

## 統計的 多變量反應表面分析에 의한 工程最適化手法과 그의 電算化

朴 聖 炫

서울대학교 자연과학대학 계산통계학과

(접수 1980.11.5)

## A Process Optimization Technique by Statistical Multivariate Response Surface Analysis and its Computerization

Sung-Hyun Park

*Department of Computer Science and Statistics, College of Natural Sciences  
Seoul National University, Seoul 151, Korea*

(Received November 5, 1980)

### 요 약

대부분의 化學工程에서는 관심있는 反應이 둘이상이며 이때에 반응들에 영향을 미치는 因子들(압력 온도 등)의 最適工程條件을 찾아야할 경우가 많다. 이 논문은 얻어진 데이터로부터 多變量反應表面을 適合시키는 방법과 데이터를 分析하여 因子들의 最適工程條件을 찾는 방법을 제시하여 주고 있다. 이 방법에 대한 실질적인 응용을 위하여 FORTRAN 언어로 컴퓨터프로그램을 작성하였으며, 이에 대한 설명을 하였다. 마지막으로 공업적인 예제를 이 방법에 의하여 풀어서 제안된 기법을 설명하였다.

### ABSTRACT

In most chemical processes, there are more than two responses of interest, and we want to know the optimal levels of the factors(i.e., pressure, temperature, etc.) that influence the responses. This paper is to propose how to fit the multivariate response surfaces for a given set of data, and to propose how to analyse the data to obtain an optimal operating condition for the factors. To implement the proposed method in practice, a FORTRAN computer program was written and explained in this paper. Lastly, an industrial example is illustrated to explain the proposed technique.

## I. 序 論

反應表面分析(response surface analysis)은 최근에 개발된 새로운 統計的 分析方法의 하나로 특히 工業적 처리과정에서 발생하는 工程最適化 문제에 많이 응용되고 있다. 이 反應表面分析은 여러개의 독립변수가 복합적인 작용을 하여 어떤 反應量을 생성해낼 때에 독립변수들의 조건과 反應量을 실험을 통하여 데이터(data)를 얻고 이 데이터로부터 독립변수들과 反應간의 관계를 統計的으로 규명해내는 分析方法이다. 여기서 독립변수들(independent variables)은 反應에 영향을 주는 여러가지 요인을 말하며 反應을 설명하는 변수라는 의미에서 설명변수(explanatory variables)라고도 한다. 일반적으로 이 독립변수들은 실험하는 사람에 의하여 조절될 수 있는 것들이다. 예를들면 어떤 화학反應에 있어서 그 化學反應量이 온도, 습도 및 압력의 변화에 따라서 달라진다고 하자. 그러면 여기에서는 온도, 습도 및 압력이 독립변수가 되고 이들의 변화에 따라서 영향을 받는 反應量을 反應변수(response variable) 또는 종속변수(dependent variable)이라고 부른다.

그런데 관심있는 反應변수의 수가 하나만이 아니라 두개 이상인 경우가 실제에는 대부분이다. 예를 들어서 나일론실을 만드는 공정에서 이 제품의 강도가 관심있는 하나의 反應이라면 염색도나 신도등도 또한 관심을 가져야할 反應이며, 이와같이 反應변수가 여러개 있는 경우의 反應 표면분석을 多變量反應表面分析(multivariate response surface analysis)이라고 부른다. 다변량反應표면분석에 대해서는 이론적인 연구가 별로 이루어진 것이 없으며 이 논문은 실제의 공장실험에서 사용하여 最適工程條件을 찾을수 있는 방법을 제시하는 데 그 목적을 두고 있다.

統計的인 反應表面分析을 통하여 우리가 성취할 수 있는 것중에서 중요한 것을 적어보면 다음과 같다.

1. 독립변수와 反應변수간의 함수관계를 규명하여 독립변수의 값의 변화에 따라서 反應량이

어떻게 달라지는 가를 추정하고자 할 때.

2. 어떤 값들의 독립변수가 反應변수의 값인 反應量을 最適化(optimize)시키는 가를 알아내고자 할 때.

3. 독립변수와 反應변수간의 함수관계를 규명하고자 할 때에 어떠한 實驗計劃法(design of experiments)을 쓰는 것이 좋은가를 알고 싶을 때.

