

두 平行板內 移動流體의 凝固現象에 關한 研究

鄭光植 · 朴海植* · 李基俊

서울대학교 공과대학 화학공학과
(1985년 8월 9일 접수, 1985년 10월 18일 채택)

Transient Solidification of Flowing Fluids Between two Parallel Plates

Kwang Sik Jung, Hae Sik Park and Ki Jun Lee

Department of Chemical Engineering, College of Engineering,
Seoul National University, Seoul 151, Korea

(Received 9 August 1985; accepted 18 October 1985)

要 約

流體가 氷點溫度이하로 일정하게 유지되는 두 平行板사이를 흐를 때, 시간에 따른 凝固現象을 數値模寫와 實驗을 통하여 살펴보았다. 시간에 따른 얼음층의 성장이 쉽게 관찰되는 두 平行板을 설정함으로써 실제의 凝固形態를 관찰할 수 있었으며, Lagrangian interpolation式을 적용한 數値模寫實驗을 한 바, 기존의 원통관에서 實驗値와 理論解가 15~50% 정도의 오차를 보였던 것에 비하여 本 研究에서는 four-point interpolation을 적용한 경우 10% 정도의 오차를 보이는 결과를 얻었다. 流體의 凝固에 영향을 미치는 要因중에서 流入溫度나 流入流速에 比하여 壁面溫度가 보다 중요한 역할을 함이 분석되었다.

Abstract—The transient freezing of a liquid flowing between two parallel plates is investigated numerically and by visual experiment keeping the wall temperature constant under the freezing point of the fluid. The numerical solution is based on the Lagrangian interpolation equations at the moving boundary. The discrepancy of the numerical calculation from the experiment is of the order of 10% based on the four-point interpolation method. The wall temperature plays more significant role on fluid solidification than that of inlet fluid temperature and average inlet velocity.

1. 緒 論

相變化를 수반하는 凝固와 融解현상은 겨울철 수도관의 凍破現象을 비롯하여, 冷凍공정이나 製永 산업, 금속의 鑄造 및 고분자의 成型공정 등을 비롯

하여 여러 分野에서 흔히 접할 수 있다.

정지된 液體의 凝固現象에 관한 연구는 1891년 Stefan[1]에 의해 최초로 시도된 후 활발한 연구가 진행되어 왔으나[2~5], 흐르는 流體의 凝固現象에 관한 연구는 1968년 Zerkle과 Sunderland[6]에 의해 최초로 시도되었다. 이들은 Graetz Problem[7, 8]

*현주소: 호남석유화학

과 유사하나 관벽이 영점이하의 일정한 온도로 냉각되는 경우에 대하여 流体가 포물선형의 充分히 展開된 (fully-developed) 속도분포를 가지는 것으로 가정하였다. 이들은 정상상태에 대한 理論解를 구하였으며 이를 實驗결과와 비교하였다. 이들이 구한 理論解와 實驗値는 상당한 차이를 보이는데 이들은 이 오차를 理論解에서 自然対流 현상을 무시했기 때문이라고 추정하였다. 1969년 Özisik과 Mulligan[9]은 관 속을 흐르는 流体가 Plug型 속도분포를 갖는다는 가정하에 비정상상태의 理論解를 구하였는데 Zerkle과 Sunderland의 實驗値에 오히려 접근함을 보여주었다. 1970년 Bilenas와 Jiji[10]는 관속의 표면응고현상에 관한 近似解와 數値解를 구하였는데 移動境界의 해석에 three-point Lagrangian interpolation polynomial[5]을 도입하였다. 1976년 Hwang과 Sheu[11]는 관 입구 지역에서 流体가 냉각될 때 Langhaar 속도분포[12, 13]를 이용하여 展開中 (developing)인 流体의 凝固現象에 관한 理論解와 實驗値를 구하였다. 이들은 充展된 속도분포를 가정한 Zerkle과 Sunderland의 理論解가 實驗値와 큰 차이를 보였던 自然対流의 영향을 줄이기 위해 관의 직경을 축소한 결과 展開中인 流体의 凝固가 이미 充展된 속도분포를 가정한 결과와 큰 차이가 없음을 밝혔다. 이상과 같은 Newton性, 層流流体 뿐만 아니라 非 Newton性, 亂流流体의 凝固現象에 대해서도 理論解를 얻고자 많은 시도가 있었으나 제한된 경우에서만 解를 구하고 있다[14~16].

