

두 액상 계면을 이용한 단일기포의 drift에 관한 연구

신정호, * 주창식

부산대학교 공과대학 화학공학과

*부산개방대학 화학공학과

(1984년 11월 12일 접수, 1985년 3월 19일 채택)

A Study on the Drift behind Single Air Bubble Using two Liquids-Interfaces

Jeong Ho Shin and *Chang Sik Ju

Department of Chem. Eng., College of Eng., Pusan National University

*Department of Chem. Eng., Pusan Open University

(Received 12 November 1984; accepted 19 March 1985)

요 약

단일 기포의 drift에 관한 연구를 위해서, 서로 불용인 두 액상계면을 만들고, 기포가 이 계면을 통과할 때의 계면 변화를 조사하였다. 상층액에서의 기포 장축을 기준으로 한 drift profile은 상-하층액의 비중 및 점도가 모두 같은 경우를 제외하고는, 기포 장축의 영향을 받았다. 그러나, 하층액의 점도가 상층액의 점도와 같거나 큰 계에서 하층액에서의 기포 장축을 기준으로 한 drift profile은 기포 장축이나 상층액의 물성치에 무관하게 일정하며, 하층액의 점도가 감소함에 따라 감소하여, 결국 Darwin의 total drift에 접근한다. Drift가 기포 장축의 영향을 받지 않는 각 계의 평균 drift를 하층액의 점도와 연관지어 다음과 같은 식을 얻었다.

$$\frac{1}{S-1.11} = 0.1 + 0.2\mu_1^{-1} + 0.05\mu_1^{-2}$$

이 식에서 점도를 영(zero)으로 외삽한 값은 1.11로써 Darwin의 total drift에서 구한 drift area 0.95와 큰 차이가 없다.

Abstract — For investigation of the drift behaviors behind single air bubble, interfaces between two insoluble liquids were introduced. In this system, the shape variation of the interface was clearly observed when a bubble was passing through the interface. A drift profile based on the major axis of the bubble in the upper phase of the solution is influenced by the bubble size.

For each system whose viscosity of the lower phase is as large as or larger than that of the upper phase, the drift profile based on the major axis of the bubble in the lower phase is nearly independent of both the bubble size and the physical properties of the upper phase of the solution. The averaged drift in this experiment decreases with the decrease of the viscosity of the lower phase and ultimately approaches Darwin's total drift. To examine the coincidence between Darwin's total drift and data obtained in this work, the averaged drift area of each system was correlated to the viscosity of the lower phase. The correlation shows as follows.

$$\frac{1}{S-1.11} = 0.1 + 0.2 \mu_i^1 + 0.05 \mu_i^2$$

The drift area extrapolated to that of zero viscosity was 1.11, and this value is nearly coincident with that of Darwin's total drift area, 0.95.

1. 서 론

최근 기포의 중요성이 강조되어, 기포의 운동이나 형상은 물론 물질전달에 관해서도 이미 수 많은 연구가 발표되었다. 그러나 wake에 관한 보고는 그리 많지 않으며, 특히 drift에 관한 연구는 매우 적다. Darwin[1]은 고체 구를 지나는 irrotational flow를 연구하여 drift를 주창하였다. 그러나 Darwin의 방법은 drift를 구하는데 절대수렴하지 않는 적분을 포함하는 것이었다. 그뒤 Lighthill [2]은 Darwin의 이러한 결점을 근사식들을 이용해서 해결하고 irrotational flow의 drift profile을 이론적으로 구하였다.

Toei[3]는 2 차원 유동층 내에서 행한 실험의 결과를 Darwin의 결과식과 비교하여, 기포 중심에서 하방 약 기포 반경의 2 배 정도에 가상의 벽이 있어, 그것이 기포와 동일한 속도로 상승한다는 model로 수정을 가했으나, 같은 model을 적용한 3 차원 계에서는 Darwin의 결과와 큰 차가 없는 것으로 나타났다. wake나 drift에 관한 연구가 적은 것은 이에 관한 실험적 연구를 위해서는 기포 주위의 흐름을 시각화해야 한다는 실험상의 어려움 때문이라 생각된다. 흐름을 시각화하는 일반적인 방법은 여러가지[4]가 있으나, 기포나 액적의 연구에는 주로 제 3의 물질을 첨가시키는 방법이 사용되어 왔다.