위의 세가지는 反應表面分析研究를 통하여 이룩할 수 있으며, 특히 工業生產品의 品質向上과 品質管理面에서 유용하게 이용될 수 있다. 이에 관한 연구는 1951년 Box와 Wilson<sup>2)</sup>에 의하여 처음으로 시작되었으며 그후 급속적인 이론의 전개가 이루어지고 工業분야뿐 아니라 농업 및 자연과학등 여러분야에 걸쳐서 광범위한 응용이 이루어지기 시작하고 있다. 反應表面分析에 관한 참고문헌으로 Myers<sup>6)</sup>, John<sup>5)</sup>, Hill과 Hunter<sup>4)</sup>, Box와 Draper<sup>1)</sup> 등이 있으며 필자도 이에 깊은 흥미를 가지고 몇편<sup>8)9)10)11)</sup>의 논문을 발표한 바 있다. 이 논문에서는 多變量反應인 경우에 最適條件을 찾는 방법을 제시하고 이를 전산화한 프로그램의 내용을 소개하려고 한다.

## II. 基本的인 概念

實驗者가  $k$ 개의 독립변수( $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ )에 따라서 좌우되는 어떤 反應( $\eta$ )에 관하여 그들간의 함수관계

$$\eta = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \quad (1)$$

를 실험데이터로부터 알아내기를 원하고 있다. 실제로 이 함수  $f$ 는 잘 알려져 있지 않을 경우가 많고 어찌면 매우 복잡한 형태의 함수일런지 모른다. 또한 反應이  $p$ 개 있으면

$$\eta_1 = f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$$

$$\eta_2 = f_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$$

$$\vdots$$

$$\eta_p = f_p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$$

으로 각각 다른 함수관계를 갖게 될 것이다. 그러나 실험자가 흥미를 가지고 있는 독립변수들의 어떤 흥미영역(region of interest)에서는 함수관계  $\eta = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ 를 Taylor 급수로 전개하면 통계에서 다루는 多項回歸(polynomial

regression)로서 대략적으로 표현될 수 있다. 이 때에 독립변수를 선형변환시켜서 새로이 정의된 독립변수  $x$ 의 중앙이  $x=0$ 에 위치하게 하면 일반적으로 많이 쓰이는 多項回歸는 等二次多項回歸模型(second order polynomial regression model)으로

$$\eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i \leq j}^k \beta_{ij} x_i x_j \quad (2)$$

와 같이 표현되며 만약 독립변수의 수가 셋이면

$$\begin{aligned} \eta = & \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{11} x_1^2 \\ & + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{33} x_3^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 \\ & + \beta_{23} x_2 x_3 \end{aligned}$$

로 써진다.

식(2)를 데이터로부터 추정하기 위하여  $n$ 개의 데이터  $(y_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki})$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ 가 있다면 식(2)를

$$y_p = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_{ip} + \sum_{i \leq j}^k \beta_{ij} x_{ip} x_{jp} + \epsilon_p \quad (3)$$

$$p = 1, 2, \dots, n$$

처럼 통계에서는 표현하며 이를 간편하게 행렬을 사용하여

$$y = X\beta + \epsilon \quad (4)$$

으로 나타낸다. 이에 대한 설명은 생략하기로 한다. 참고문헌으로 Draper와 Smith<sup>3)</sup>나 Neter와 Wasserman<sup>7)</sup>을 보면 좋을 것이다.

### III. 最適反應條件의 결정

만약 종속변수  $\eta$ 가 어떤 化學反應의 收率(yield)이라 한다면 이를 最大化시키는 독립변수들의 값을 결정하는데 우리는 흥미가 있을 것이며 이와 반대로  $\eta$ 가 化學反應과정에서 발생하는 不純度(impurity)를 나타낸다면 우리는 이 종속변수를 最小化시키는 독립변수들의 反應條件을 찾기를 원할 것이다. 여기에서는 統計的인 방법을 통하여 反應表面을 推定하였을 때 독립변수들의 最適反應條件을 구하는 문제를 다루어 보자.

統計의 回歸分析理論에 의하여 식(4)의  $\beta$ 의 最小自乘推定値는 다음과 같다.

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{k-1,k} \end{bmatrix} = (X'X)^{-1}X'y \quad (5)$$

값들을 사용하여 식(2)을 다시 표현하면

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i \leq j}^k b_{ij} x_i x_j \quad (6)$$

이 되며 여기서  $\hat{y}$ 는  $\eta$ 의 추정치이다. 식(6)을 행렬을 사용하여 표현하면

$$\hat{y} = b_0 + x'b + x'Bx \quad (7)$$

으로 쓸 수 있으며, 여기서

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12/2} & b_{13/2} & \dots & b_{1k/2} \\ & b_{22} & b_{23/2} & \dots & b_{2k/2} \\ & & & & \vdots \\ & & & & b_{kk} \end{bmatrix}$$

(sym)

이다.  $\hat{y}$ 을 最大 또는 最小로 하는  $x$ 의 점  $x_0$ 를 구하기 위하여 식(7)을  $x$ 에 대하여 편미분하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [b_0 + x'b + x'Bx] \\ &= b + 2Ex \end{aligned}$$

이며 이를 0로 놓고  $x$ 에 대하여 풀면

$$x_0 = -B^{-1}b/2 \quad (8)$$

이 얻어진다. 이 점을 定常點(stationary point)이라 부르며 이 점에서  $\hat{y}$ 은 適合된 反應表面上에서 다음 세가지 중에 하나이다.

