

## 밑에서 일정하게 가열되는 유체층의 안정성(점근해)

김 장 주 · 최 창 균

서울대학교 공과대학 화학공학과

(접수 1980. 5. 7)

## The Stability of A Horizontal Fluid Layer Heated Uniformly from Below (Asymptotic Analysis)

Jang Joo Kim and C.K. Choi

*Department of Chemical Engineering, College of Engineering  
Seoul National University, Seoul 151, Korea.*

(Received May 7, 1980)

### 요 약

대류가 일어나지 않는 상태에서 전도에 의한 비정상적인 온도분포를 유효 열 깊이와 밑면의 온도를 이용하여 묘사하고 이를 이용하여 간편하게 적용될 수 있는 점근해법을 제시하고 이를 이용하여 최초로 정지상태에 있는 수평면상의 유체에 대한 안정성을 해석하였다.

Prandtl 수가 큰 경우 열 disturbance는 유효 열 깊이내에 한정된다는 것을 확인할 수 있었고 온도 분포의 비선형 정도가 큰 경우 점근해법은 안정성 해석 뿐만 아니라 자연대류의 시작시간을 구하는데 잘 적용되었다.

### ABSTRACT

The extended Rayleigh-Bénard problem, where an unperturbed temperature profile is nonlinear and time-dependent, was examined by linear stability theory. The unperturbed temperature profile induced by constant heat flux from below was approximated, using a bottom temperature and penetration distance. Applying this modified temperature profile to the present system, the asymptotic power-series method was developed and the onset of natural convection was analyzed. It was found that this analysis is well applied to the transient system with the Rayleigh number larger than  $10^4$ . It is evident that for large Prandtl numbers tempera-

ture disturbances are confined within the effective thermal depth.

## 1. 서 론

수평면상에 위치한 유체층을 밑에서 가열하면 온도차이에 의하여 역밀도 기울기가 형성된다. 이 밀도 기울기가 어느 한계치를 벗어나면 자연대류가 부력에 의하여 유발된다. 어떤 조건에서 자연대류가 시작하는 가하는 문제는 열 교환기, 기체 흡수, 용매 추출등 열 및 물질 전달이 수반되는 대부분의 공정에서 중요하다. 또한 학문적으로, 난류의 근원을 밝힘에 있어서는 물론 수학적으로도 수치해석의 응용면에 있어서 중요한 의의를 가진다.

처음에 정지상태에 있는 유체층의 밑면을 서서히 가열하면 중국적으로 전도에 의한 온도 분포는 선형이 된다. 이러한 계에서 유체의 안정성은 20세기 초부터 활발히 연구되어 이론적인 해석이 실험과 잘 일치됨이 밝혀져 있다. 그러나 급격히 가열시키면, 기본온도가 시간의 함수이면서 비선형이 되고 자연대류는 온도 분포가 선형이 되기 전에 발생된다. 이러한 비정상제에 대한 안정성 해석은 1957년 Morton<sup>1)</sup>이 시도한 이래 아직까지 계속하여 논란의 대상이 되어 왔다.

처음에는 온도 분포가 선형일 경우에 잘 적용되는 'manginal stability' 개념을 비정상제에 도입시킨 frozen-time model을 적용시켜 안정성 해석이 행해졌다.<sup>1-3)</sup>

하지만 이 model은 온도 분포가 선형에 가까운 경우(서서히 가열할 경우)에만 적용된다는 것이 알려져 있다.<sup>4-6)</sup>

이와는 달리 Foster<sup>6)</sup> Gresho와 Sani<sup>7)</sup> 등은 적당한 초기 disturbance를 가정하고 이 초기 disturbance가 몇 차수 만큼 증폭되었을 때를 자연대류 시작시간으로 정의한 초기치법(intial value technique)을 이용하여 안정성을 해석하였다.