Kojima[5], Collins[6], Coppus[7]등은 polystyrene 입자를, Crabtree[8]는 Mermaid를 tracer로 사용하여 기포의 거동을 연구하였고, Taneda[9]는 aluminum dust를 사용하여 고체 구의 wake를 연구하였다. Magarvey[10]는 aniline dye로 착색한 액적을 불이 채워진 column속을 통과시켜 염료가 퍼지는 것으로 wake를 연구하였다. Hendrix[11], Yeheskel[12], Takahashi[13]는 diffuser를 이용하여 column내에 유-무색의 계면을 형성시키고, 이를 이용하여 wake를 연구하였으며, Chiba[14]와 Toei

[3]는 유동층 내에 유-무색의 층을 만들어 단일 기포의 wake와 drift에 관한 연구를 하였다. 그러나 이러한 방법들은 실험이 어렵거나, 또는 복잡한 장치가 필요하거나, 3 차원 계에는 적용이 어렵다는 결점을 가지고 있다. 본 연구에서는 서로 불용인 두 액의 계면을 만들고 기포를 상승시켜 기포가 이 계면을 통과할 때의 계면 변화를 관찰하는 간단한 실험으로 drift에 관한 해석을 시도하였다. 그 결과 두 액상의 물리적인 성질에는 차이가 있음에도 불구하고 좋은 결과를 얻을 수 있었다.

2. 이 론

2-1. Drift function t.

Darwin[1]은 고체 구가 비 압축성 이상 유체 속을 운동할 때 일어나는 유체입자의 궤적을 연구하여, 이 고체가 지나간 후 유체입자의 위치가 처음 위치보다 훨씬 앞으로 나가 있는 것을 발견하고, 이를 drift라 하였다. 그는 고전적인 유체역학의 이론으로부터 cylinder와 구의 drift를 구했으나, 이는 절대수렴하지 않는 적분을 포함하는 것이었다. Lighthill [2]은 흐름에 수직인 어떤 면이 고체가 통과한 후 drift되어지는 면을 t =일정이라는 식으로 표현하기 위해서 drift function t 를 다음과 같이 정의했다.

$$dt = \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} \quad (1)$$

이 정의가 Darwin의 방법보다 우월한 점은 흐름에 수직인 모든 면들과 고체 통과 후 형성되는 drift된 면들이 모두 t =일정이라는 식으로 표현되어질 수 있다는 것이다. 고체 구를 지나는 irrotational flow의 stream function은 [15]

$$\phi = \frac{ua^3}{2} \left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{a}{r} \right) \sin^2 \theta \quad (2)$$

로 주어진다. 여기서 $\phi = \frac{1}{2} u \rho_o^2$ 이므로 (2)식은

$$\rho_o^2 = r^2 \sin^2 \theta \left\{ 1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right\} \quad (3)$$

이 된다.

t의 정의식에서

$$dt = \frac{dr}{V_r} = \frac{dr}{u(1 - \frac{a^3}{r^3}) \cos \theta} \quad (4)$$

$$dt = \frac{rd\theta}{V_\theta} = \frac{rd\theta}{u(1 + \frac{a^3}{2r^3}) \sin \theta} \quad (5)$$

Lighthill은 근사식들을 이용해서 (4), (5)식을 적분하여 drift function t를 구하였다.

i) ρ_0/a 가 큰 경우,

$$u \cdot t = \rho_0 \cot \theta + 0.442 \frac{a^6}{\rho_0^5} - 0.914 \frac{a^8}{\rho_0^4} + 1.903 \frac{a^{12}}{\rho_0^3} \dots (6)$$

ii) ρ_0/a 가 작고 θ 가 작은 경우,

$$u \cdot t = -r + \frac{1}{6} \frac{\rho_0^2 r^3}{r^3 a^3} - \frac{1}{3} a(1 + \frac{\rho_0^2}{3a^2}) \log \frac{r-a}{\sqrt{r^2+ar+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} a(1 - \frac{\rho_0^2}{3a^2}) \tan^{-1}(\frac{a\sqrt{3}}{a+2r}) \quad (7)$$

iii) ρ_0/a 가 작고 $(r-a)/a$ 가 작은 경우,

$$u \cdot t = \frac{1}{2} \times (\rho_0) + \frac{2}{3} a(1 + \frac{\rho_0^2}{3a^2}) \log \cot \frac{\theta}{2} + \frac{2\rho_0^2}{9a} \cot \theta \cdot \csc \theta \quad (8)$$

여기서 $X(\rho_0) = \frac{4}{3} a(1 + \frac{\rho_0^2}{3a^2}) \log \frac{3^{\frac{3}{4}}(2a)}{\rho_0} -$

$$(2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}})a + (\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1) (\frac{\rho_0^2}{9a})$$

(6), (7), (8)식의 결과를 그림으로 나타내면 정지한 고체 구를 유체가 지날 때의 그림이 된다. 여기서 정지 유체 속을 운동하는 고체 구의 drift를 알려면 고체 구의 속도를 보정하면 된다. Lighthill [2]은 고체 구가 완전히 통과한 후의 drift를 $X(\rho) = \lim_{x \rightarrow \infty} (u \cdot t - x)$ 로 구하였다. Fig. 1는 Lighthill이 구한 고체 구를 지나는 irrotational flow의 total drift인데, ρ 와 $X(\rho)$ 의 눈금을 같게 잡으면 유체 면의 실제 모습을 나타내게 된다.

