

《報文》 HWAHAK KONGHAK Vol. 19, No. 4, August pp. 281-290
(Journal of the Korean Institute of Chemical Engineers)

水平同心圓 環狀空間에서의 自然對流現象에 關한 數值模寫研究

李炯晚 · 徐文濩* · 李基俊
서울대학교 공과대학 화학공학과
(접수 1981. 7. 25)

A Numerical Simulation of Transient Natural Convection between Horizontal Concentric Cylinders

Hyung Mann Lee and Ki Jun Lee
Department of Chemical Engineering, College of Engineering
Seoul National University, Seoul 151, Korea

Moon Ho Suh*
Department of Chemical Engineering,
Ajou Institute of Technology, Suwon 170, Korea
(Received July 25, 1981)

要 約

同心의 두 水平圓筒으로 이루어진 環狀空間에서의 自然對流에 의한 流體의 流動 및 傳熱現象을 해석하기 위하여 運動方程式과 에너지式을 有限差分化하여 數值模寫實驗을 행하였다.

內壁의 表面을 가열하는 경우, 空洞 內부의 空氣는 密度差에 의하여 自然對流 熱傳達이 일어나는데 이 現象을 Boussinesq의 假定을 도입하여 運動方程式과 에너지式으로 表示하고 stream function과 vorticity를 이용하여 有限差分化한 후 時間變化에 따라 溫度分布과 streamline을 계산하였다.

또, 壁 外部의 溫度가 垂直成層勾配(vertical temperature gradient)로 유지되고 內壁에서는 斷熱 또는 等溫條件으로 되는 경우에 대하여 軸대칭성 2차원 空間에서의 溫度分布과 streamline의 變化를 時間變化에 따라서 模寫하였다.

ABSTRACT

Transient natural convection phenomena in an annulus between horizontal concentric

*아주대학교 화학공학과

cylinders were studied numerically for the axisymmetric cases using the finite difference schemes. Boussinesq approximation was applied to the equations of motion describing the buoyant circulation of air, and the vorticity-stream function approach was adopted for the solution of the problems. The simulations of temperature distribution, streamline and vorticity variations were performed under the prescribed conditions such that the outside cylinder was maintained at a variable temperature of vertical stratification condition and the inner cylinder was either thermally insulated to be adiabatic or its surface temperature was kept constant.

1. 序 論

密閉空間內에서의 自然對流 熱傳達는 集中式 太陽熱 集熱器 設計, 圓管周圍의 相變化에 의한 蓄熱시스템, 원자로의 제작, 항공기 cabin insulation, 地下電力 cable 과 열저장 장치 등 여러 가지 응용때문에 점점 중요해지고 있다.

同心의 水平環狀空間의 自然對流 問題에 대한 實驗的 理論的 數值的 研究는 1931년 Beckmann 이래로 여러가지 Grashof number에 대해서 많은 사람들에 의하여 이루어져 왔으며, 1960년 까지의 研究는 Kuehn¹⁾에 의해 概觀되었다. 그러나 圓形 環狀空間의 양쪽벽은 等溫條件이 大部分이다.

Abbott²⁾는 環狀空間의 양쪽벽 사이의 幅이 아주 좁은 경우 matrix 逆變換 方法으로 數值解를 구하였으며, Fromm^{3,4)}은 새로운 溫도와 vorticity를 계산할 때 對流에 관한 項과 傳導에 관한 項을 두 단계로 계산하여 explicit한 方法으로도 安定性이 높도록 하였다.

Mack 등⁵⁾은 낮은 Rayleigh number의 경우 Rayleigh number의 power series로서 溫度分布, 速度分布, 열전달속도 및 streamline 등을 구하였으며, Bishop 등⁶⁾은 外, 內部管의 몇가지 지름비에서 Grashof number에 따른 流動의 變化를 담배연기 使用에 의한 流動의 可視化로서 연구하였다.

최근에 Charrier 등¹⁰⁾은 Alternating Direction Implicit Method(ADI法)으로 內壁을 가

열하는 경우에 대한 溫度分布와 streamline의 定常狀態 數值解를 얻었으며, Singh 등¹¹⁾은 外壁의 溫度가 위치에 따라 다르게 유지되며 內壁은 斷熱 혹은 等溫條件일때 Grashof number의 power series 형태로 溫度分布와 streamline의 理論解를 얻었다.

본 연구에서는 실험적으로 측정하기 힘든 水平 環狀空間에서의 熱傳達現象을 數值模寫實驗으로 해결하고자 한다.

2. 理論 展開

2-1. 問題의 設定 및 基本方程式

內半徑 R_i , 外半徑 R_o 인 同心의 두 水平圓筒으로 구성된 空洞內에서 공기의 自然對流現象을 觀察하기 위하여 Fig. 1과 같이 圓柱座標系를 설정하였으며, 輻射에 의한 熱傳達 效果는 0.1% 이하로서 無視되는 경우를 대상으로 하였다.

이와같은 모델에 대한 연속방정식, 운동방정식 및 에너지식을 stream function과 vorticity를 이용하고^{3,14)} 에너지식도 收斂性이 좋은 conservative form으로 표시하면¹³⁾ 다음과 같다.