최근 Choi,<sup>7)</sup> Davis와 Choi<sup>8)</sup>는 흐르는 유체

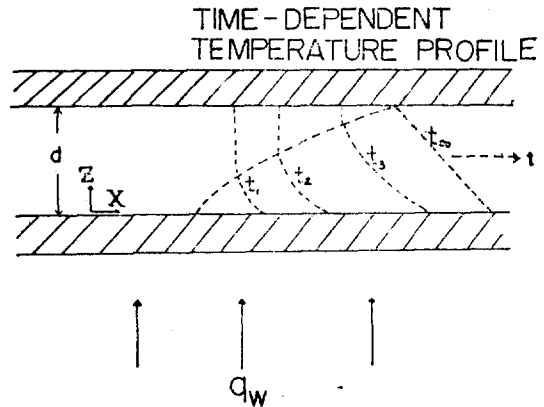


Fig. 1. Sketch illustrating conduction layer

에 대하여 초기치법을 적용시키고 증폭률(amp lification ratio)이 일정하게 결정될 수 없음을 보였다. 이들은 열 disturbance가 열 경계층내에서 시작된다고 가정하고 이 가정에 의한 model이 실험결과와 잘 일치함을 보여주었다. 또한 Kim과 Choi<sup>9)</sup>등은 Galerkin 방법을 이용하여 정지되어 있는 유체에서도 Choi가 제안한 가정을 적용시킨 "modified frozen-time model"이 잘 적용됨을 밝혔다. Choi와 Kim<sup>10)</sup>은 새로운 해석적인 방법으로 안정성을 해석하고 위 가정의 타당성을 뒷받침하여 주었다.

본 연구에서는 안정성 해석에 간편히 적용될 수 있는 접근해법을 개발하여 안정성 영역을 해석하여 기존해와 비교하여 보았다. 본 접근해법을 사용함으로써 수학적인 난점을 극복할 수 있을 뿐만 아니라 여지껏 밝혀져 있지 않은 관련된 많은 문제점들을 근본적으로 해결하게 될 것으로 믿는다.

## 2. 기 본 식

Fig. 1에 도시되어 있는 것과 같이 Kim과 Choi<sup>9)</sup> 등에 의하여 해석된 바 있는 얇은 유체층

을 고려하자. 두 수평판 사이에 있는 Newton 성 유체는 처음에 정지 상태에 있다. 유체의 폭이 무한대라고 보아 옆면 효과를 무시하면 대류가 일어나지 않는 상태에서 일정한 열속하에 있는 유체의 무차원 온도 분포는 아래와 같이 표현된다.

$$\theta_0 = 1 - z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos \lambda_n z \quad (1)$$

여기에서 하첨자 '0'는 기본상태(unperturbed state)를 나타내며  $\theta_0 = k(T - T_0)/q_w/d$ 로 정의된다.  $z = Z/d$ ,  $\tau = t\alpha/d^2$ 이며  $k$ 는 열전도도,  $d$ 는 유체층의 깊이,  $\alpha$ 는 열확산 계수를 나타내며 고유값  $\lambda_n = (n - \frac{1}{2})\pi$ 이다. 본 Graetz 해는 실험 결과와 잘 일치한다는 것이 밝혀져 있다.<sup>9)</sup>

perturbation 식들은 이미 유도되어 있으므로 유도하기까지의 중요 가정과 결과만을 기술하면 아래와 같다.

첫째 온도차에 기인한 부력에 의하여 자연대류가 시작되는 순간에서의 전형적인 disturbance는 2차원적인 stationary roll 형태를 지닌다. 본 system에서는 열경계면이 없기 때문에 임의의 disturbance는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$(w_1, \theta_1) = (w_1^*(\tau, z), \theta_1^*(\tau, z)) \exp(i(a_x x + a_y y)) \quad (2)$$

여기서  $a (= \sqrt{a_x^2 + a_y^2})$ 는 wave 수를 나타낸다.

또한  $P_r$  수는 무한대라고 가정한다. 이 가정은  $P_r \geq 7$ 인 경우에 성립된다고 알려져 있다.<sup>13, 14)</sup> 본 연구의 이론적인 해석 결과와 비교하고자 하는 Nielsen과 Sabersky<sup>12)</sup>의 실험은 silicone oil을 이용하여 행해졌는데 이것은  $P_r$  수가 45~4,770의 범위이다.

이들 가정하에서 Boussinesq 근사를 적용시키면 perturbation 식은 다음과 같이 요약된다.

$$(D^2 - a^2)^2 w_1^* = Ra a^2 \theta_1^* \quad (3)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} - (D^2 - a^2) \right] \theta_1^* + w_1^* \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

여기서  $D = \partial/\partial z$ 를 나타내며 위 경우에 적합한 경계조건들은 다음과 같다.

$$w_1^* = Dw_1^* = D\theta_1^* = 0 \text{ at } z = 0$$

$$w_1^* = Dw_1^* = \theta_1^* = 0 \text{ at } z = 1 \quad (5)$$

이들 경계조건은 상하 두 경계면에서의 no-slip 조건과 밀면에서의 열속이 일정하고 윗면은 일정 온도로 유지된다는 조건에서 얻어진 것이다.