1.  $\hat{y}$ 이 最大値를 얻게되는  $x$ 의 點.
2.  $\hat{y}$ 이 最小値를 얻게되는  $x$ 의 點.
3.  $\hat{y}$ 이 最大도 最小도 아닌  $x$ 의 鞍部點(saddle point).

경우에 따라서 실험자의 흥미영역안에 定常點  $x_0$ 가 들어가지 않는 경우가 있으며 이때에는 흥미영역속에서  $\hat{y}$ 의 값들이 어떤 변화를 하는가를 알아보는 것이 중요하다. 다음으로 反應表面의

특성을 알아보기 위하여 正準分析(canonical analysis)을 하여보자.  $x_0$ 에서  $\hat{y}$ 의 값을

$$\hat{y}_0 = b_0 + x_0' b + x_0' B x_0$$

라고하면 식 (7)은  $z = x - x_0$ 라 할 때

$$\hat{y} = \hat{y}_0 + z' B z \quad (9)$$

으로 쓸 수 있으며 어떤 直交變換(orthogonal transformation)  $z = Mw$ 을 통하여 식(9)는

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \hat{y}_0 + z' B z \\ &= \hat{y}_0 + w' M B M w \\ &= \hat{y}_0 + w' A w \\ &= \hat{y}_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i w_i^2 \end{aligned} \quad (10)$$

으로 쓸 수 있다. 여기에서

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}$$

는 대칭행렬로  $\lambda_i$ 는 행렬  $B$ 의 特性根(eigenvalue)들이다. 행렬  $M = (M_1, M_2, \dots, M_k)$ 은 다음의 두개의 방정식을 풀어져 얻어지는 直交行列(orthogonal matrix)이다.

$$(B - t_i I) M_i = 0$$

$$M_i' M_i = 1 \quad i = 1, 2, \dots, k$$

식(10)으로부터 만약 모든  $\lambda_i$ 의 값이 陽(positive)이면 변수  $|w_i|$ 의 증가에 따라서  $\hat{y}$ 이 증가하고  $\hat{y}_0$ 이 最小値이며  $x_0$ 는  $\hat{y}$ 을 最小로 하는 定常點이다. 반대로  $\lambda_i$ 의 값이 모두 陰(negative)이면  $x_0$ 는  $\hat{y}$ 을 最大로 하는 點이 되며,  $\lambda_i$ 가 陰도 있고 陽도 있으면  $x_0$ 는 鞍部點이다.

실제의 공업적 응용에 있어서 실험자는 어떤 흥미영역에서  $\hat{y}$ 가  $x$ 의 변화에 따라서 어떻게 달라지는가를 알고 싶어하며 이는 식(7)의  $\hat{y}$ 에 대한 等高線(contours) 표를 그려보면 쉽게 알 수 있다.

#### IV. 反應表面分析의 電算化

종속변수의 수가 두개 이상일 때에 각 종속변수에 대하여 주어진 데이터로부터 다음과 같은 분석내용을 전산처리하여 얻을 수 있다면 얻어지는 분석내용으로부터 最適工程條件을 찾는 데

매우 편리할 것이다.

1. 入力된 데이터  
( $y_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}$ ),  $i = 1, 2, \dots, n$
2. 二次多項回歸方程式의 回歸係數들.
3. 定常點,  $x_0$
4. 定常點에서 反應推定值  $\hat{y}_0$ 의 값.
5. 식(10)의 正準分析의 形態
6. 변수변환에 사용되는 行列  $M$
7. 推定된 反應表面의 等高線表.