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (1)$$

$$\zeta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(v\omega)}{\partial \theta} \\ &= \nu \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega}{r} \right) \right] \\ & - \beta g \left(r \sin \theta \frac{\partial T}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (3) \end{aligned}$$

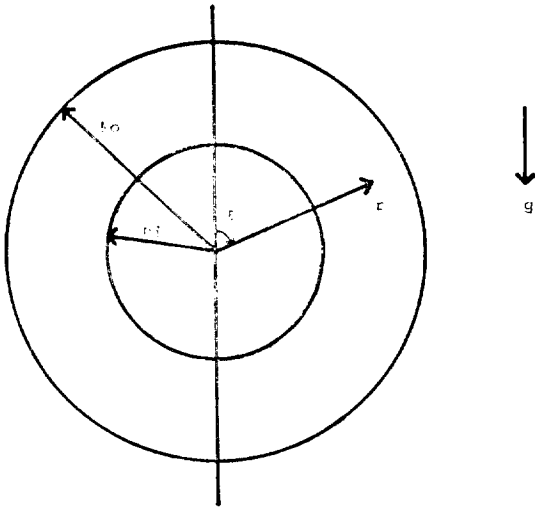


Fig. 1. Cylindrical Coordinate System

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{\omega}{r} \\ & = 0 \quad (4) \\ & \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(vT)}{\partial \theta} + \frac{uT}{r} \\ & = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \quad (5) \end{aligned}$$

여기서 $\omega = r\zeta$ 이다.

2-2. 無次元化

內壁과 外壁을 等溫條件으로 했을 경우 (Table I의 I 경우 참조)에 대해 아래와 같이 無次元變數 및 無次元數를 定義하고 각 式을 無次元化시키면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U &= \left(\frac{R_i}{\nu} \right) u, & V &= \left(\frac{R_i}{\nu} \right) v \\ X &= \left(\frac{1}{R_i} \right) r, & \Psi &= \left(\frac{1}{\nu} \right) \varphi \\ W &= \left(\frac{R_i}{\nu} \right) \omega, & \tau &= \left(\frac{\nu}{R_i^2} \right) t \quad (6) \end{aligned}$$

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_i - T_0}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

$$Gr = \frac{\beta g R_i^3 (T_i - T_0)}{\nu^2}$$

$$U = \frac{1}{X} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (7)$$

$$W = -X \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{1}{X} \frac{\partial \Psi}{\partial X} + \frac{1}{X^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \right] \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\partial(UW)}{\partial X} + \frac{1}{X} \frac{\partial(VW)}{\partial \theta} \\ & = \left[\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{1}{X^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} - \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{W}{X} \right) \right] \\ & - Gr \left[X \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial X} + \cos \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right] \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\Theta)}{\partial X} + \frac{1}{X} \frac{\partial(V\Theta)}{\partial \theta} + \frac{U\Theta}{X} \\ & = \frac{1}{Pr} \left[\frac{1}{X} \frac{\partial}{\partial X} \left(X \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) + \frac{1}{X^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} \right] \quad (10) \end{aligned}$$

壁 外部의 溫度가 위치에 따라 다르게 유지될 경우 (Table I의 II~VI 경우)에 대해 Boussinesq 가정을 도입하면¹¹⁾ 아래와 같다.

$$\frac{\rho - \rho_m}{\rho_m} = -\beta(T - T_m) \quad (11)$$

$$T = T_m + Ri(dT_m/dy)\Theta' \quad (12)$$

여기서 dT_m/dy 는 수직성층에 따른 外壁의 溫度勾配常數이며, 이를 이용하여 각 變數 및 式을 無次元化시키면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U' &= \left(\frac{R_i}{\nu Gr'} \right) u, & V' &= \left(\frac{R_i}{\nu Gr'} \right) v \\ X &= \left(\frac{1}{R_i} \right) r, & \Psi' &= \left(\frac{1}{\nu Gr'} \right) \varphi \\ W' &= \left(\frac{R_i}{\nu Gr'} \right) \omega, & \tau' &= \left(\frac{\nu Gr'}{R_i^2} \right) t \\ \Theta' &= \frac{T - T_m}{R_i(dT_m/dy)}, & Pr &= \frac{\nu}{\alpha} \quad (13) \end{aligned}$$

$$Gr' = \frac{[\beta g R_i^4 (dT_m/dy)]^{1/2}}{\nu}$$

$$U' = \frac{1}{X} \frac{\partial \Psi'}{\partial \theta}, \quad V' = -\frac{\partial \Psi'}{\partial X} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} W' &= -X \left[\frac{\partial^2 \Psi'}{\partial X^2} + \frac{1}{X} \frac{\partial \Psi'}{\partial X} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{X^2} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial \theta^2} \right] \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial W'}{\partial \tau'} + \frac{\partial(U'W')}{\partial X} + \frac{1}{X} \frac{\partial(V'W')}{\partial \theta} \\ & = \frac{1}{Gr'} \left[\frac{\partial^2 W'}{\partial X^2} + \frac{1}{X^2} \frac{\partial^2 W'}{\partial \theta^2} \right] \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{W'}{X}\right)\Bigg]-\left[X\sin\theta\frac{\partial\theta'}{\partial X}+\cos\theta\frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\right] \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\theta'}{\partial\tau'} + \frac{\partial(U'\theta')}{\partial X} + \frac{1}{X}\frac{\partial(V'\theta')}{\partial\theta} \\ & + \frac{U'\theta'}{X} \\ & = \frac{1}{P_r \cdot G_r} \left[\frac{1}{X}\frac{\partial}{\partial X}\left(X\frac{\partial\theta'}{\partial X}\right) + \frac{1}{X^2}\frac{\partial^2\theta'}{\partial\theta^2} \right] \quad (17) \end{aligned}$$

이상 각 5개 편미분식을 적당한 境界條件과 함께 풀면 5개의 變數 θ, U, V, W, ψ 를 구할 수 있다.