2-2. 기포의 종말속도와 장축 계산

기포의 종말 속도와 형상에 관한 연구는 많이 발표되었다. Grace [16]는 이들 data를 여러 연구자들이 제시한 식들에 적용시켜 본 결과 Johnson과 Braida [17]가 제안한 식이 오차가 가장 적다는 것

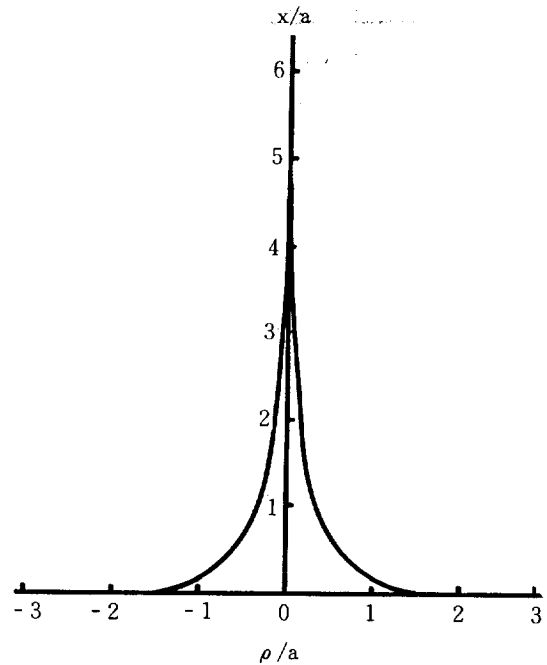


Fig. 1. Darwin's total drift profile for irrotational flow past a solid sphere [2].

을 알았다. 그는 Johnson과 Braida식의 계수와 두 직선 영역의 경계값을 수정하여 오차를 줄여 다음 식을 얻었다.

$$J = 0.94 H^{0.757} \quad (2 < H < 59.3) \quad (9)$$

$$J = 3.42 H^{0.441} \quad (H > 59.3) \quad (10)$$

$$\text{여기서 } H = \frac{4}{3} Eo M^{-0.149} (\mu/\mu_w)^{-0.14} \quad (11)$$

$$J = Re M^{0.149} + 0.857 \quad (12)$$

윗 식에서 종말 속도는 무차원군 J에만 나타나므로 다음 식으로 종말 속도를 구할 수 있다.

$$u = \frac{\mu}{de} M^{-0.149} (J - 0.857) \quad (13)$$

Tadaki [18]는 여러가지 계에서 기포의 거동을 조사하여 기포의 형상은 $Re \cdot M^{0.23}$ 의 값에 따라 다음의 4가지 식으로 잘 나타나진다고 보고했다.

$$de/a = 1 \quad Re \cdot M^{0.23} < 2 \quad (14)$$

$$de/a = 1.14 (Re \cdot M^{0.23})^{-0.176} \quad 2 < Re \cdot M^{0.23} < 6 \quad (15)$$

$$de/a = 1.36 (Re \cdot M^{0.23})^{-0.28} \quad 6 < Re \cdot M^{0.23} < 16.5 \quad (16)$$

$$de/a = 0.62 \quad 16.5 < Re \cdot M^{0.23} \quad (17)$$

그 뒤 Takahashi [13]는 glycerine수용액으로 행한 실험의 data와 Tadaki [18]의 결과식을 비교해 본

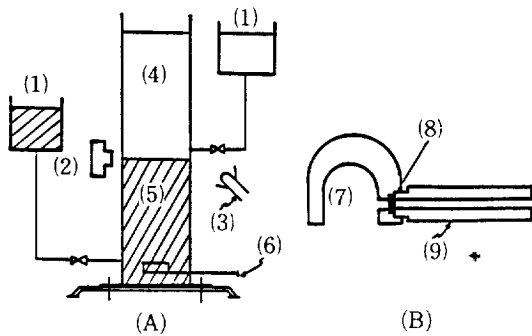


Fig. 2. (A) Schematic diagram of experimental apparatus. (B) Details of gas holder.

(1) tank (2) camera (3) stroboscope (4) clear phase (5) dyed phase (6) gas holder (7) gas cup (8) silicone rubber (9) copper tube

결과 잘 일치했다고 보고했다. 단지 $ReM^{0.2} > 12$ 범위에서부터 (17)식의 적용을 받는 것으로 나타난 것은 자신의 계가 dye로 오염되었기 때문으로 추정했다.