위의 分析을 하기 위하여 FORTRAN언어를 사용하여 프로그램을 개발하였으며 이 논문에 Source program을 첨부하기는 지면 관계로 곤란하므로 생략하고 Flowchart만을 간단히 소개하려 한다. 이 프로그램은 데이터의 수  $n = 1,000$ 까지, 변수의 수  $k = 10$ 까지 자유자재로 사용할 수 있도록 하였으며 等高線表(contour graph)는 각 독립변수의 값을  $-1 \leq x_i \leq 1$ 로 잡고 이 범위안에서 그리도록 하였다. 즉 흥미영역은

$$R = \{(x_1, x_2, \dots, x_k); -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, k\}$$

으로 하였다. 그리고 이 영역안에서  $\hat{y}$ 의 값을 10등분(흥미영역  $R$ 에서 최대값과 최소값을 구하여 이를 균등하게 10등분 하였음.) 하여  $R$ 의 영역에서 9개의 등고선을 그릴 수 있도록 하였다.

독립변수의 수가 3개이상이면 등고선표를 입체적으로 그리기 곤란하므로  $k$ 개의 독립변수중에서 제일 관심이 있는 두개의 변수를 Selection Card로 선정하여 한 변수는  $x$ -좌표에 또한 변수는  $y$ -좌표로 놓고 등고선을 그리도록 하고, 나머지 선택되지 않은 변수들의 수준은 실험자가 임의로 조정하도록 하였다. 이 프로그램의 이름은 MRSA(Multivariate Response Surface Analysis) 프로그램이라고 명명하기로 한다.