여기에서 자연대류의 시작 시간은 그 순간의 온도 분포에 의하여 좌우된다고 가정하고 그 순간에는 '안정성 교환 원칙'이 성립된다고 가정한다. 따라서  $\partial/\partial \tau = 0$ 으로 놓을 수 있게 되며  $\tau$ 는 매개변수화하게 된다. 이 가정에 의하여 (3)과 (4)식은 다음과 같이 변형된다.

$$(D^2 - a^2)^2 w_1^* - Ra a^2 w_1^* D\theta_0 = 0 \quad (6)$$

또한 이제까지의 많은 연구로부터 재래의 frozen-time model이 비정상적에서는 기본 온도 분포가 거의 선형일 경우에만 적용됨이 알려져 있기 때문에<sup>4-9)</sup> 본 연구에서는 Choi가 제의한 modified frozen-time 개념만을 이용하여 해석하고자 한다.

### 3. 멱급수 해에 의한 안정성 해석

(1) 식과 같이  $\theta_0$ 가 용이하게 구해진다 하여도 그 해 자체가 지수함수와 sine 함수의 복합적인 형태로 주어지기 때문에 전체 perturbation 식의 해가 해석적으로 구해지지 않는다.

이것을 해결하기 위하여 상당한 논문에서는 Galerkin 방법을 이용하여 근사적으로 구하였다.<sup>6-9)</sup> 하지만 이 방법은 Kim과 Choi<sup>9)</sup> 등의 논문에서 볼 수 있는 바와 같이 시행함수에 따라 수렴이 느리기 때문에 행렬의 크기(matrix size)를 크게 증가시켜야 될 경우가 있다.

다른 한편으로 Lick<sup>2)</sup>과 Currie<sup>3)</sup>는 대류가 일어나지 않는 상태에서의 온도 분포를 두개의 선형 부분(linear segment)으로 모사하고 이때의 두 선형 부분의 교점은 실제 곡선과 모사한 선형 부분 밑의 면적이 같게 되도록 잡고 이 교점을 열깊이(thermal depth)로 잡았다.

하지만 Choi,<sup>7)</sup> Davis와 Choi<sup>8)</sup> Kim과 Choi<sup>9)</sup> 등은 열 disturbance는  $\theta_0$ 가  $\theta_{0,w}$ 의 1%되는 깊이 즉 penetration distance 내에 한정된다는 가설(modified frozen-time analysis)이 현상을 잘 설명해 줌을 밝혔다. 따라서 이 깊이가 유효 열

깊이(effective thermal depth)라고 볼 수 있다.

따라서 기본식의 복잡성을 극복하면서 본질적인 온도 분포를 유지시켜 주는 다음과 같은 멱급수 형태의 기본 온도 기울기를 고려해 볼 수 있다.

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial z} = -\left(1 - \frac{z}{\delta}\right)^n \text{ for } 0 \leq z \leq \delta \quad (7)$$

여기서  $\delta$ 는 penetration distance로  $\tau < 0.096$ 인 경우  $\theta_0$ 가  $\theta_{0,w}$ 의 1% 되는 깊이, 즉  $(10.30\tau)^{1/2}$ 으로 취하였다. 이는 Leveque 해에서 유도된 것이나 이 범위에서는 Graetz 해와 거의 일치한다.

위의 식을  $z=0$ 에서  $\delta$ 까지 적분한 후  $n$ 을 결정하면  $n = (\delta/\theta_{0,w} - 1)$ 이 되며 이 관계를 (7)식에 대입한 후 적분하게 되면 다음의 기본 온도 분포가 얻어진다.

$$\theta_0 = \theta_{0,w} \left(1 - \frac{z}{\delta}\right)^{\delta/\theta_{0,w}} \text{ for } 0 \leq z \leq \delta$$

$$\theta_0 = 0 \text{ for } 1 \geq z \geq \delta \quad (8)$$

위의 근사 온도 분포식은  $z=\delta$ 에서  $\theta_0=0$ 와  $z=0$ 에서의  $\theta_0=\theta_{0,w}$ ,  $z=0$ 에서의  $\partial \theta_0 / \partial z = -1$ 의 경계 조건들을 모두 만족시킨다.

