. L. Wilkinson and W. D. Armstrong, *Chem. Eng. Sci.*, **7**(1957), 1.
21. R. M. Wood and W. D. Armstrong, *Chem. Eng. Sci.*, **12**(1960), 272.
22. R. Zeman and N. R. Amundson, *AIChE J.*, **9**(1963), 297.
23. R. Zeman and N. R. Amundson, *Chem. Eng. Sci.*, **20**(1965), 331.
24. M. R. Spiegel, "Theory and Problems of Laplace Transforms," Schaum Publishing Co., N. Y., 1965.
25. R. V. Churchill, "Operational Mathematics," 3rd ed., McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1972.