#### V. 最適條件의 발견

반응변수의 수가  $p$ 개 있으며 각각에 대하여 二次多項回歸模型을 適合시켜서 식(7)과 같은  $\eta$ 의 推定式

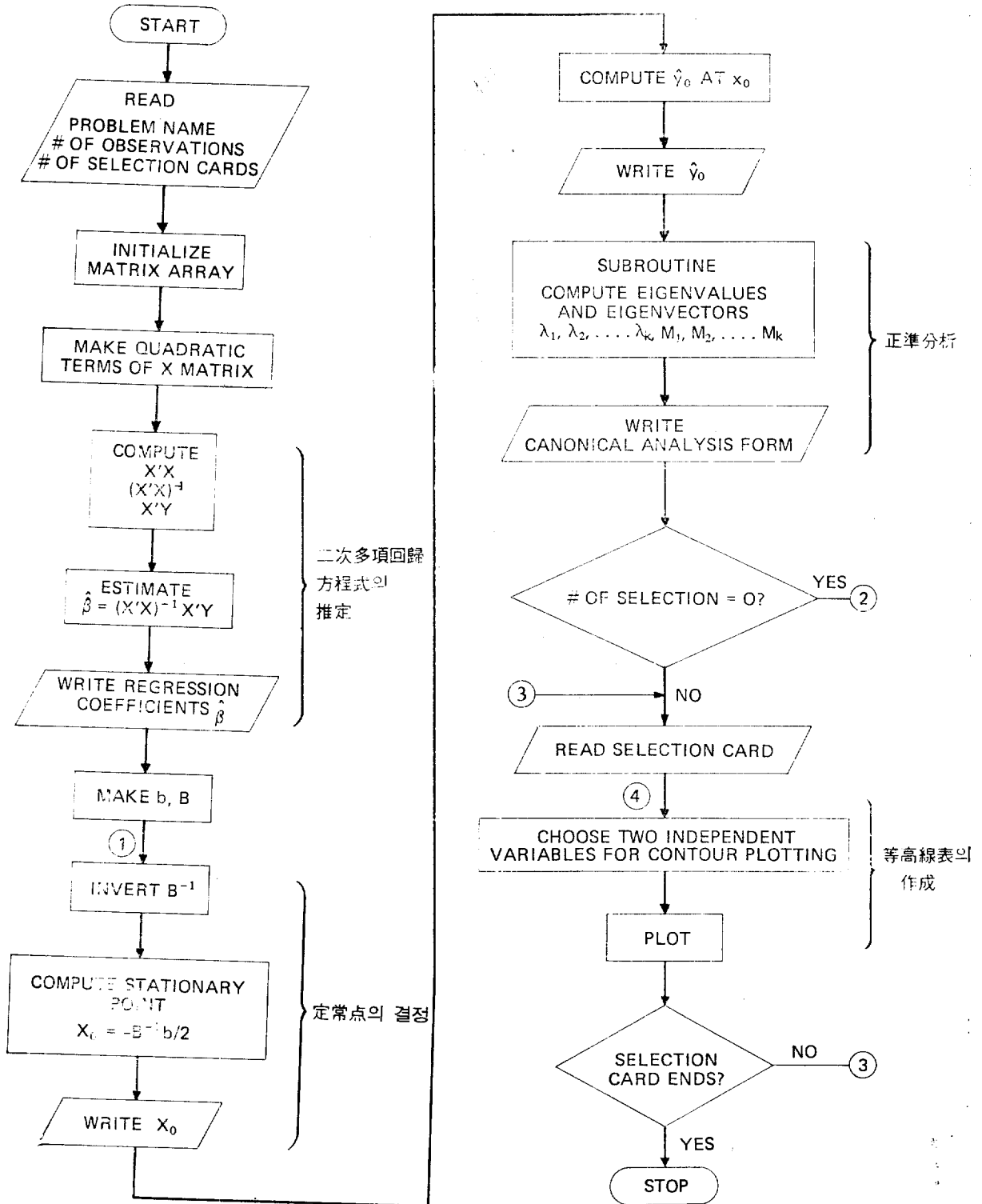


Fig. 1. MRSA Program Flowchart

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= b_{10} + \mathbf{x}'\mathbf{b}_1 + \mathbf{x}'\mathbf{E}_1\mathbf{x} \\ \hat{y}_2 &= b_{20} + \mathbf{x}'\mathbf{b}_2 + \mathbf{x}'\mathbf{E}_2\mathbf{x} \\ &\vdots \\ \hat{y}_p &= b_{p0} + \mathbf{x}'\mathbf{b}_p + \mathbf{x}'\mathbf{E}_p\mathbf{x}\end{aligned}$$

과 각각에 대한等高線表를 얻었다고 하자. 주어진 흥미영역  $R$ 에서 어떤 독립변수의 값들이 가장 좋은反應條件을 줄 것인가? 이條件을 찾는 방법으로 다음과 같은 절차를 따르기로 한다. 일단 반응은 모두 최대로 하는 것이 좋다고 가정하기로 한다. 최소로 하는 경우는 이와반대로 생각하면 될 것이다.

1. 가장 중요한 반응변수 하나를 선택한다. 이를 主反應變數라고 하고 나머지 변수들을 副反應變數라 하자.
2. 副反應變數들인  $y_2, y_3, \dots, y_p$ 가 어느 정도 이상이어야 한다는 한계치  $c_i$ 를 정한다. 즉  $\hat{y}_i \geq c_i, i = 2, 3, \dots, p$ 이 되어야 하는  $c_i$ 를 정한다. 다음으로  $\hat{y}_i \geq c_i$ 를 만족시키는 영역  $R^*$ 를 흥미영역  $R$ 속에서 정한다. 즉

$$R^* = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) : \hat{y}_i(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq c_i, i = 2, 3, \dots, p\}$$

을 구한다.  $R^*$ 을 구하는 쉬운 방법은 각 副反應變數의 등고선표로부터  $R_i^*$ 에 해당하는 영역을 각각 찾고 이들로부터 공동영역  $R^*$ 를 찾는다. 즉

$$R_i^* = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) : \hat{y}_i(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq c_i\} \quad i = 2, 3, \dots, p$$

이라하면

$$R^* = R_2^* \cap R_3^* \cap \dots \cap R_p^*$$

이 된다.

3.  $R^*$ 의 영역에서  $\hat{y}_1$ 을 最大로 하는 점을  $\hat{y}_1$ 의等高線表로부터 찾는다. 또한  $R^*$ 중에서  $\hat{y}_1$ 을 어느정도 이상으로 하는  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 의 영역을 찾을 수도 있다.

위의 절차는 실험자의 입장에 따라서 수정될 수 있으며 중요한 변수를 두개 선택하여 같은 개념으로 最適條件을 찾을 수도 있을 것이다.

## VI. 例 題

이 예제는 1979년에 S타이어공업주식회사에서 현용 1100-20 타이어의 주행성능을 향상시키

기 위하여 새로운 고무배합 조건을 찾는 데에 이 논문에서 다른 多變量反應表面分析을 사용한 예제이다.

현용 1100-20 산업용타이어는 주행성능이 약 65시간으로 실내주행시험 후카 카스와 U/T 사이의 분리현상이 전체 고장내용의 84.3%를 차지하고 있으며 주행시간이 높지 않은 주요 이유로써 래디알 벨트고무의 낮은 modulus 때문인 것으로 판명되었다. Modulus 물성에 가장 큰 영향을 주는 요인은 G300과 V130으로 이의 배합비율을 조절하여 시험하기로 하였다. 따라서 배합약품인 G300과 V130을 독립변수  $x_1, x_2$ 로 놓았다. 반응변수로서 主反應變數를 modulus로 하고 이를 최대로 하는  $x_1$ 과  $x_2$ 의 조건을 찾고 싶으며 副反應變數는 3개로서 발열량(amount of heat), 인장강도(tensile strength), 신도(elongation)이다. 발열량은 작게 하는 것이 좋고 인장강도와 신도는 크게 하고자 한다. 따라서 독립변수와 반응변수는 다음과 같다.