모사 온도 분포와 실제 온도 분포의 비교는 Fig. 2에 도시되어 있다. 이 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 모사 온도 분포는 실제 온도 분

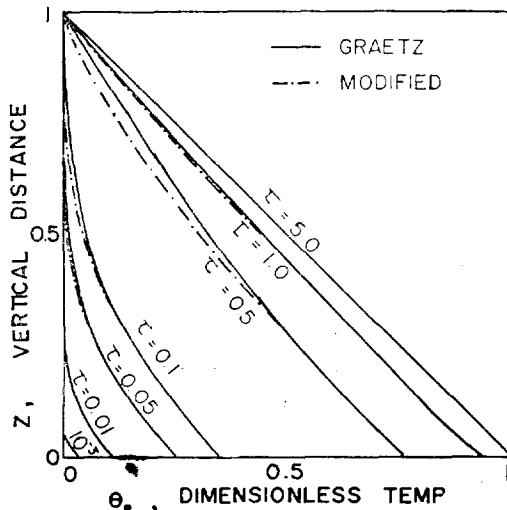


Fig. 2. Unperturbed temperature distribution: Comparison between modified one and Graetz-type solution

포보다 약간 작은 값을 보이거나 거의 일치함을 알 수 있다.

Choi<sup>7)</sup>가 제안한 modified frozen-time analysis( $z \geq \delta$ 인 범위에서  $\theta_1^* = 0$ )의 가설을 적용시키면 위의 모사 온도 분포식에 의하여 (6) 식은 다음과 같이 변형된다.

$$(D^2 - a^2)^3 w_a^* + Ra a^2 \left(1 - \frac{z}{\delta}\right)^{\delta/\theta_{0,w}} w_a^* = 0 \quad (9)$$

$$\text{for } 0 \leq z \leq \delta$$

$$(D^2 - a^2)^2 w_b^* = 0 \text{ for } \delta \leq z \leq 1 \quad (10)$$

여기에서 하첨자 'a'는  $z \leq \delta$ 인 범위에서의 변수를 지칭하며 'b'는  $z \geq \delta$ 인 범위에서의 변수를 가르킨다.

수학적인 조작의 편의상  $\zeta = z/\delta$ 로 놓고 (9)식과 (10)식을 변형하면 다음 식이 얻어진다.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \delta^2 a^2\right)^3 w_a^* + Ra a^2 \delta^6 (1 - \zeta)^{\delta/\theta_{0,w}} w_a^* = 0 \text{ for } 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \delta^2 a^2\right)^2 w_b^* = 0 \text{ for } 1 \leq \zeta \leq \frac{1}{\delta} \quad (12)$$

$\zeta=0$ 와  $\zeta=1/\delta$ 에서의 경계 조건은 다음과 같이 표시된다.

$$w_a^* = \frac{\partial w_a^*}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \delta^2 a^2\right)^2 w_a^* = 0 \text{ at } \zeta = 0 \quad (13)$$

$$w_b^* = \frac{\partial w_b^*}{\partial \zeta} = 0 \text{ at } \zeta = 1/\delta \quad (14)$$

제면 즉  $\zeta=1$ 에서의 경계 조건은 속도, stress, 온도가 연속이라는 조건에서 다음과 같이 표시된다.

$$w_a^* - w_b^* = \frac{\partial^n}{\partial \zeta^n} w_a^* - \frac{\partial^n}{\partial \zeta^n} w_b^* = 0 \text{ at } \zeta = 1 \quad (15)$$

$$(n = 1, 2, 3, 4)$$

하지만 (11)식은 아직도 일반적인 해가 용이하게 구하여질 수 없으므로 Choi와 Kim<sup>10)</sup>은 아래와 같은 Taylor series 전개를 하여 해석적인 해를 구하였다.

$$(1 - \zeta)^{\delta/\theta_{0,w}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{\delta}{m \theta_{0,w}} - 1 \right) \zeta^n \right] \quad (15a)$$

위의 식을 이용한 정확한 멱급수해는 역시 수

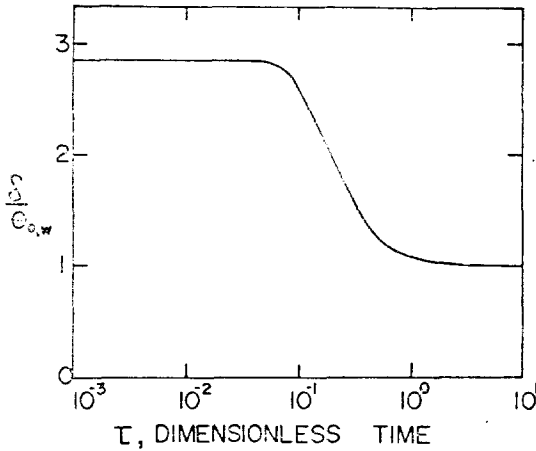


Fig. 3. Dimensionless time vs. exponent of modified unperturbed temperature profile.

