

多孔性 媒質內 流體의 自然對流에 관한 研究

徐 文 漢

亞洲大學校 工科大学 化學工學科

(1982 년 7 월 1 일 접수)

Multicellular Convection in a Fluid-Saturated Porous Medium

Moon-Ho Suh

*Department of Chemical Engineering, College of Engineering,
Ajou University, Suwon 170, Korea*

(Received; July 1, 1982)

요 약

다공성 매질내에서 일어날 수 있는 유체의 다양한 자연대류 열전달 방식들을 결정하고, 이들의 특성을 조사하기 위하여 바닥이 가열되며 투수성 상층면을 가지는 상자를 모델로 광범위한 수치실험을 수행하였다. 유체의 유동과 전열현상을 모사한 Darcy-Boussinesq 식의 해를 유한차분법으로 구하였는 바 Poisson 형의 압력식은 직접해법으로 해를 구하여 수치적인 잡음을 제거하였고, 에너지식은 중심차분법이나 upwind 차분법의 단점을 보완시킨 power-law weighted upwind 차분법으로 풀어 오차확산을 방지하였다.

본 연구에서는 일정한 Rayleigh 수에서도 여러가지의 정상상태 자연대류 및 진동성 대류유동이 셀(cell)수에 따라 가능함을 확인하였고, 정상상태의 다중셀 유동이 시작되는 임계 Rayleigh 수와 비정상상태의 진동성 대류가 시작되는 이차 임계 Rayleigh 수를 2~5 중셀 대류방식에 대하여 각각 결정하였으며, Nusselt 수를 Rayleigh 수와 셀의 수에 따라 계산함으로써 전열속도가 최대가 되는 최적 대류열전달 방식을 결정할 수 있었다.

ABSTRACT

In order to examine the characteristics of the various types of convection that can occur in a fluid-saturated porous material, numerical experiments are carried out for a permeable-top box heated from below. A cyclic reduction method is applied for solving Poisson-type pressure equation to avoid false flow fields due to the iterative numerical noise and a modified upwind scheme is utilized to overcome diffusional truncation errors in solving energy equation of para-

bolic type.

The main results of the present study are as follows. The conditions leading to onset of multicellular steady convections, second critical Rayleigh numbers above which fluctuating unsteady convections exist, variations of Nusselt number with Rayleigh number, and the effective convection patterns which maximize the heat transport are determined as functions of convective cell-number.

In summary, the results show that the various types of convection are possible for a given Rayleigh number and box geometry depending on the initial conditions.

1. 서 론

지열 및 석유등 지하에너지의 회수와 효과적인 전열방식의 실제에 관련하여 관심이 집중되고 있는 다공성 매질내 유체의 전열현상해석은 전도열전달 상태에서부터 대류유동으로 전환되는 임계조건을 결정하는 연구와 임계점 이후의 유동 및 열전달의 제반 특성을 규명하는 연구로 대별된다.

다공성 매질내에서의 대류유동개시에 관한 연구는 처음 Horton과 Rogers¹⁾ 및 Lapwood²⁾에 의하여 시도되었는 바 이들은 각각 등은으로 유지되는 무한한 두 불투수층(impermeable layer) 사이에서 대류유동이 시작되는 임계 Rayleigh 수가 4²임을 선형 안정성해석으로 결정하였으며, 이들의 이론은 그후 다공성 매질의 다양한 기하구조^{3,4)}와 경계조건^{5,6)}에 대하여 확장되었다.

임계점 이상의 Rayleigh 수에서는 정상상태의 대류유동이 시작되며, Rayleigh 수의 증가에 따라 유동 및 열전달은 점점 증가하는데 이들의 제반 특성은 수치실험법에 의하여 주로 해석되었는바 바닥에서 가열되는 두 불투수층 사이에서의 대류에 관한 Palm, et al⁷⁾과 Straus⁸⁾의 연구, 불투수성 벽으로 둘러싸인 상자를 모델로한 Holst와 Aziz,⁹⁾ Horne¹⁰⁾ 및 Straus와 Schubert^{11,12)}의 연구결과들이 발표되어 있다.