독립변수 : G 030 =  $x_1$

V 130 =  $x_2$

반응변수 :  $y_1 = 300\%$  modulus

$y_2 =$  발열량

$y_3 =$  인장강도

$y_4 =$  신도

실험계획은 G 300의 수준을 현재의 수준  $a$ 에서 2PHR을 감소시키고 증가시켜서 ( $a-2, a, a+2$ )의 세수준을 잡아주고, V 130은 현재의

Table 1 : 300% modulus ( $y_1$ ) data

	$x_1 = -1$ ( $a-2$ )	$x_1 = 0$ ( $a$ )	$x_1 = +1$ ( $a+2$ )
$x_2 = -1$ ( $b-1$ )	116	144	124
	118	131	125
	117	143	129
$x_2 = 0$ ( $b$ )	138	136	139
	140	143	146
	131	136	137
$x_2 = +1$ ( $b+1$ )	139	143	139
	132	148	143
	133	152	152

Table 2: Amount of heat ( $y_2$ ) data

	$x_1 = -1$ (a-2)	$x_1 = 0$ (a)	$x_1 = +1$ (a+2)
$x_2 = -1$ (b-1)	20 22	21 22	21 22
$x_2 = 0$ (b)	23 23	21 18	23 23
$x_2 = +1$ (b+1)	20 21	20 19	22 24

Table 3: Tensile strength ( $y_3$ ) data

	$x_1 = -1$ (a-2)	$x_1 = 0$ (a)	$x_1 = +1$ (a+2)
$x_2 = -1$ (b-1)	193 187 186	194 169 182	201 190 199
$x_2 = 0$ (b)	201 184 190	198 210 202	186 185 192
$x_2 = +1$ (c+1)	202 192 202	190 197 195	197 190 191

Table 4: Elongation ( $y_4$ ) data

	$x_1 = -1$ (a-2)	$x_1 = 0$ (a)	$x_1 = +1$ (a+2)
$x_2 = -1$ (b-1)	445 440 430	430 420 435	415 435 435
$x_2 = 0$ (b)	420 400 430	425 425 400	390 400 395
$x_2 = +1$ (b+1)	400 420 430	365 340 395	400 420 355

수준  $b$ 에서 1PHR을 빼주고 더해 주어서 ( $b-1$ ,  $b$ ,  $b+1$ )의 세 수준을 잡아  $3^2$  실험으로 9개의 실험조건에서 데이터를 구하였다. 데이터는 Table 1, 2, 3, 4에 실려 있으며  $y_1, y_3, y_4$ 는 각 실험조건에서 3번씩 반복실험되었으며  $y_2$ 는 두번

씩 반복실험되었다.

위의 네개의 반응변수에 대하여 二次多項回歸模型을 最小自乘法에 의하여 적합시키면 다음과 같은 적합된 회귀방정식을 MRSA Program에 의하여 얻을 수 있다. 여기에서  $(a-2, a, a+2) = (-1, 0, 1)$ 로,  $(b-1, b, b+1) = (-1, 0, 1)$ 로 치여 주었다.

$$\hat{y}_1 = 144.148 + 7.444x_1 + 3.889x_2 - 3.555x_1^2 - 8.555x_2^2$$

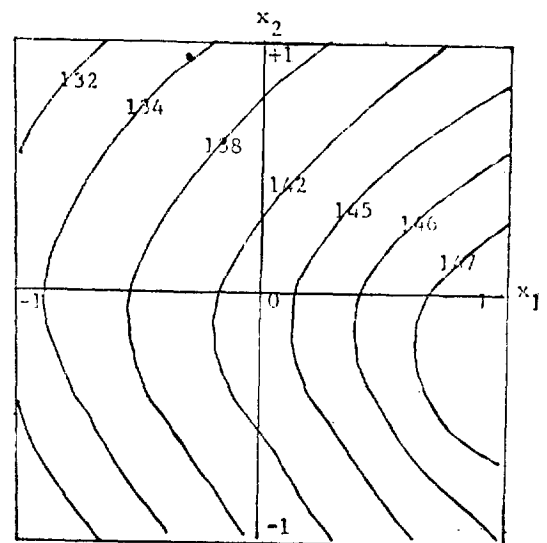
$$\hat{y}_2 = 75.000 - 1.444x_1 + 3.889x_2 + 4.667x_1^2 - 4.333x_2^2 - 2.667x_1x_2$$