3. 실험

본 실험에서 사용한 장치는 Fig. 2와 같다. Column은 $12 \times 12 \times 120$ cm의 acryl제 정사각 기둥으로

중앙 측면에는 눈금이 표시되어 있다. 이 column은 Uno[19]의 연구에 의하면 본 실험 범위에서 벽의 영향을 무시할 수 있을 만큼 충분히 큰 것이다. Column의 하부에는 단일 기포를 발생시킬 수 있는 기포 컵을 설치하였다. 기포 컵의 구조는 Fig.2(B)와 같다. Column의 중앙 위치에 motor drive를 부착한 camera와 조명 장치를 설치하여 기포를 연속 촬영하였다. 아랫쪽 coke를 통하여 착색된 glycerine수용액을 유입시켜 60cm의 높이까지 채운 다음, 중앙의 coke를 통하여 glycerine용액과 비중이 같은 사염화탄소의 용액을 계면이 흔들리지 않게 주의하면서 높이가 약 50cm가 될 때까지 유입시켰다. 사염화탄소 용액의 유입이 끝난 후 다시 glycerine용액을 조금 유입시키면 두 액의 경계면이 명확하게 나타난다. 계면이 형성되면 micro-cylinge 로써 일정량의 공기를 기포 컵 내부로 주입시킨 후, 기포 컵을 반전시켜 기포를 상승시켰다. 기포가 계면을 지날때 기포와 계면을 연속 촬영하였다. 같은 실험을 여러 번 행하여 연속된 사진을 얻었다. 6종의 glycerine수용액을 만들고, 수용성 흑색 염료를 일정량 첨가하여 착색한 것을 하층액으로 하였다. 상층액은 유기물질에 사염화탄소를 혼합하여 하층액의 비중과 같게하여 사용하였다. 사용된 용액의

Table 1. The physical properties of the liquids used.

no.	density	upper phase	μ_w/μ_l	σ_w/σ_l	M no of lower phase
1	1.25	linseed oil + CCl_4	5.64/1330	46.0/65.5	87.30
2	1.20	"	9.73/39.5	47.6/61.0	8.76×10^{-5}
3	1.16	"	12.10/11.75	46.6/54.7	9.84×10^{-7}
4	1.10	"	19.70/ 4.29	47.9/54.1	1.91×10^{-8}
5	1.05	"	27.30/ 2.25	46.0/54.0	1.52×10^{-8}
6	1.00	"	38.50/ 1.16	49.1/53.1	1.19×10^{-10}
7	1.16	benzene + CCl_4	0.87/11.75	43.9/54.7	
8	1.16	n-hexane + CCl_4	1.36/11.75	39.0/54.7	
9	1.16	kerosine + CCl_4	1.11/11.75	41.5/54.7	
10	1.10	n-hexane + CCl_4	1.26/ 4.29	38.0/54.1	
11	1.10	kerosine + CCl_4	1.15/ 4.29	41.6/54.1	
12	1.05	linseed oil + CCl_4 + hexane	2.15/ 2.25	40.3/54.0	
13	1.00	kerosine + CCl_4	1.21/ 1.16	40.7/53.1	
14	1.00	n-hexane + CCl_4	1.13/ 1.16	37.9/53.1	
15	1.00	benzene + CCl_4	0.77/ 1.16	42.7/53.1	

Note : All the lower phases are glycerine aqueous solutions.

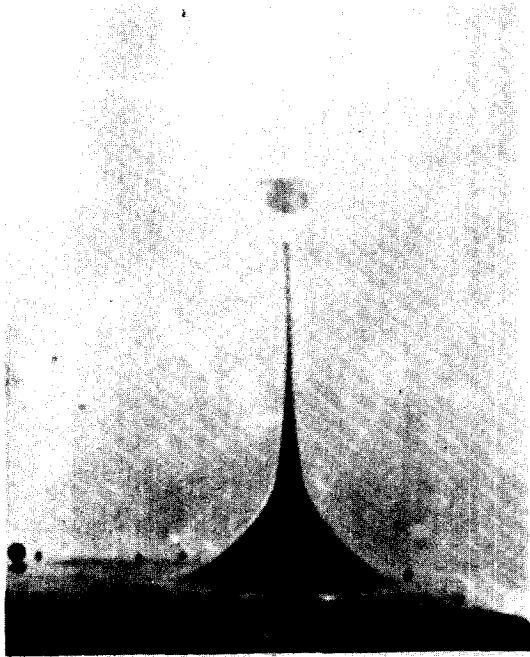


Fig. 3. Representative photo showing the drift and wake for the system of $\mu_u = 5.64$ c. p. and $\mu_l = 1330$ c. p.

물성치는 Table 1에 표시되어 있다. 이들 계들의 대부분은 상층액과 하층액이 비중만 같고, 점도나 표면장력에 있어서는 크게 차이가 있으나, 3, 12, 14번 계는 상층액과 하층액이 비중 뿐만이 아니고 점도까지도 같아서, 본 실험에서 중요한 의미를 갖는다.

4. 결과 및 고찰

4-1. Drift의 계산

여러 차례 연속 촬영된 사진들에서 부터 Fig. 3와 같이 drift와 wake의 구분이 분명한 것들을 발췌하여 column 측면의 눈금을 이용하여 실물 크기로 현상하였다. 사진에 나타난 기포로부터 상층액에서의 기포 장축을 실측하고, drift의 좌표 값들을 읽은 다음, 이 좌표 값들을 기포 장축으로 나누어 Darwin[1]이 얻은 것과 같은 형의 drift profile을 구하였다.