한편 Elder¹³⁾는 Rayleigh 수가 상당히 증가되면 이러한 정상상태의 대류유동은 존재할 수 없으며, 진동성 대류유동이 영구히 진행되는 소위 oscillatory convection이 존재한다는 연구결과를

발표하여 주목을 끌었는데 이 현상은 그후 여러 학자들에 의하여 연구^{14~20)}되어 진동성 대류유동이 시작되는 이차 임계 Rayleigh 수, 이차유동의 생성원인과 형태등이 부분적으로 규명되고 있다.

이와같이 다공성 매질내 유체의 자연대류에 대한 연구는 여러 방면으로 진행되어왔다. 그러나 이상의 연구들은 대부분 불투수성 경계면에 대한 해석인바 실제 시스템의 상층면은 투수성이라는 점을 고려한 연구가 필연적이며, 이와 아울러 매질내에서 일어날 수 있는 대류유동의 모드(mode)를 어떤 특정한 방식 즉 단일셀이나 이중셀 유동등으로 고정시키지 않고 가능한 여러 종류의 다중셀들을 포괄적으로 취급하는 일반화된 연구가 필요하다. 따라서 본 연구에서는 투수성 상층면을 갖고 바닥에서 가열되는 상자형 매질내에서 발생할 수 있는 여러형태의 대류모드에 대하여 일차 및 이차 임계 Rayleigh 수를 확정시키고자 하며, 정상상태의 유동이 존재하는 범위에서의 Nusselt 수와 Rayleigh 수의 관계를 일일이 구함으로써 최적전열방식을 결정하고, 진동성 유동의 발생원인 및 거동을 규명하고자 한다. 상기 연구를 수행하기 위해서는 대류유동의 존재여부를 Rayleigh 수에 따라 정확히 계산하지 않으면 임계점을 찾을 수가 없으므로 정밀한 수치실험법의 선정이 선행되어야 하며, 여러가지 대류방식과 Rayleigh 수에 따라 정상상태의 해를 모두 구해야 하는 수치실험의 방대함으로 인하여 경제적인 프로그램의 개발이 따라야 함은 필수적이다.

2. 이론전개 및 수치실험법

본 연구에서는 이차원 유동을 해석하기 위하여 수평 및 수직방향의 길이가 L 및 H 이고 두께가 얇은 상자속에 물로 포화된 다공성 매질을 모델로 설정하였다. 수평경계면은 각각 T_{top} 및 T_{bot} 의 등온으로 유지되는 반면 벽면은 단열되어 있고, 상층면은 투수성이며 다른 면들은 불투수성이다.

이러한 모델에 대한 유체의 유동과 전열현상은 Darcy-Boussinesq의 가정을 도입하여 연속 방정식, 운동방정식 및 에너지식으로 모사할 수 있는데 무차원의 기본방정식들은 다음과 같이 유도된다.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$0 = -\nabla p - \mathbf{v} + Ra(\theta - \theta_0)\mathbf{e}_z, \quad (2)$$

$$\frac{(\rho C_p)_{eq}}{(\rho C_p)_f} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \nabla \cdot \mathbf{v} \theta = \nabla^2 \theta \quad (3)$$

여기서 \mathbf{v} 는 Darcy의 속도벡터로서 수평과 수직방향의 속도성분을 가지며, \mathbf{e}_z 는 수직방향의 단위벡터이다. 변수들의 무차원화는 길이는 H , 온도는 $(T_{bot} - T_{top})$, 속도는 $k_{eq}/(\rho C_p)_f H$, 압력은 $\mu k_{eq}/K \cdot (\rho C_p)_f$, 시간은 $H^2(\rho C_p)_f/k_{eq}$ 를 특성치들로 하여 행하였다. 무차원수인 Rayleigh 수는

$$Ra = \frac{gK\beta_f(T_{bot} - T_{top})H}{\nu_f(k_{eq}/(\rho C_p)_f)} \quad (4)$$

로 정의하였으며, 여기서 g 는 중력가속도이고 K 는 다공성 매질의 투수율이며 β_f, ν_f, ρ_f 및 C_{pf} 는 각각 유체의 체팽창계수, 동점도, 밀도 및 비열이다. 물성치들은 평균온도에서의 값을 취했으며, 상당열전도도 k_{eq} 와 상당열용량 $(\rho C_p)_{eq}$ 은 다음과 같이 정의하였다.²¹⁾

$$k_{eq} = \phi k_f + (1 - \phi)k_s, \quad (5)$$

$$(\rho C_p)_{eq} = \phi(\rho C_p)_f + (1 - \phi)(\rho C_p)_s \quad (6)$$

여기서 ϕ 는 다공도이고, 하첨자 f 와 s 는 유체와 다공성 매질을 의미한다.