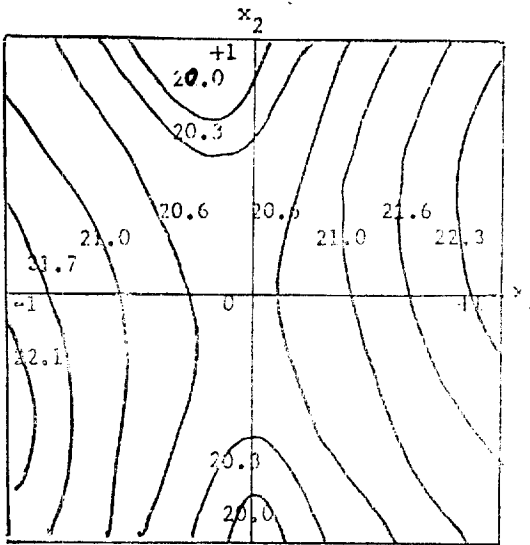
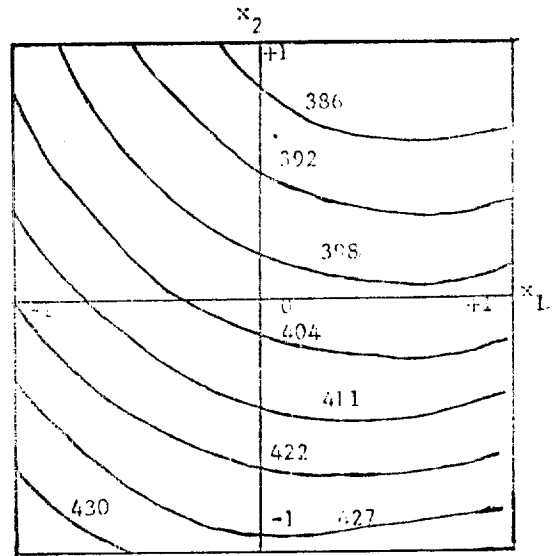
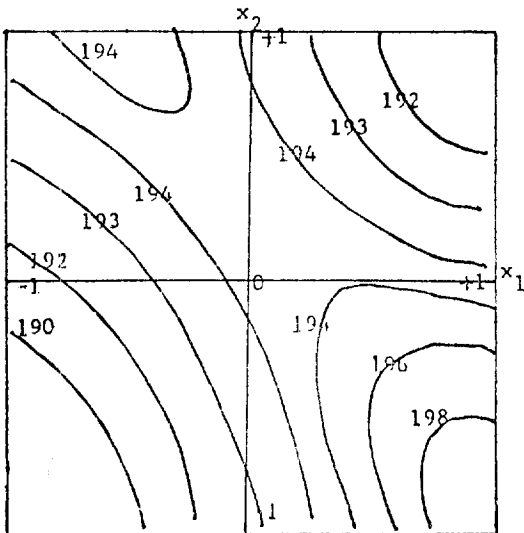
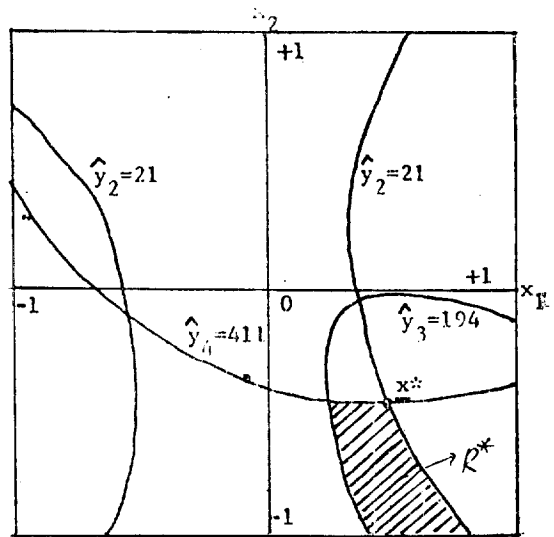
$$\hat{y}_3 = 194.444 + 3.056x_1 - 0.333x_2 - 2.166x_1^2 - 0.333x_2^2 - 3.500x_1x_2$$

$$\hat{y}_4 = 402.406 - 20.000x_1 - 9.444x_2 + 2.223x_1^2 + 10.556x_2^2 - 3.750x_1x_2$$

위의 적합된 회귀방정식으로부터 반응표면의 등고선을  $x_1$ 에 대하여  $(a-2, a, a+2) = (-1, 0, 1)$ 로 하고  $x_2$ 에 대하여  $(b-1, b, b+1) = (-1, 0, 1)$ 로 하여 등고선표를 작성하여 보면 각각 Fig. 1, 2, 3, 4와 같게 된다.