2-3. 有限差分法

이상에서 유도한 式들의 數值解를 구하기 위하여 Fig. 2. 와 같이 $M \times N$ 의 格子點을 설정하였으며, 이때 mesh 의 간격 ΔX 와 $\Delta\theta$ 는 $\Delta X = 1/(M-1)$, $\Delta\theta = \pi/(N-1)$ 와 같이 정의되고, X_i, θ_j 도 $X_i = (i-1)\Delta X + 1$, $\theta_j = (j-1)\Delta\theta$ 와 같이 표시된다.

시간의 경과에 따른 온도의 변화를 계산하기 위하여 앞의 에너지식에서 對流項만 우선 고려하여 half-cell 로 差分化한다. 이것을 Taylor 급수전개에 대입하고 高次項을 무시하면 對流項만 고려한 잠정적인 온도값($\tilde{\theta}$)이 나오는데 여기에 傳導에 의한 영향을 고려하면 완전한 溫度式이 아래와 같이 나온다.¹⁴⁾

$$\begin{aligned} \theta_{i,j}^{n+1} &= \tilde{\theta}_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta\tau}{P_r} \cdot \frac{1}{\Delta X^2} \\ & \left[\tilde{\theta}_{i+1,j}^{n+1} - 2 \cdot \tilde{\theta}_{i,j}^{n+1} + \tilde{\theta}_{i-1,j}^{n+1} \right] \\ & + \frac{\Delta\tau}{P_r} \cdot \frac{1}{X_i^2 \Delta\theta^2} \\ & \left[\tilde{\theta}_{i,j+1}^{n+1} - 2 \cdot \tilde{\theta}_{i,j}^{n+1} + \tilde{\theta}_{i,j-1}^{n+1} \right] \\ & + \frac{\Delta\tau}{P_r} \cdot \frac{1}{2X_i \cdot \Delta X} \left[\tilde{\theta}_{i+1,j}^{n+1} - \tilde{\theta}_{i-1,j}^{n+1} \right] \quad (18) \end{aligned}$$

또 流動場의 vorticity 계산도 溫度 계산과 同一한 方法으로 잠정단계의 \tilde{W} 를 구한 다음 擴

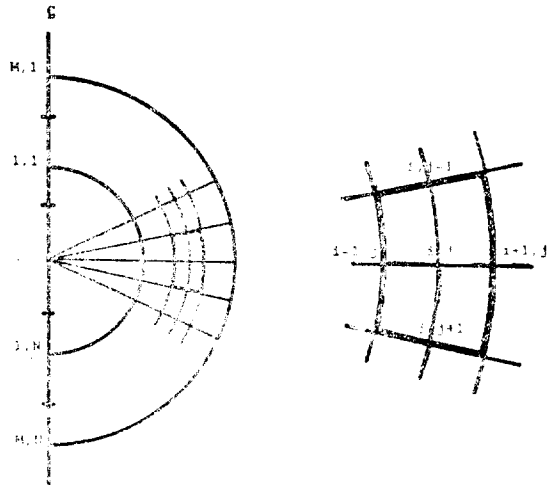


Fig. 2. Mesh Geometry for the System

散 및 浮力の 영향을 포함시키면 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} W_{i,j}^{n+1} &= \tilde{W}_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta\tau}{\Delta X^2} \left[\tilde{W}_{i-1,j}^{n+1} - 2 \cdot \tilde{W}_{i,j}^{n+1} \right. \\ & \left. + \tilde{W}_{i+1,j}^{n+1} \right] + \frac{\Delta\tau}{X_i^2 \cdot \Delta\theta^2} \left[\tilde{W}_{i,j+1}^{n+1} - 2 \cdot \right. \\ & \left. \tilde{W}_{i,j}^{n+1} + \tilde{W}_{i,j-1}^{n+1} \right] + \frac{\Delta\tau}{2 \cdot G_r \cdot X_i \cdot \Delta X} \\ & \left[\tilde{W}_{i+1,j}^{n+1} - \tilde{W}_{i-1,j}^{n+1} \right] - \frac{\Delta\tau}{X_i^2} \tilde{W}_{i,j}^{n+1} \\ & - \frac{G_r \cdot \Delta\tau}{2} \left[\frac{1}{\Delta X} \cdot X_i \cdot \sin\theta_j \left(\tilde{\theta}_{i,j+1}^{n+1} \right. \right. \\ & \left. \left. - \tilde{\theta}_{i,j-1}^{n+1} \right) + \frac{1}{\Delta\theta} \cdot \cos\theta_j \left(\tilde{\theta}_{i,j+1}^{n+1} \right. \right. \\ & \left. \left. - \tilde{\theta}_{i,j-1}^{n+1} \right) \right] \quad (19) \end{aligned}$$