학적인 어려움이 있으므로 본 연구에서는 보다 간편하게 적용될 수 있는 점근해를 구하고자 한다.

Fig. 3에 도시되어 있는 바와 같이  $\tau < 0.05$  일 때와  $\tau > 2$  인 경우  $\delta/\theta_{0,w}$  은 일정함을 알 수 있다. 이는  $\tau < 0.05$  인 경우  $\theta_{0,w}$  은  $\sqrt{\tau}$ 에 비해 하고  $\delta$  또한  $\sqrt{\tau}$ 에 비해하기 때문이며, 이 경우 전도에 대한 Graetz 해 또는 Leveque 해를 적용하면  $\delta/\theta_{0,w} = 2.84$ 이다. 또한  $\tau > 2$ 인 경우  $\delta$ 와  $\theta_{0,w}$ 은 Graetz 해에 의하면 각각 1에 수렴하므로  $\delta/\theta_{0,w}$  역시 1에 수렴하게 된다. 이 사실로부터  $\delta/\theta_{0,w}$ 을 불연속적인 1, 2, 3으로 하는 근사적인 방법을 가상해 볼 수 있다.

예를 들어  $\delta/\theta_{0,w}$ 이 3인 경우 (11)식은 다음과 같이 변형된다.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \partial^2 a^2\right)^3 w_a^* + R_a a^2 \delta^6 (1 - \zeta)^2 w_a^* = 0 \quad (16)$$

(16)식 좌변의 두번째 항이  $\zeta$ 에 관한 2차 항수로 주어져 있기 때문에 Sparrow 등<sup>11)</sup>의 방법과 비슷하게 다음과 같은 급격히 수렴하는 떡급수 형태를 이용하여 해를 구할 수 있다.

$$w_a^* = \sum_{i=0}^5 H_i f^{(i)}(\zeta) \quad (17)$$

여기서  $H_i$ 는 임의의 상수이고  $f^{(i)}(\zeta)$ 는 다음과 같이 정의되는 떡급수이다.

$$f^{(i)}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)} \zeta^n \quad (i = 0, 1, \dots, 5) \quad (18)$$

위 식에서 급수의 계수  $b_n^{(i)}$ 는  $n \geq 6$ 일 경우 다음의 순환 관계를 만족시킨다.

$$\begin{aligned} b_{(i)}^n = \frac{1}{n!} \{ & 3(\delta a)^2 b_{n-2}^{(i)}(n-2)! \\ & - 3(\delta a)^4 b_{n-4}^{(i)}(n-4)! \\ & + [(\delta a)^6 - R_a a^2 \delta^6] b_{n-6}^{(i)}(n-6)! \\ & + 2R_a a^2 \delta^6 b_{n-7}^{(i)}(n-7)! \\ & - R_a a^2 \delta^6 b_{n-8}^{(i)}(n-8)! \} \end{aligned} \quad (19)$$

여기서  $b_{-1}^{(i)} = b_{-2}^{(i)} = 0$ 이다.

또한  $b_0^{(i)} \sim b_5^{(i)}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$b_n^{(i)} = \delta_{ni} \quad \text{for } 0 \leq n \leq 5 \quad (20)$$

여기서  $\delta_{ni}$ 는 Kronecker delta이다.

(12)식의 일반해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W_b^* = & (H_6 + H_7 \zeta) e^{-(\delta a) \zeta} \\ & + (H_8 + H_9 \zeta) e^{(\delta a) \zeta} \end{aligned} \quad (21)$$

여기에서  $H_6 \sim H_9$ 는 임의의 상수이다.

$\zeta = 0$ 에서의 경계조건으로부터 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$H_0 = H_1 = 0, \quad H_5 = \frac{(\delta a)^2}{10} H_3$$

경계조건 (14)와 (15)를 (17)과 (21)식에 적용시키면 7개의 임의의 상수를 가진 연립 산술 방정식이 얻어지며 non-trivial 해가 존재하기 위해서는 이들 상수의 계수(각각  $\delta$ ,  $R_a$ ,  $a$ 의 함수)에 관한  $7 \times 7$  행렬식을 만족시키는 eigenvalue( $R_a$ 와  $a$ )가 존재해야 한다. 각각의  $\delta$ (즉  $\tau_c$ )에 대한 neutral stability curve를 구하면 최소의  $R_a$ 와 그에 해당하는  $a$ 가 각각  $R_{ac}$ ,  $a_c$ 에 해당된다.