상기한 기본방정식들은 경계조건과 함께 유한 차분법으로 해를 구하게 되는데 에너지식 (3)은 grid Peclet 수가 작을 때는 FTCS(forward-time/

centered-space) 차분법으로 해를 얻을 수 있으나 본 연구에서는 대단히 미세한 격자를 요하게 되므로 경제적이지 못하여 upwind 차분법을 일차적으로 사용하였다. 그러나 Peclet 수가 큰 구간에서는 확산항이 상대적으로 크게 계산되는 폐단이 있어 이들의 단점을 보완한 소위 power-law weighted upwind차분법²²⁾을 사용하였는데 이는 Peclet 수에 따라 전도항과 대류항을 중량평균하는 방법이다.

유동장의 계산에서는 연속방정식 (1)과 운동방정식 (2)를 결합한 식

$$\nabla^2 p = Ra \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (7)$$

를 사용하였는데 일반적으로 이러한 Poisson 형의 미분방정식의 수치해법으로는 SOR(successive overrelaxation)등의 반복계산법이 사용된다. 그러나 이러한 반복계산법은 계산상의 잡음으로 인하여 거짓유동장이 유도되는데 특히 임계점 부근에서 유동의 존재여부를 정확히 판단해야 하는 본 연구에서는 이 방법의 사용은 불가하다. 따라서 (7)식의 직접해법이 요구되는바 행렬식의 odd-even reduction인 cyclic reduction법을 개량 사용하였으며, 투수성 상층면에서는 압력이 일정하다는 경계면 조건을 이용하여 수치실험을 행하였다.

3. 결과 및 검토

수치실험의 중요한 결과들은 Fig. 1으로 요약할 수 있는데 대류유동의 개시, 정상상태 대류유동이 존재하는 Rayleigh 수의 범위 및 Nusselt 수의 변화, 진동성 유동의 개시, Rayleigh 수에 따른 최적전열방식 등을 대류유동의 셀(cell)수에 따라 도시하였다. 본 수치실험은 $L/H = 2$ 인 경우를 모사하였으며 이러한 구조에서 단일셀 유동은 존재할 수 없고 순간적으로 이중셀로 전환되었다. 한편 5중셀 이상은 전열속도가 4중셀보다 작고 정상상태의 유지범위가 작으므로 5중셀 까지만 도시하였다.

그림에서 보는바와 같이 2~5중셀의 자연대류가 시작되는 임계 Rayleigh 수는 각각 29, 40, 57,

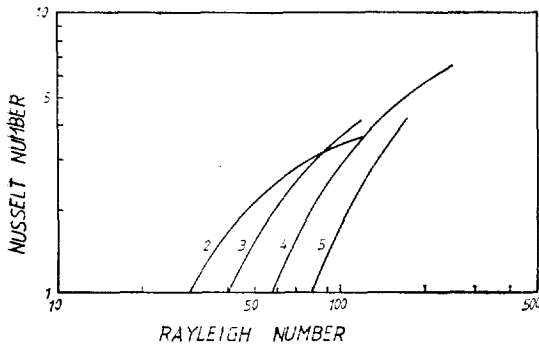


Fig. 1. Nusselt number versus Rayleigh number. Convection is steady over the Rayleigh numbers for which the curves are shown. The integers refer to the number of cells

79이며, 이 결과는 투수성 경계면에 대한 선형 안정성해석의 결과⁶⁾와 잘 일치하여 본 수치실험의 정확성을 간접적으로 증명할 수 있었다. 이중 및 삼중셀 대류는 $Ra = 120$ 까지 정상상태의 유동이 유지되며, 4 중셀은 $Ra = 250$, 5 중셀은 $Ra = 175$ 까지 정상상태의 해가 존재하였고 이후 조금만 Rayleigh 수를 증가시키면 진동성 유동이 발생하였다. 이상에서 언급한 일차 및 이차의 임계 Rayleigh 수는 불투수성 경계면에 대한 연구결과¹⁹⁾와 비교할 수 있는데 투수성 경계면의 경우 이들 임계 Rayleigh 수가 작은 값을 나타내었다. 이 결과로부터 투수성 경계면의 경우 유체의 재순환에 의한 유입으로 인하여 대류 유동이 쉽게 시작되고, 정상상태 유동은 다시 쉽게 파괴되어 진동성 유동으로 전환되어 감을 알 수 있다.