Stream function 계산을 위해 (8)식을 Successive Over-Relaxation Method(SOR 法)에 의하여 전개하면

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^{k+1} &= \psi_{i,j}^k + \frac{F}{2\left(1 + \frac{a^2}{X_i^2}\right)} \\ & \left[\left(1 + \frac{\Delta X}{2X_i}\right) \psi_{i+1,j}^k + \left(1 - \frac{\Delta X}{2X_i}\right) \psi_{i-1,j}^{k+1} \right. \\ & \left. + \frac{a^2}{X_i^2} \psi_{i,j+1}^k + \frac{a^2}{X_i^2} \psi_{i,j-1}^{k+1} - 2\left(1 + \frac{a^2}{X_i^2}\right) \psi_{i,j}^k + \frac{\Delta X^2}{X_i} W_{i,j}^{n+1} \right] \quad (20) \end{aligned}$$

와 같이 되는데, 위의 SOR 法에서 $F=1$ 인 경우는 Riebmman 法이고, $F=1$ 이며 explicit 한 방법으로 푸는 것이 Richardson 法이다. 여기서 a 는 $\Delta X/\Delta\theta$ 이고 F 는 relaxation parameter로서 예비실험 결과 이 값이 1.6 일때 상당히 좋은 收斂性을 보여 모든 수치실험에 이 값을 이용했다. 이때의 收斂基準式으로는

$$\frac{\left| \psi_{i,j}^{k+1} - \psi_{i,j}^k \right|}{\psi_{i,j}^{k+1}} \leq \varepsilon$$

을 사용했으며 본 연구에서는 ε 의 값을 10^{-4} 으로 정했다. 또 벽면에서의 vorticity 는 (8)式을 유한차분화한 후 벽면에서의 stream function 을 零으로 두고 no-slip 조건을 적용하면 다음과 같다.

$$W_{1,j}^{n+1} = -\frac{2X_1(\psi_{2,j}^{n+1} - \psi_{1,j}^{n+1})}{\Delta X^2} \quad (22)$$

$$W_{M,j}^{n+1} = \frac{2X_M(\psi_{M,j}^{n+1} - \psi_{M-1,j}^{n+1})}{\Delta X^2} \quad (23)$$

空洞內에서 流動을 나타내는 速度場은 stream function 의 정의식(7式)을 유한차분화하여 다음과 같이 구해지며 벽면에서는 no-slip 조건에 의하여 零이 된다.

$$U_{i,j}^{n+1} = \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}}{2X_i\Delta\theta}$$

$$V_{i,j}^{n+1} = \frac{\psi_{i-1,j}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta X} \quad (24)$$

또 중심축에서는 반경방향의 속도만 존재하므로 다음과 같은 式이 성립된다.

$$U_{i,1}^{n+1} = \frac{\psi_{i,2}^{n+1}}{X_i\Delta\theta} \quad U_{i,N}^{n+1} = -\frac{\psi_{i,N-1}^{n+1}}{X_i\Delta\theta} \quad (25)$$

內壁에서의 平均 Nusselt number 는

$$\bar{N}_u = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial\theta}{\partial X} \Big|_{x=1} d\theta \quad (26)$$

으로 정의될 수 있는데, 우변의 積分은 Simpson 公式에 의해서 계산하였다.

外壁을 成層條件으로 두었을 경우도 위와 마찬가지로 方法으로 θ' , W' , ψ' , U' , V' 를 구할

수 있다.

3. 數値模寫實驗

본 연구에서는 內壁과 外壁을 等溫으로 유지했을 경우와 內壁의 온도값 및 斷熱條件에 따라 6종류의 수치실험을 행하였는데 11×11 mesh로 差分化하였고 環狀空間의 半徑比 R 은 2로 두었다.

Table 1에서 보는 바와 같이 I의 경우는 정지해 있는 상태에서 內壁을 가열해주는 경우이며 II, III, IV, V의 경우는 外壁을 수직성층에 따른 分布値로 고정시키고 內壁의 溫度를 變化시켰으며, VI의 경우는 內壁을 斷熱條件으로 둔 것이다. 또 I의 경우는 $G_r = 2.8 \times 10^4$ 일때 II~VI의 경우는 $G_r' = 1$ 일때 數値模寫를 행하였다.

수치실험에서 $\Delta\tau$ 의 한계는 Neumann의 安定性限界¹³⁾로부터 에너지식의 傳導項과 vorticity transport 식의 擴散項에 대해서는

$$\frac{\Delta\tau}{P_r} \left(\frac{1}{\Delta X^2} + \frac{1}{X} \cdot \frac{1}{\Delta X} + \frac{1}{X^2 \Delta\theta^2} \right) \leq \frac{1}{2} \quad (27-a)$$

$$\Delta\tau \left(\frac{1}{\Delta X^2} + \frac{1}{X^2 \Delta\theta^2} + \frac{1}{2X^2} - \frac{1}{X \Delta X} \right) \leq \frac{1}{2} \quad (27-b)$$

이고 對流項에 대해서는

$$\Delta\tau \left(\frac{|U|}{\Delta X} + \frac{|V|}{X \Delta\theta} \right) \leq 1 \quad (28)$$

이므로 위 조건을 만족하도록 $\Delta\tau$ 의 크기를 조정하면서 수치실험을 행하였다. 즉 초기에는 (27-a), (27-b)식 중에서 실제로 $\Delta\tau$ 한계에 제한을 주는 (27-a)식을 사용하여 시간증분을 조정하였으며, 다음 시간단계부터는 對流項에 의하여 제약을 주는 (28)식을 이용하여 $\Delta\tau$ 의 크기를 조정하였다.