$\delta/\theta_{c,w}$ 이 1과 2일 경우에도 비슷한 과정을 거쳐 마찬가지로 방법으로 해석할 수 있다.

#### 4. 결과 및 검토

$R_{ac}$ 에 대하여 본 근사해와 Choi와 Kim<sup>10)</sup>의 정확한 해 (power series 해)가 Fig. 4에 비교되어 있다. 여기에서  $\tau_c > 2$ 인 경우  $\delta/\theta_{0,w}$ 은 1,  $\tau_c < 0.1$ 인 경우에는 3이라는 근사치가 잘 적용

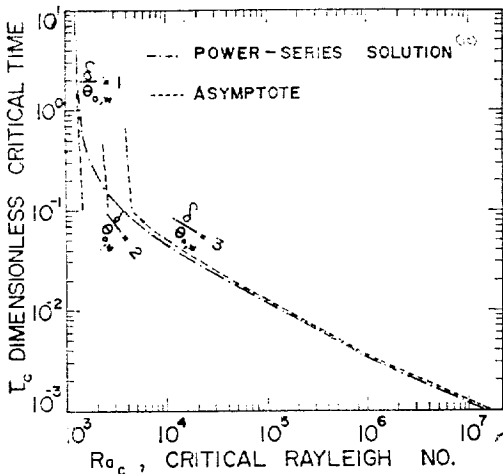


Fig. 4. Comparison of power-series with asymptotic one

됨을 알 수 있다.  $\delta/\theta_{c,w} = 2$  인 경우에는  $Ra_c$ 의 값이 낮아 Fig. 6에 보이는 Currie<sup>3)</sup>의 결과와 비슷하였다. 따라서  $\delta/\theta_{c,w}$ 의 값이 1, 3인 경우의 해를 각각 구한 후  $0.1 < \tau_c < 2$  범위에서 두 해를 접근시켜도 무방하다고 생각된다. 위의 결과는 앞에서 설명한 바와 같이  $\tau_c > 2$ 인 경우  $\delta$ 와  $\theta_{c,w}$ 이 각각 1에 수렴하고  $\tau_c < 0.1$ 인 경우  $\delta/\theta_{c,w}$ 은 2.84로 3에 근사하기 때문에 당연한

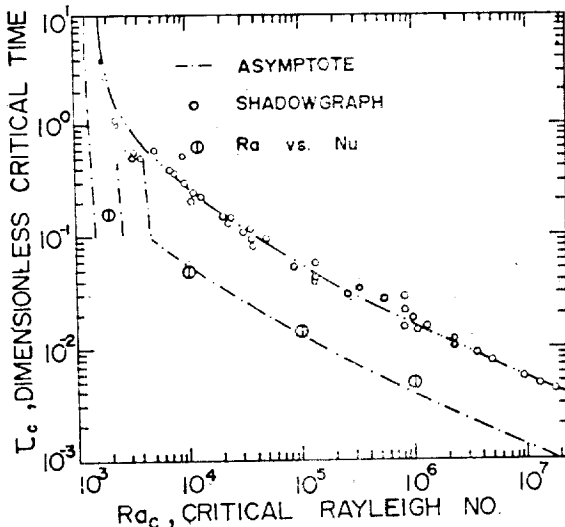


Fig. 5. Comparison of experiment with the asymptotic power-series analysis: Experimental data  $\circ$  and  $\odot$  are due to Nielsen & Sabersky

결과인 듯하다.

이 결과는 Fig. 5에서 Nielsen과 Sabersky<sup>12)</sup>의 실험 결과와 비교되어 있다.  $\odot$ 로 표시된 자료는 Kim과 Choi<sup>9)</sup> 등이 Nielsen과 Sabersky의 실험 결과로부터 구한 결과이며 이는 본 연구의 해석 결과와 잘 일치함을 알 수 있다. 또한 원으로 표시된 자료들은 shadowgraphy를 이용하여 움직임이 관찰되는 순간을 측정한 결과인데 이는 본 연구의 결과와 많은 차이를 나타내면서도 비슷한 기울기를 보인다. 이는 본 연구에서 정의한 임계 시간(부력 효과에 의한 불안정화 요인이 안정화 요인과의 균형점을 넘어서는 순간)과는 달리 초기 disturbance가 shadowgraph에 의하여 관찰되는 순간까지 증폭된 시간에 해당되기 때문인 것으로 여겨진다. amplification theory를 이용하여 이에 대한 해석이 현재 본 연구실에서 진행되고 있다.