4-2. 상층액에서의 기포 장축을 기준으로 한 drift profile

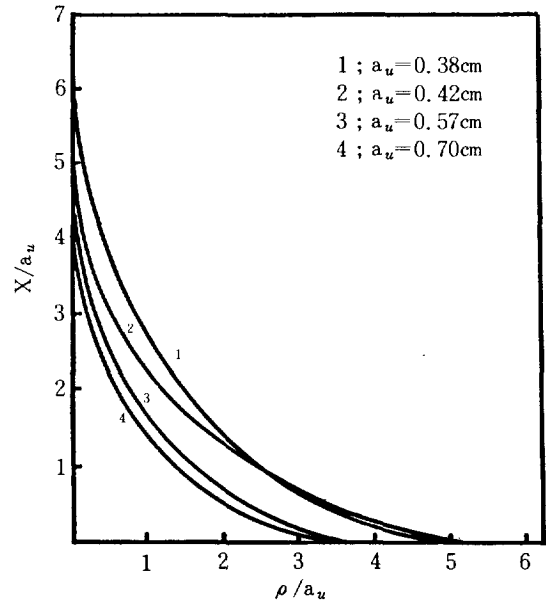


Fig. 4. Drift profiles based on the major axis of bubble in the upper phase for the system whose viscosity of the upper phase is 5.64 c. p. and that of lower phase is 1330 c. p.

상층액에서의 기포 장축을 기준으로 작성한 대표적인 drift profile을 Fig. 4, 5, 6에 나타내었다. Fig. 4를 보면 drift profile은 기포 장축에 따라 각기 다르게 나타나 있고, 이런 현상은 상층액과 하층액의 점도가 같은 계를 제외하고는 모든 계에서 나타났다. 이는 $X(\rho)/a_u$ 와 ρ/a_u 로 표시한 drift profile은 a_u 에 무관한 것으로 보고한 Darwin[1]이나 Toei[3]의 결론과는 아주 다른 것이다. 그러나 Fig. 5에서 보는 것처럼 상-하층액의 점도가 같은 계에서는 이 drift profile이 기포 장축의 영향을 받지 않고 일정한 것으로 나타났다. 동일한 하층액에 대한 상층액의 영향을 나타내는 Fig. 6을 보면 기포의 장축이 일정한 경우, 상층액이 바뀌어도 drift profile은 영향을 받지 않는 것을 알 수 있고, 이로써 drift profile은 하층액에서의 현상에 의해 지배된다는 추정을 할 수 있다. 이러한 추정에 따라 하층액에서의 기포 장축을 기준으로 한 drift profile을 재 작성하였다.

4-3. 하층액에서의 기포 장축을 기준으로 한 drift profile

하층액에서의 기포 장축은 하층액이 검게 착색된

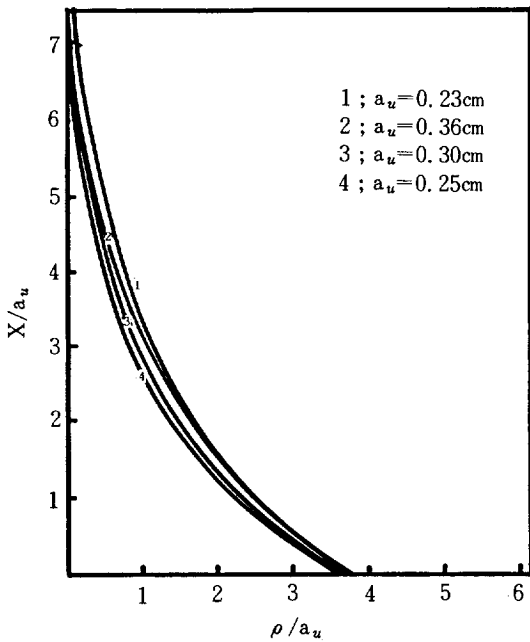


Fig. 5. Drift profiles based on the major axis of bubble in the upper phase for the system whose viscosity of the upper phase is nearly same as that of lower phase (Approximately 12c. p.).