4. 結果 및 檢討

內壁을 가열했을 경우(I의 경우)는 Fig. 3에서 보는 바와 같이 초기에는 環狀空間의 內壁

Table 1. Initial Conditions and Boundary Conditions for Cases I through VI

Case	I	II	III	IV	V	VI
Conditions						
Temperature						
at $X=1$	$\theta=1$	$\theta'=1$	$\theta'=0.3$	$\theta'=0.1$	$\theta'=0$	$\frac{\partial \theta}{\partial X}=0$
at $X=2$	0	$2 \cdot \cos \theta$	$2 \cdot \cos \theta$	$2 \cdot \cos \theta$	$2 \cdot \cos \theta$	$2 \cdot \cos \theta$
at $\tau=0$	0	1	0.3	0.1	0	0
U, V, W at $\tau=0$	0	0	0	0	0	0
U, V, W at the wall	0	0	0	0	0	0

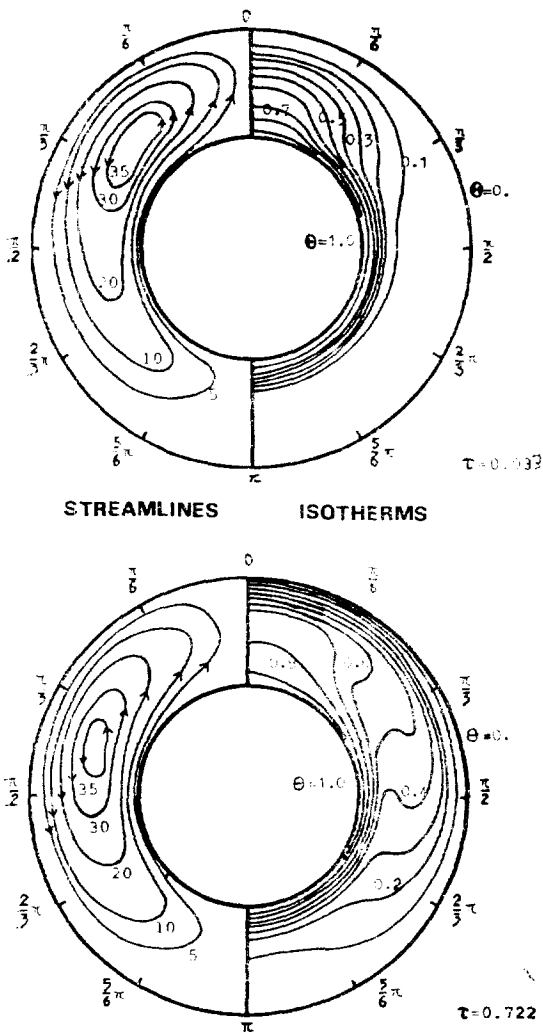


Fig. 3. Streamlines and Isotherms of Case I

近處에서 熱傳達가 시작되어 內壁쪽에 等溫線이 密集되어 있다. 시간이 지남에 따라서 外부분은 아래쪽으로 내려가 外壁의 上部와 內壁의 下部 쪽에 等溫線이 밀집된다. 또 流動은 안정된 모양을 가지면서 流動의 中心이 점차 中央으로 내려와 $\theta = \frac{5}{12}\pi$ 에서 半径속도 성분(U) 값의 부호가 바뀐다.

그리고 시간경과에 따른 內壁의 平均 Nusselt number는 Fig. 4에서 보는 바와 같이 無次元 時間 $\tau = 0.05$ 까지 사이에 급격하게 自然對流