Fig. 1에서 Nusselt 수와 Rayleigh 수의 관계를 비교하면 효과적인 전열방식을 결정할 수 있는데 정상상태 대류유동의 범위에서 $Ra \leq 87$ 에서는 이중셀, $87 \leq Ra \leq 120$ 에서는 삼중셀, $120 \leq Ra \leq 250$ 에서는 사중셀 유동이 최대의 전열속도를 주는 대류방식임을 알 수 있다. 여기서 Nusselt 수는 대류유동이 없는 순수한 전도열전달 상태의 전열속도에 대한 실제 전열속도의 비로써 표시하였으며, 따라서 Nusselt 수가 1인 경우들은 대류가 시작되기전의 전도열전달 상태를 의미한다. 이 Nusselt 수는 정상상태에서는 모든

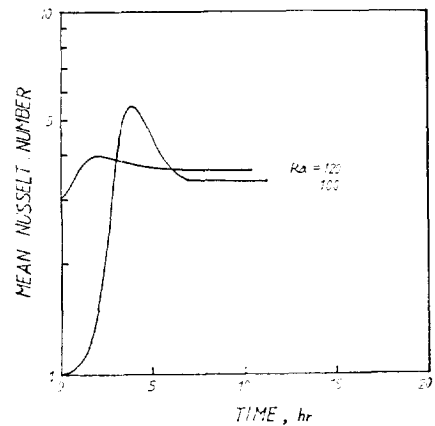


Fig. 2. Variations of mean Nusselt number with time during calculations for steady two-cell convection. The case of $Ra = 120$ started from steady two-cell solution at $Ra = 100$

수평면에서 높이에 무관하게 균일하여 Fig. 1에서와 같이 한점들로 표시되나 과도상태(transient state)에서는 수평면의 높이에 따라 다르므로 층에 따라 평균한 평균치로 표시하기로 한다.

Fig. 2는 정상상태의 이중셀 대류를 구하는 과정에서 평균 Nusselt 수의 변화를 시간에 따라 도시한 것으로서 실제의 시간으로 표시하였으며,

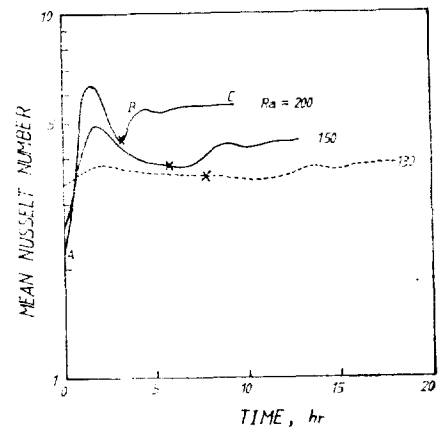


Fig. 3. Variations of mean Nusselt number with time during calculations for steady four-cell convection.

—started from steady two-cell solution at $Ra = 100$,at $Ra = 120$.

X denotes two to four-cell mode switching

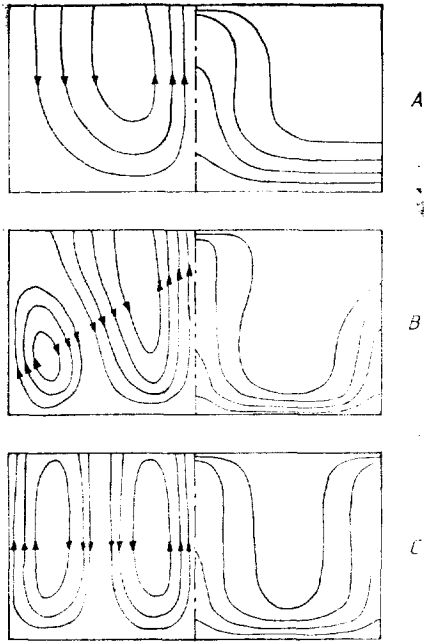


Fig. 4. Variations of streamlines and isotherms during two to four-cell mode switching at $Ra = 200$. Figs correspond to points A through C in Fig. 3