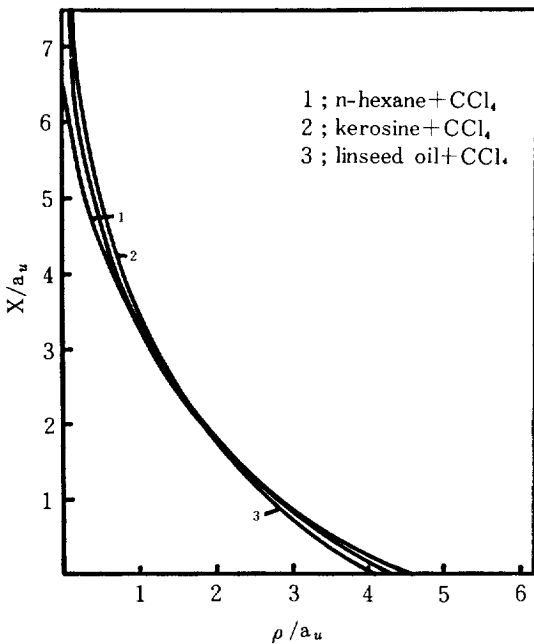


Fig. 6. Averaged drift profiles showing the effect of the upper phase for the system of $\mu_1 = 11.75\text{ c. p.}$

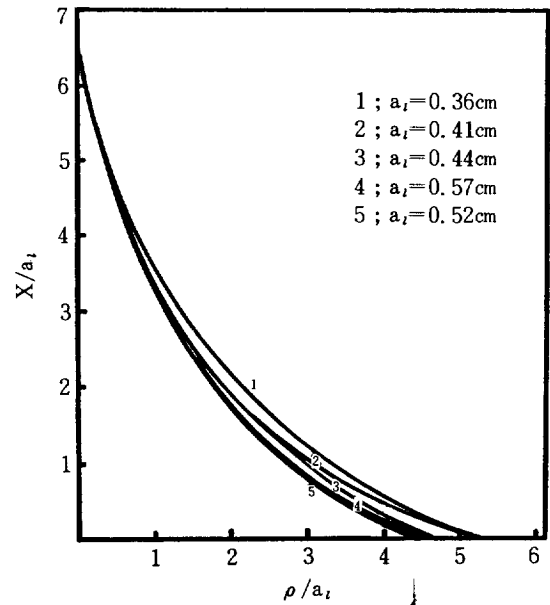


Fig. 7. Drift profiles based on the major axis of bubble in the lower phase for the system of $\mu_u = 5.64\text{ c. p.}$ and $\mu_l = 1330\text{ c. p.}$

상태이므로 실측이 불가능하나, Grace [16] 식과 Tadaki [18] 식을 이용하면 이론적으로 구할 수 있다. 특히 Grace의 식은 여러 연구자들의 결과를 종합한 것으로 매우 신뢰성이 있고, Tadaki의 식은 Takahashi [13]가 본 실험에서 사용한 것과 같은 착색된 glycerine 수용액에서 확인한 것이므로 믿을 수 있다고 생각된다. Grace의 식과 Tadaki의 식을 이용하여 구한 하층액 중에서의 기포 장축을 기준으로 drift profile을 재 작성하여 대표적인 것을 Fig. 7, 8, 9에 나타내었다. 하층액에서의 기포 장축을 기준으로 한 drift profile은 계의 성질에 따라 두 가지 분류로 나눌 수가 있었다. 하층액의 점도가 상층액의 점도와 같거나 큰 계들로 구성되는 첫 번째 군에서는 drift profile이 기포 장축의 변화에 영향을 받지 않았고(Fig. 7과 8), 나머지 계들로 구성되는 두 번째 군에서는 여전히 기포 장축에 따라 drift profile이 다르게 나타났다(Fig. 9). 이와 같은 현상은 하층액의 점도가 상층액의 점도보다 작은 계에서는 계면이 기포의 거동이나 동역학적 현상에 크게 영향을 미치기 때문이라 생각된다. 하층액의 점도가 상층액의 점도와 같거나 큰 계의 drift profile은 기포 장축의 영향을 받지 않는다는 점에

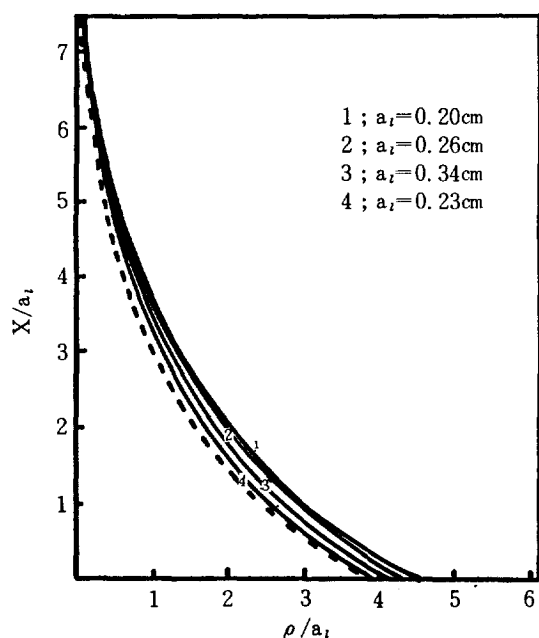


Fig. 8. Drift profiles based on the major axis of bubble in the lower phase for the system of $\mu_1 \cong \mu_2 \cong 12 \text{ c. p.}$. Dotted line shows averaged drift profile based on the major axis of bubble in the upper phase.