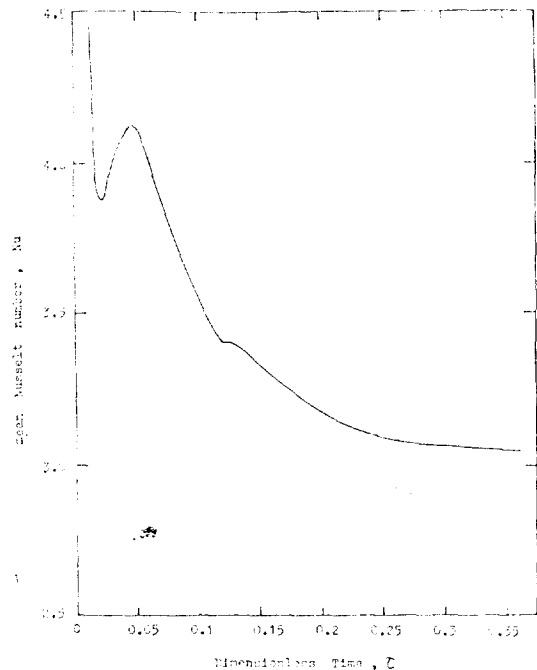


Fig. 4. Variation of mean Nusselt number with time for Case I

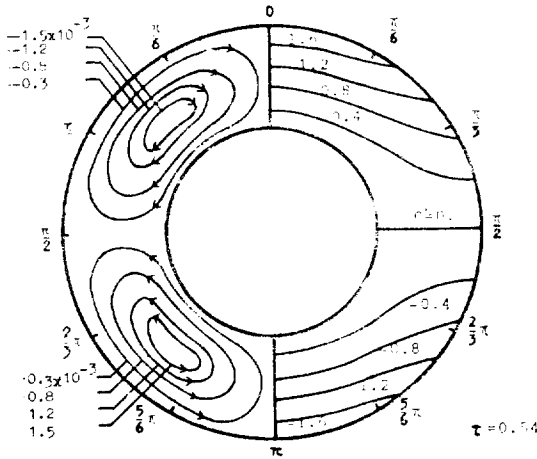


Fig. 5. Streamlines and Isotherms of Case V

熱傳達現象이 진행되며, $\tau = 0.12$ 부근에서 조그만 peak가 생기는데 이는 streamline에는 나타나지 않으나 이 시간에 아주 微弱한 반대방향의 流動이 생기는 것이라고 판단된다.

Mack 등⁵⁾은 R 값이 2, Pr 값이 0과 1 사이, 內壁의 溫度값이 1보다 큰 경우일 때 급수해가 수렴하는 것을 조사하였다. 본 연구에서는 R 값이 2, Pr 값이 0.72일때 內壁의 溫度값을 0에서 1까지 變化시키면서 溫度分布와 streamline을 비교 검토하였다(Ⅱ~Ⅴ의 경우).

內壁의 溫度가 수평축의 溫度와 같으면(Ⅴ의 경우) 流動은 cylinder의 축에 따라 수직축($\theta = 0$ 와 π)과 수평축($\theta = \frac{\pi}{2}$ 와 $\frac{3\pi}{2}$)에서 서로 대칭이 되는데 이에 대한 溫度分布와 streamline은 Fig. 5에서 보는 바와 같다.

또 內壁의 溫度가 外壁의 最大溫度 보다 높은 경우에는 두 環狀空間에 crescent-eddy(초생달 와류)의 單一 cell이 존재하나 內壁의 溫度가 낮아져 약 1.5가 되면 $\theta = 0$ 가까이에서 다른 cell이 생긴다. 內壁의 溫度가 0에 가까워지면 流動은 수평축에 대칭이 되는 double cell이 형성되는데 Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ 경우에서의 溫度分布와 streamline을 Fig. 6, Fig. 7과 Fig. 8에 그렸다.

內壁을 斷熱條件으로 했을때(Ⅵ의 경우)의 시간변화에 따른 온도분포와 streamline을 Fig. 9

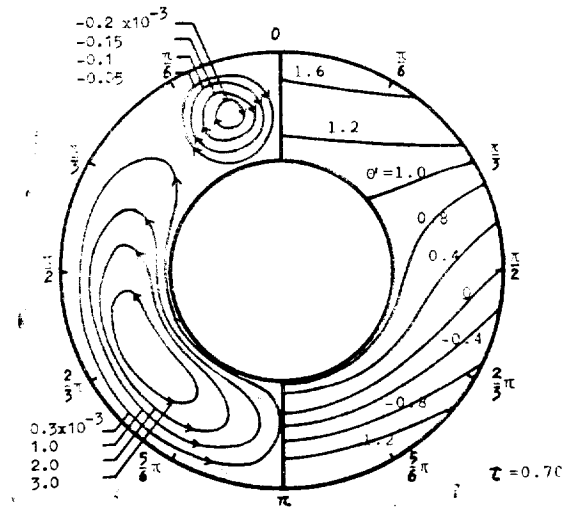


Fig. 6. Streamlines and Isotherms of Case II

에 그렸다. 처음에는 $\theta = 0$ 와 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 사이에서, 또 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 와 $\theta = \pi$ 사이에서 각각 반대방향의 streamline이 형성되나 시간이 지남에 따라 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 의 內壁쪽에서 secondary cells이 형성 확장되고 primary cells은 점점 소멸되는데 많은 시간이 지나면 primary cells이 없어지며 이때의 streamline은 Ⅴ의 경우 streamline과 모양이 같고 방향은 반대가 되리라고 예상된다. 여기에서 secondary cells이 생기는 것은 Fig. 10에서 보는 바와 같이 초기에는 內壁을 等溫條件으로 했을때와 마찬가지로 熱傳達이 일어나지만 시간이 지나면서 內壁이 단열된 영향으로 반대방향의 流動이 일어나는 것이라고 생각된다.