Fig. 6에는 Kim과 Choi<sup>9)</sup> 등이 Galerkin방법을 이용하여 구한 값과 본 접근해가 비교되어 있다. 그들은 기존의 frozen-time model과 modified frozen-time model에 의하여 구했는데  $\tau_c < 0.1$ 인 경우 Galerkin방법에 의한 결과는 본 결과보다 약간 큰 값을 보인다. 이는 Galer-

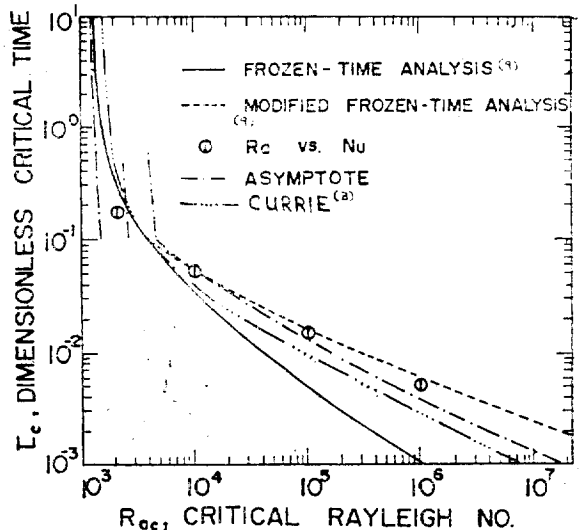


Fig. 6. Comparison of the other theoretical results with asymptotic analysis: Frozen- and modified frozen-time analyses are obtained using Galerkin method

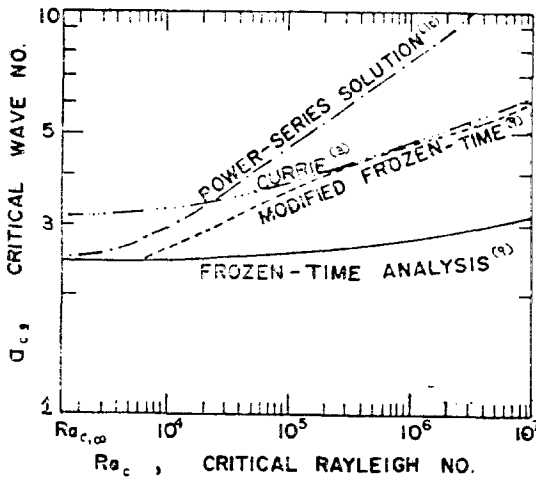


Fig. 7. Critical Rayleigh number vs. critical wave number. At  $Ra_c > 10^4$  the asymptotic solution with  $\delta/\theta_{0,w} = 3$  agrees well with the power-series one.

kin 방법에 의한 계산이 충분히 수렴되지 못하였고 수정한 온도 분포가 실제보다 약간 작은 값을 보임으로써 나타난 결과인듯 하다. 또한 이론적인 해석이 실험 결과보다 빠를 수 없다는 측면에서 본 연구의 맥급수해가 더 타당함을 알수 있다. 이 그림에서는 Currie<sup>2)</sup>의 해석결과와도 비교되어 있는데 이 결과는 본 연구 및 실험결과보다 작은 값을 보인다. 이는 유효 열 길이의 설정과 열 disturbance에 관한 경계조건 설정에 문제점이 있다고 보여진다. 더우기 Currie는 온도 분포가 선형인 경우  $Ra_c$ 는 1340이었는데 이는 이제까지의 어떤 해석적인 결과와도 차이를 보이고 있다.

$Ra_c$ 와  $a_c$  사이의 관계는 Fig. 7에 다른 결과들과 비교하여 요약되어 있다. 점근해( $\delta/\theta_{0,w} = 3$ )는  $Ra_c > 10^4$ 인 범위에서 거의 맥급수해와 동일한 값을 보였다. 전반적으로  $Ra_c$ 의 증가에 따라  $a_c$ 의 증가를 보이지만 근사해 또는 맥급수해의 증가 정도가 가장 큼을 보여주고 있다.  $a_c$ 에 대한 실험 결과는 발표된 것이 없기 때문에 정량적인 비교는 곤란하지만 이제까지 다른계에 대한 실험은  $Ra_c$ 의 증가에 따라  $a_c$ 가 증가함을 보여주고 있기 때문에 modified frozen-time model이 내포하고 있는 가정이 타당함을 입증

해 준다.