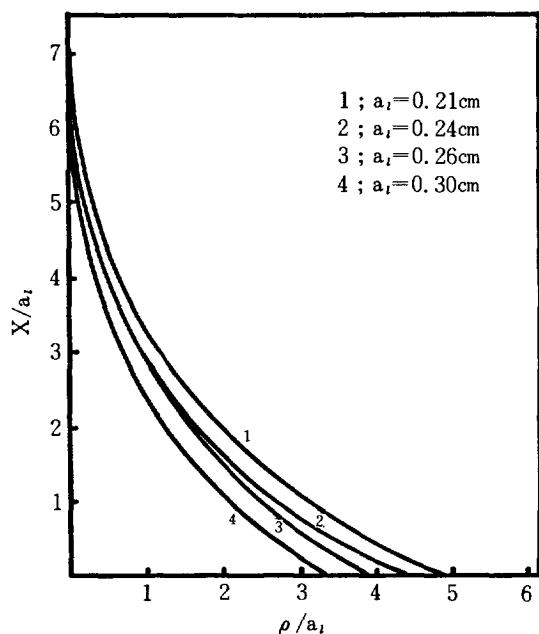


Fig. 9. Drift profiles based on the major axis of bubble in the lower phase for the system of $\mu_2 > \mu_1$. ($d=1.05$).

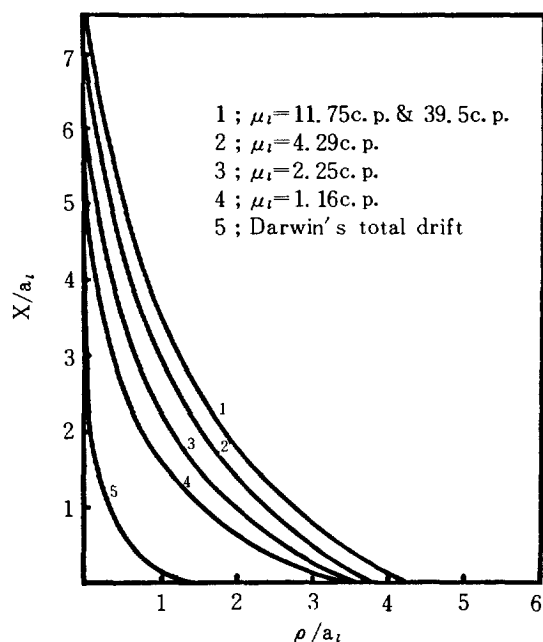


Fig. 10. Averaged drift profiles showing the effect of the viscosity of the lower phase.

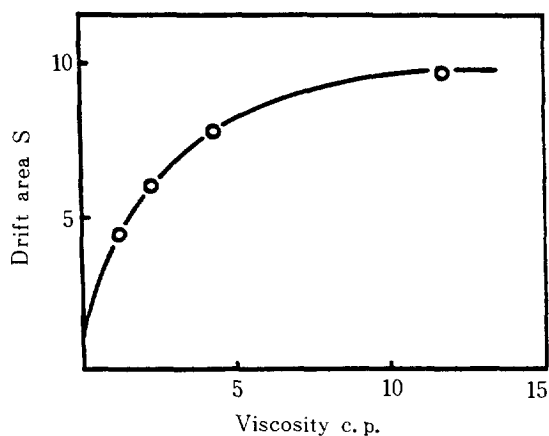


Fig. 11. Plot of drift area versus viscosity of the lower phase.

서는 Darwin(1)의 결과와 일치하나, 크기는 Darwin의 것보다 훨씬 크다. 이는 Darwin의 drift가 비압축성이고, 점성이 없는 이상 유체의 흐름인 irrotational flow에서 구해진 것이기 때문이다.

본 실험 data와 Darwin의 drift와의 일치성 여부를 조사하기 위해서, drift가 기포 장축의 영향을 받지 않는 각 계의 평균 drift를 구하고, 이를 하층

액 점도를 변수로 Fig. 10에 표시하였다. Fig. 10으로 부터 drift는 11.75c.p. 이상에서는 점도의 영향이 거의 없고, 그 이하에서는 점도가 감소하면 drift도 감소하여 Darwin의 drift에 가까워짐을 알 수 있다. 이 관계를 정량적으로 규명하기 위해서 digital planimeter로 각 계의 drift area를 구하여 Fig. 11에 표시하였다. 또 이들 data를 이용하여 최소자승법으로 구한 점도와 drift area와의 관계식은 다음과 같다.

$$\frac{1}{S-1.11} = 0.1 + 0.2\mu_i^{-1} + 0.05\mu_i^{-2} : \mu_i \leq 39.5 \text{ c.p.} \quad (20)$$

(20)식에서 점도를 영(zero)으로 외삽한 drift area 값은 1.11로써 Darwin의 total drift에서 digital planimeter로 구한 값 0.95와 실험오차 범위 내에서 잘 일치한다고 볼 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서 얻은 결론은 다음과 같다.