內壁의 溫度가 0(Ⅴ의 경우) 및 斷熱條件(Ⅵ의 경우)일 경우에 外壁의 $\theta = 0$ 와 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 사이의 平均 Nusselt number를 Fig. 10에 그렸다. 그림에서 보는 바와 같이 無次元 時間 $\tau = 0.2$ 까지는 熱傳達現象이 同一하게 일어나고 있으나 그 이후에는 內壁을 等溫으로 했을 경우가 斷熱로 했을 경우보다 熱傳達이 더 심하게 일어남을 알 수 있다. 또 Fig. 4와 비교하면 Ⅴ, Ⅵ의 경우가 Ⅰ의 경우보다 완만한 곡선을 그리는데 이는 外壁을 成層條件으로 두었을 경우가 等溫條件으로 두었을 경우보다 安定된 熱傳達이

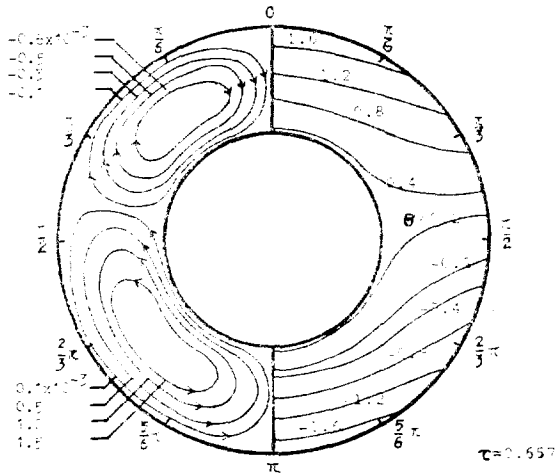


Fig. 7. Streamlines and Isotherms of Case III

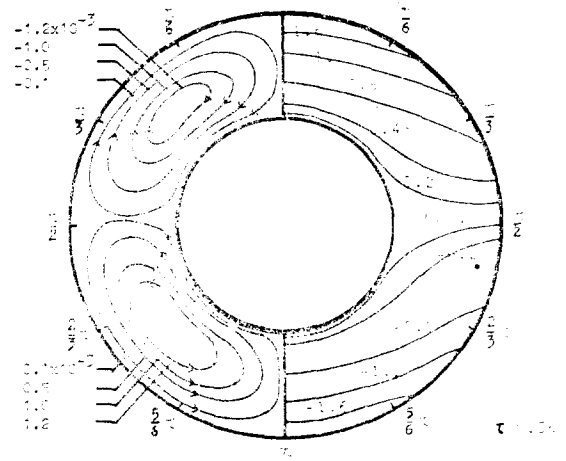


Fig. 8. Streamlines and Isotherms of Case IV

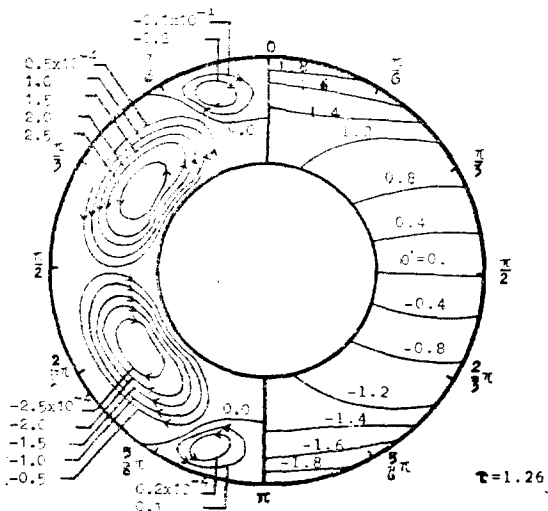
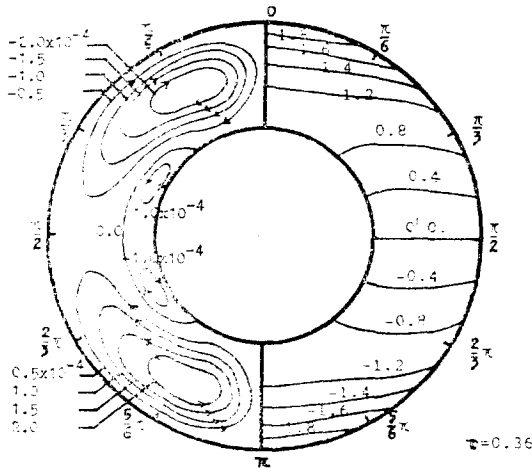


Fig. 9. Streamlines and Isotherms of Case VI

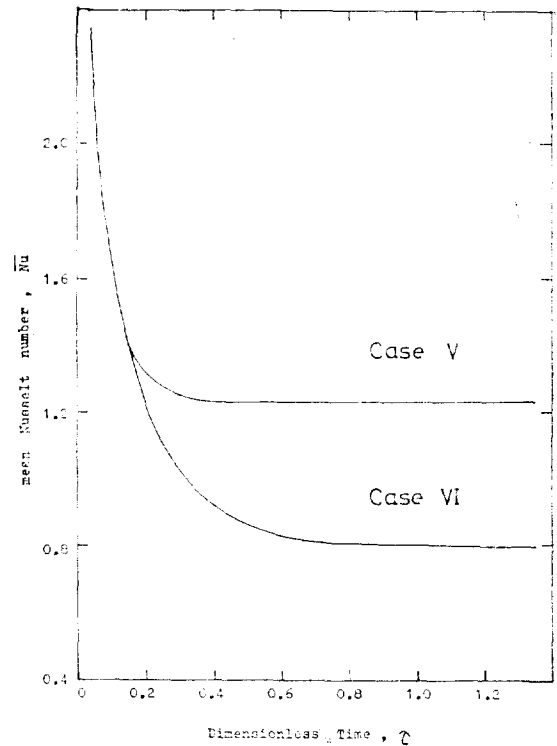


Fig. 10. Variation of mean Nusselt number with time for Cases V and VI

일어남을 나타낸다.