$Ra = 120$ 의 경우는 $Ra = 100$ 에서의 정상상태 이중셀 대류를 초기조건으로 취한 것이다. 이 그림에서 $Ra = 120$ 의 초기 Nusselt 수가 $Ra = 100$ 의 정상상태 Nusselt 수보다 작은 이유는 내부의 온도 및 속도장은 후자의 경우와 같으나 Rayleigh 수를 증가시키기 위하여 바닥의 가열온도를 증가시켰으므로 전도 열전달의 전열속도가 그만큼 증가한 때문이다. Fig. 2와 같은 그림들은 3, 4, 5 중셀에 대하여도 Rayleigh 수에 따라 일일이 구하게 되는데 정상상태의 값들이 Fig. 1의 곡선상의 점들로 표시된다.

정상상태 이중셀 대류는 Rayleigh 수가 120 보다 증가하면 Fig. 3에서 보는 바와 같이 더 이상 이중셀로 유지되지 못하고 4 중셀로 변환되는데 그림에서 X표가 이중셀이 4 중셀로 전환되는 시발점을 표시한다. 이와 같은 대류모드의 전환거동은 온도 및 유동장의 변화과정을 관찰함으로써 이해할 수 있는데 Fig. 4의 A, B, C는 Fig. 3의 $Ra = 200$ 의 경우에 표시한 A, B,

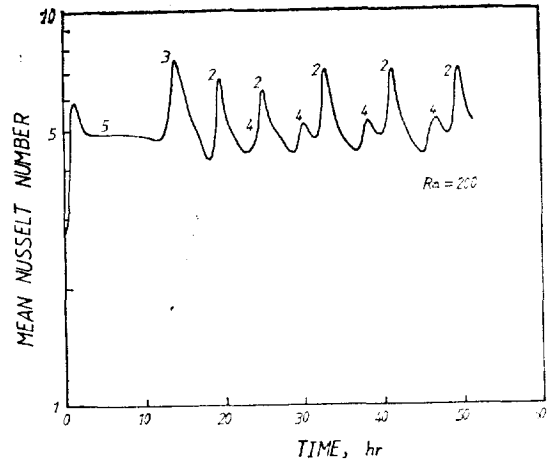


Fig. 5. Variations of mean Nusselt number with time for oscillatory two four-cell convection. The integers refer to the number of cells. The steady five-cell solution at $Ra = 150$ was used as an initial state

C와 대응되는 시간에서의 streamline과 등온선으로서 이차유동은 가열되는 경계면에서 성장됨을 알 수 있다.

$Ra = 120$ 까지 정상상태의 유동을 유지하던 삼중셀 대류는 Rayleigh 수가 더욱 증가되면 삼중셀이 이중셀로 변환된후 2/4 셀 변환이 계속 반복되는 영구적 진동성 대류로 변하며, 5 중셀도 Rayleigh 수가 175를 넘으면 삼중셀을 거쳐 2/4 셀 변환이 반복적으로 진행되는 유동으로 변해가는데 Fig. 5에는 $Ra = 150$ 에서 정상상태에 있던 5 중셀 유동을 $Ra = 200$ 으로 증가시켰을 때 진동성 대류의 생성에 따른 Nusselt 수의 변화를 도시하였다.

이상에서 관찰된 바와 같이 다공성 매질내의 대류유동은 일정한 Rayleigh 수에서도 대류의 모드에 따라 정상상태와 진동성의 유동을 동시에 유도할 수 있으며, 이때의 Nusselt 수가 서로 다르므로 최적전열방식을 선정할 수 있다. 즉 예를 들면 $Ra = 100$ 에서는 2~5 셀의 정상상태 유동이 가능하고 이때 삼중셀의 전열속도가 가장 크며, $Ra = 200$ 에서는 정상상태의 4 중셀 유동과 진동성의 2/4 셀 유동이 각각 가능하다. 이러한 이유로 인하여 여러 연구자들이 서로 다른 결과들을 보고하고 있으며, 따라서 본 연구와 같

은 종합적이고 포괄적인 연구를 통해서만 제반 대류전열특성을 설명할 수 있으리라고 본다.