1. μ_u 을 기준으로 한 drift profile은 상-하층 액의 비중과 점도가 모두 같은 경우를 제외하고는 기포 장축에 따라 다르게 나타난다.

2. $\mu_i > \mu_u$ 인 경우, μ_i 을 기준으로 한 drift profile은 기포 장축이나 상층액의 물성치에 관계없이 일정하고, μ_i 의 감소에 따라 감소하여 Darwin의 total drift에 접근한다.

3. Drift가 기포 장축의 영향을 받지 않는 계의 drift area는 μ_i 와 다음과 같이 연관지어진다.

$$\frac{1}{S-1.11} = 0.1 + 0.2\mu_i^{-1} + 0.05\mu_i^{-2}$$

이 식에서 μ_i 를 영(zero)으로 외삽한 drift area의 값은 1.11로써 Darwin의 total drift에서 구한 drift area 0.95와 큰 차이가 없다.

NOMENCLATURE

a	: radius of sphere	[cm]
a _i	: half of major axis of bubble in the lower phase	[cm]
a _u	: half of major axis of bubble in the upper phase	[cm]

d	: density of the continuous phase	[g/cm ³]
d _e	: equivalent diameter of bubble	[cm]
Eo	: Eotvos number = $g \cdot \Delta d \cdot d_e^2 / \sigma$	[-]
g	: gravitational acceleration	[cm/sec ²]
H	: dimensionless group defined by eq. (11)	[-]
J	: dimensionless group defined by eq. (12)	[-]
M	: Morton number = $g \mu^4 / d \sigma^3$	[-]
Re	: Reynolds number = $d_e U d / \mu$	[-]
S	: drift area	[-]
t	: drift function	[sec]
U	: far upstream velocity	[cm/sec]
V	: velocity components	[cm/sec]
X	: Darwin's total drift distance = $\lim_{x \rightarrow \infty} (U t - x)$	[cm]
ψ	: Stokes' stream function	[cm ³ /sec]
σ	: surface tension	[dyne/cm]
μ	: viscosity of the continuous phase	[c.p.]
μ_w	: viscosity of water.	[c.p.]
ρ_o	: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\rho)$	[cm]
x, y, z	: components of rectangular coordinate	
x, ρ , λ	: components of cylindrical coordinate	
r , θ , λ	: components of spherical coordinate	

Subscripts

x, y, z	: components of rectangular coordinate
x, ρ , λ	: components of cylindrical coordinate
r , θ , λ	: components of spherical coordinate

REFERENCES

1. Darwin, C. G.: Proc. Camb. Phil. Soc., **49**, 342 (1953).
2. Lighthill, M. J.: J. of Fluid Mech., **1**, 31 (1956).
3. Toei, R., Matsuno, R. and Nagai, Y.: Kagaku Kogaku, **31**, 457 (1967).
4. Merzkirch, W.: "Flow visualization" Academic press, New York (1974).
5. Kojima, E., Akehata, T. and Shirai, T.: J. of chem. Eng. of Japan, **8**, 108 (1975).

6. Collins, R.: Chem. Eng. Sci., **20**, 851 (1965).
7. Coppus, J. H. C., Rietema, K. and Ottengraf, S. P. P.: Trans. Instn. Chem. Engrs., **55**, 122 (1977).
8. Crabtree, J. R. and Bridgwater, J.: Chem. Eng. Sci., **22**, 1517 (1967).
9. Taneda, S.: J. of the Physical Society of Japan, **11**, 1104 (1956).
10. Magarvey, R. H. and Bishop, R. L.: The Physics of Fluids, **4**, 800 (1961).
11. Hendrix, C. D., Dave, S. B. and Johnson, H. F.: AIChE J., **13**, 1072 (1967).
12. Yeheskel, J. and Kehat, E.: Chem. Eng. Sci., **26**, 1223 (1971).
13. Takahashi, T., Miyahara, T. and Izawa, H.: Kagaku Kogaku Ronbunshu, **2**, 480 (1976).
14. Chiba, S., Tamimoto, H. and Kobayashi, H.: J. of Chem. Eng. of Japan, **12**, 43 (1979).
15. Slattery, J. C.: "Momentum, energy and mass transfer in continua." McGraw-Hill, New York (1972).
16. Grace, J. R., Wairegi, T. and Nguyen, T. H.: Trans. Instn. Chem. Engrs., **54**, 167 (1976).
17. Johnson, A. I. and Braida, L.: Canada J. of Chem. Enf., **35**, 165 (1957).
18. Tadaki, T. and Maeda, S.: Kagaku kogaku, **25**, 254 (1961).
19. Uno, S. and Kintner, R. C.: AIChE J., **2**, 420 (1956).