5. 結 論

본 연구는 實驗으로 측정하기 힘든 水平環狀空間에서의 熱傳達現象을 數值模寫로 해결하려는 기초연구로서 실제문제에의 응용에 많은 도움이 될 것으로 기대되는 바 그 주요결론은 아래와 같다.

1. 解析의으로 구하기 힘든 聯立 非線型 偏微分 方程式을 stream function과 vorticity를 이용하여 有限差分法으로 해결할 수 있었으며, 對流項과 擴散項을 따로 고려하여 implicit와 explicit한 方法을 혼합한 有限差分法이 圓柱座標系에서도 效果의임을 확인하였다.

2. 圓형 環狀空間의 양쪽벽을 等溫條件으로 두지 않고 成層條件의 分布値로 두고도 數值解를 구할 수 있었으며, 時間의 經過에 따른 溫度分布 및 streamline의 變化를 現象學적으로 觀察할 수 있었다.

3. 境界條件에 따라 flow pattern이 상당히 달라짐을 보였다. 특히 內壁을 斷熱條件으로 했을 경우에는 시간이 지남에 따라 처음에 형성된 cells에 대해서 반대방향의 되는 cells이 생겨서 확장되는 것이 觀察되었다.

4. 加熱面에서의 平均 Nusselt number를 구하였는 바, 加熱面을 成層條件으로 두는 경우가 等溫條件으로 두는 경우보다 시간에 따른 熱傳達現象이 서서히 安定되게 일어남을 알 수 있었다.

使用符號

F : SOR 法の relaxation parameter

g : 중력가속도, cm/sec²

G_r, G_r' : Grashof numbers (6)식 및 (13)식 참조).

M, N : 반경과 원주방향의 格子點의 수

\bar{N}_u : 平均 Nusselt number

Pr : Prandtl number, ν/α

R : radius ratio, R_o/R_i

R_i, R_o : 內半徑 및 外半徑, cm

r : 中心에서부터의 거리, cm

T : 溫度, °C

T_i, T_o : 內壁 및 外壁의 溫度, °C

T_m : 수평 축에서의 溫度, °C

t : 時間, sec

U, U' : 無次元 반경방향 속도

V, V' : 無次元 원주방향 속도

u : 반경방향 속도, cm/sec

v : 원주방향 속도, cm/sec

W, W' : 無次元 vorticity

X : 無次元 반경거리

ΔX : 無次元 반경방향의 격자간격

y : 수직방향 성분, cm

회 략 문 자

α : 熱擴散 係數, cm²/sec

β : 體膨脹 係數, °K⁻¹

ε : 수렴한계치

ζ : vorticity, sec⁻¹

θ : 중심 축에서 회전한 각

$\Delta\theta$: 원주방향 격자간격

Θ, Θ' : 無次元 溫度

ν : 動粘度, cm²/sec

ρ : 密度, g/cm³

ρ_m : 수평 축에서의 密度, g/cm³

Ψ, Ψ' : 無次元 stream function

φ : stream function, cm³/sec

τ, τ' : 無次元 時間

$\Delta\tau$: 無次元 시간증분

첨 자

k : 반복회수

n : 시간단계

i, j : 반경 및 원주방향의 위치

References

1. T.H. Kuehn, Ph. D. Thesis, University of Minnesota, 1976.
2. M.R. Abbott, Quart. J. Mech. and Applied Math., XVII, Pt. A (1964), 472.

3. J.E. Fromm, Phys. Fluid, 8(1965), 1757.
4. J.E. Fromm, IBM J. Res. Develop., 15 (1971), 186.
5. L.R. Mack and E.H. Bishop, Quart. J. Mech. and Applied Math., XXI, Pt. 2(1968), 223.
6. E.H. Bishop, C.T. Carley and R.E. Powe, Int. J. Heat Mass Transfer, 11(1968), 1741.
7. G. de Davis and R.W. Thomas, Phys. Fluid, Suppl. II(1969), 198.
8. J. Huetz and J.P. Petit, 5th Int. Heat Transfer Conf., NC 4.9(1974), 169.
9. T.H. Kuehn and R.J. Goldstein, J. Fluid Mech., 74(1976), 695.
10. M.C. Charrier-Mojtabi, A. Mojtabi and J.P. Caltagirone, J. Heat Transfer ASM E, 101(1979), 171.
11. S.N. Singh and J.M. Elliott, Int. J. Heat Mass Transfer, 22(1979), 639.
12. E. Sande and B.J.G. Hamer, Int. J. Heat Mass Transfer, 22(1979), 361.
13. R.J. Roache, Hermosa, Albuquerque, 1972.
14. 서문호, 이기준, 바닥을 가열한 실내에서의 자연대류에 관한 수치모사, 화학공학, 16 (1978), 201.