## 5. 결 론

1. 전도에 의한 기본 온도분포는 유효열 길이와 밑면의 온도를 이용한 함수로서 간단하면서도 잘 묘사된다.
2. 온도분포의 비선형 정도가 큰 경우  $\delta/\theta_{0,w}$ 을 3으로 한 점근해가 간결히 적용된다.
3. 모사 온도분포를 이용한 맥급수해는 Galerkin 방법의 난점을 극복해준다.
4.  $Pr$ 수가 큰 경우 열 disturbance는 유효 열 경계층내에 한정된다는 것이 확인되었다.

## 감 사

본 연구는 1979년도 문교부 학술연구 조성비에 의하여, 또한 부분적으로 한국과학재단 연구비에 의하여 이루어진 것이다. 연구를 지원하여 주신 당국에 심심한 사의를 표합니다.

## Nomenclature

- $a$ : dimensionless wave number
- $a_x, a_y$ : component of wave number
- $b_n^{(i)}$ : coefficients defined in equation (18)
- $d$ : fluid layer depth (cm)
- $f^{(i)}$ : z-dependent series function in equation (17)
- $Pr$ : Prandtl number ( $= \nu/\alpha$ )
- $q_w$ : wall heat flux (cal/cm<sup>2</sup>/sec)
- $Ra$ : Rayleigh number ( $= g\beta q_w d^4/\alpha\nu/\kappa$ )
- $T$ : temperature ( $^{\circ}$ K)
- $t$ : time (sec)
- $w$ : dimensionless vertical velocity component ( $= \frac{d}{\alpha} W$ )
- $z$ : dimensionless vertical position ( $= Z/\alpha$ )
- $Z$ : vertical position (cm)

## Greek Letters

- $\alpha$ : thermal diffusivity (cm<sup>2</sup>/sec)

$\delta$  : dimensionless penetration distance  
 $\delta_{ij}$  : Kronecker delta  
 $\zeta$  : dimensionless vertical distance on the base  
 of  $\delta$  ( $= z/\delta$ )  
 $\theta$  : dimensionless temperature  
 $[\kappa(T - T_0)/q_w/d]$   
 $\kappa$  : thermal conductivity (cal/cm/sec/°K)  
 $\lambda_n$  : eigenvalues in equation (1)  
 $\tau$  : dimensionless time ( $= t\alpha/d^2$ )

### Subscripts

$a$  : refers to variables within effective thermal depth  
 $b$  : refers to variables over the effective thermal depth  
 $w$  : refers to the lower boundary  
 $0$  : refers to the unperturbed state  
 $1$  : refers to perturbation quantities

### Superscript

$*$  : refers to  $\tau$ - and  $z$ -dependent perturbation for  $\theta$ ,  $\omega$

### Reference

1. B.R. Morton, J. Mech. Appl. Math., **10** (1957), 433.
2. W. Lick, J. Fluid Mech., **21**(1965), 565.
3. I.G. Currie, J. Fluid Mech., **29**(1967), 337.
4. T.D. Foster, Phys. Fluids, **8**(1965), 1249.
5. J.L. Robinson, J. Fluid Mech., **29**(1967), 461.
6. P.M. Gresho and R.L. Sani, Int. J. Heat Mass Transfer, **14**(1971), 207.
7. C.K. Choi, Ph.D. Thesis, Clarkson College of Technology (1976).
8. E.J. Davis and C.K. Choi, J. Fluid Mech., **81**(1977), 565.
9. 김 장 주, 최 창 균, 최 웅, 이 기준, 서울대학교 공대연구보고, **11**(1979), 53.
10. C.K. Choi and J.J. Kim, J. Fluid Mech. (to be submitted).
11. E.M. Sparrow, et al., J. Fluid Mech., **18** (1963), 53.
12. R.C. Nielsen and R.H. Sabersky, Int. J. Heat Mass Transfer, **16**(1973), 2407.
13. R. Krishnamurti, J. Fluid Mech., Gothic (1970), 295.
14. H.T. Rossby, J. Fluid Mech., **36**(1969), 309.
15. E.L. Koschmieder, Adv. Chem. Phys., **26** (1973), 177.