이 회사에서 찾고자하는 최적공정조건은  $y_2, y_3, y_4$ 가 다음과 같은 조건을 만족시키는 범위내에서  $y_1$ 을 최대로 하는  $x_1$ 과  $x_2$ 의 값을 찾는 것이다. 즉  $x' = (x_1, x_2)$ 일 때

Fig. 2. Contours of  $\hat{y}_1$

Fig. 3. Contours of  $\hat{y}_2$ Fig. 5. Contours of  $\hat{y}_4$ Fig. 4. Contours of  $\hat{y}_3$ Fig. 6. The satisfactory region  $R^*$ 

maximize  $\hat{y}_1(x)$   
 $x$

제한조건 :  $\hat{y}_2(x) \leq 21$

$\hat{y}_3(x) \geq 194$

$\hat{y}_4(x) \geq 411$

$x \in R = \{x: -1 \leq x_i \leq 1, \\ i = 1, 2\}.$

최적조건  $x^*$ 를 구하기 위하여 먼저  $R^*$ 를 구하여  
 보니 Fig. 5와 같이 된다. 빗금친 영역  $R^*$ 에서  
 $\hat{y}_1$ 을 최대화 하는점  $x^*$ 는 Fig. 5에서 처럼 오른  
 쪽 위에 위치하게 된다.

최적조건  $x^*$ 의 좌표는

$$x^* = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$



로서 실제로  $x_1 = a + 1$  이고  $x_2 = (b - \frac{1}{2})$ 로 현수준보다 G 300 은 1 PHR 을 증가시키고 V 130 은  $\frac{1}{2}$  PHR 을 감소시키는 것이 가장 바람직하다는 결론이다. 이 새로운 공정조건으로 바꾸어 확인실험을 하여본 결과 종래의 1100-20 타이어의 주행시간표준이 65 시간이었던 것을 70 시간으로 바꾸어도 무리가 없음이 확인 되었으며 타이어의 신뢰도를 약 10 % 증가시키는데 이 실험 결과가 큰 역할을 하였다.

## VII. 結 論

이 報文은 관심있는 反應이 여러개 있을 때에 실험자가 원하는 독립변수들의 工程最適化條件을 統計的인 模型設定을 통하여 찾는 방법을 제시하여 주고 있다. 현장의 기술자들이 깊은 이론적 지식없이 사용하기 편리하도록 FORTRAN 프로그램을 작성하여 이를 MRSA 로 명명하였으며 간단히 데이터를 컴퓨터에 入力시켜서 최종 결론까지 쉽게 얻을 수 있도록 마련하였다. 이 프로그램을 원하는 독자는 필자에게 문의하면, 기꺼이 제공하여 줄려 한다.

현장의 기술자나 연구자들이 하나의 간단한 공정 최적화수법으로 많이 활용하여 주기를 기대하며 여기에 실린 예제가 많은 참고가 되기를 기대한다.

## 참고 문헌

1. G.E.P. Box and N.R. Draper, Evolutionary Operation, John Wiley & Sons, New

- York, 1969.
2. G.E.P. Box and K.B. Wilson, "On the experimental attainment of optimum conditions," Journal of Royal Statistical Society, Series B, Vol. 13, pp. 1~45, 1951.
3. N.R. Draper and H. Smith, Applied Regression Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1966.
4. W.Hill and W.Hunter, "A review of response surface methodology, a literature surveys" Technometrics, Vol. 8. p.571, 1966.
5. W.M.J. John, Statistical Design and Analysis of Experiments, The Macmillan Company, New York, 1971.
6. R.H.Myers, Response Surface Methodology, Allyn and Bacon, Boston, 1971.
7. J.Neter and W.Wasserman, Applied Linear Statistical Models, Richard D. Irwin, Homewood, Illinois, 1974.
8. S.H.Park, "Selection of polynomial terms for response surface experiments," Biometrics, Vol. 33, pp. 225~229, 1977.
9. S.H.Park, "An application of response surface experiments to control the quality of industrial products: model fitting and prediction of responses," Proceedings of International Conference on Quality Control, Tokys, 1978.
10. S.H. Park, "Design for estimating the derivatives on response surfaces, Journal of the Korean Statistical Society, Vol. 8, pp. 37~64, 1979.
11. S.H.Park, "Slope-rotatable central composite designs," Technometrics, Vol. 20, pp. 413~417, 1978.