4. 결 론

밀에서 가열되는 다공성 매질내 유체의 다양한 대류유동특성이 수치실험법으로 규명되었는바 중요한 결과들을 요약하면 다음과 같다.

(1) 일정한 Rayleigh 수에서도 초기조건과 가열과정에 따라 여러가지의 정상상태 및 진동성 대류모드가 가능함을 보였으며, 다중셀 정상상태 대류유동 및 진동성 대류의 개시점을 정확한 수치실험법으로 구한 결과 투수성 경계면을 갖는 경우의 임계 Rayleigh 수들이 불투수성 경계면의 경우보다 작음을 확인하였다.

(2) 정상상태 대류유동에서의 Nusselt 수를 Rayleigh 수와 대류유동의 셀수에 따라 계산함으로써 최적 전열방식을 결정하였다.

(3) 과도상태의 온도 및 유동장으로 부터 이 중셀에서 사중셀로의 2/4 셀 변환을 관측할 수 있었고, 이차적인 유동의 기원은 가열되는 바닥 즉 열경계층임을 규명하였다. 이 결과는 정상상태의 유동이 파괴되는 이유와 진동성 유동에서의 2/4 셀 또는 4/2 셀 전환의 원인을 설명해 주며 앞으로의 비정상상태 진동성 유동 및 대류 열전달에 관한 연구에 중요한 참고자료가 될 것이다.

감 사

본 연구는 문교부의 IBRD 차관에 의한 공과 대학교수 국비 국외파견연구 계획하에 미국 코넬대학교에서 이루어진 것임을 밝히며 관계기관의 여러분께 심심한 사의를 표합니다.

Nomenclature

C_p specific heat
 g gravitational acceleration

K permeability of the porous medium
 k thermal conductivity
 Nu Nusselt number
 p dimensionless pressure
 R_a Rayleigh number
 T temperature
 Z dimensionless vertical position

Greek Letters

β volumetric thermal expansion coefficient
 θ dimensionless temperature
 μ viscosity
 ν kinematic viscosity
 ρ density
 τ dimensionless time
 ϕ porosity

Subscripts

bot refers to the bottom boundary
eq refers to the equivalent quantity
 f refers to the fluid
 s refers to the porous medium
top refers to the top boundary
 o refers to the reference state

REFERENCES

1. C.W. Horton and F.T. Rogers, J. Appl. Phys., **16**(1945), 367.
2. E.R. Lapwood, Proc. Camb. Phil. Soc., **44**(1948), 508.
3. J.L. Beck, Phys. Fluids, **15**(1972), 1377.
4. H.H. Bau and K.E. Torrance, *ibid*, **24**(1981), 382.
5. R.J. Ribando and K.E. Torrance, J. Heat Transfer, **95**(1976), 42.
6. P.K. Tewari and K.E. Torrance, Phys. Fluids, **24**(1981), 981.
7. E. Palm, J.W. Weber and O. Kvernfold, J. Fluid Mech., **54**(1972), 153.
8. J.M. Straus, *ibid*, **64**(1974), 51.
9. P.H. Holst and K. Aziz, Int. J. Heat

- Mass Transfer, **15**(1972), 73.
10. P.N. Horne, J. Fluid Mech., **92**(1979), 751.
11. J.M. Straus and G. Schubert, *ibid*, **87** (1978), 385.
12. J.M. Straus and G. Schubert, *ibid*, **91** (1979), 155.
13. J.W. Elder, *ibid*, **27**(1967), 609.
14. M.A. Combarous and B. LeFur, Acad. Sci., Ser. 269(1969), 1009.
15. R.N. Horne and M.J. O'Sullivan, J. Fluid Mech., **66**(1974), 339.
16. J.P. Caltagirone, *ibid*, **72**(1975), 269.
17. R.N. Horne and M.J. O'Sullivan, Phys. Fluids, **21**(1978), 1260.
18. R.N. Horne and J.P. Caltagirone, J. Fluid Mech., **100**(1980), 385.
19. G. Schubert and J.M. Straus, *ibid*, **94** (1979), 25.
20. J. Gary and D.R. Kassoy, J. Comput. Phys., **40**(1981), 120.
21. P. Cheng, Adv. Heat Transfer, **14**(1978), 1.
22. S.V. Patankar, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow," McGraw-Hill, New York 1980. p. 90.