원통관에서의 기존의 실험이 熱傳達速度 등에 의하여 간접적으로 얼음층 두께를 얻어 냈는데 비하여 本研究에서는 두 平行板을 설정하여 시간에 따른 얼음층의 성장 및 형태를 관찰하고, 또한 移動境界에서 four-point Lagrangian interpolation을 도입하여 數値解를 구하여 實驗値와 비교하고자 한다.

2. 理論展開

2-1. 基本方程式

두 平行板 사이로 일정한 온도 T_0 인 流体가 充展된 (fully-developed) 속도분포로 流入될 때, 冷却部를 따라 벽면 온도가 流体의 영점보다 낮은 T_w 로 일정하게 유지된다면 流体는 冷却되어 벽면을 따라

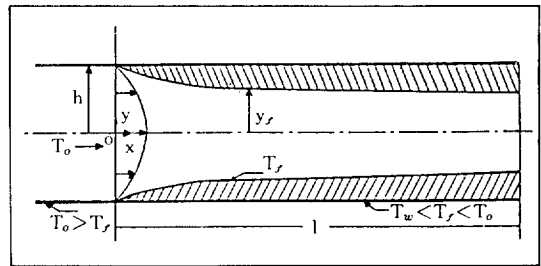


Fig. 1. The coordinate system for freezing of liquid inside parallel plates.

固体층이 생성된다 (Fig. 1).

流体의 凝固現象에 관한 모델을 설정함에 있어서 다음과 같은 가정을 도입하였다.

1. 流体는 Newton性이고 非壓縮性이며 순수한 물질이다.
2. 全領域에서의 흐름은 層流이며, 充分히 展開된 속도분포를 가지고 있다.
3. 物性値들은 固体와 液体相에서 각각 일정하다.
4. Viscous energy dissipation과 自然対流은 무시한다.
5. 重力에 의한 영향은 무시한다.

이상과 같은 가정하에서 二次元모델의 基本方程式과 境界 및 初期條件은 다음과 같다.

$$\text{연속방정식: } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$(\text{적분형}) \int_0^{y_f} u \, dy = hU \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{운동방정식: } \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \\ + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{에너지식: } \frac{\partial T_l}{\partial t} + u \frac{\partial T_l}{\partial x} + v \frac{\partial T_l}{\partial y} \\ = \alpha_l \left(\frac{\partial^2 T_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_l}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \alpha_s \left(\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{初期條件: } u &= \frac{3}{2} U_0 \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right], \\ v &= 0, T_i = T_0 \text{ at } t=0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{境界 " : } u &= \frac{3}{2} U_0 \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right], \\ v &= 0, T_i = T_0 \text{ at } x=0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ at } x=l \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, v=0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ at } y=0 \quad (10)$$

$$u=v=0, T_s = T_w \text{ at } y=h \quad (11)$$

$$\begin{aligned} k_s \frac{\partial T_s}{\partial y} - k_i \frac{\partial T_i}{\partial y} &= \rho \lambda \frac{\partial y_f}{\partial t} \\ \left[1 + \left(\frac{\partial y_f}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1} & \text{ at } y=y_f \end{aligned} \quad (12)$$

길이방향의 속도분포가 冷却部를 따라 속도분포를 유지한다는 가정을 하기에는 다음 두가지 조건이 감안되었다. 첫째, 流体가 冷却되더라도 일정한 폭을 유지하는 관 속을 흐른다면 벽면근처의 流体는 온도가 낮아질수록 粘度가 증가하므로 속도는 줄어드는 데 비하여 중심부근의 속도는 증가하려는 경향이 있다. 1962년 Yang[17]은 실험으로 이 사실을 밝혀내었으며, 이러한 경향이 Fig. 2의 Curve A에 나타나 있다. 둘째, 축소되는 관속을 흐르는 流体의 축방향 속도분포는 포물선형이 되기보다는 평평하게(flatter) 되려는 경향이 있다[18]. 이러한 현상이 Fig. 2의 curve B에 나타나 있다. 위와 같은 두 현상은 凝固가 일어나면서 流体가 흐를 때

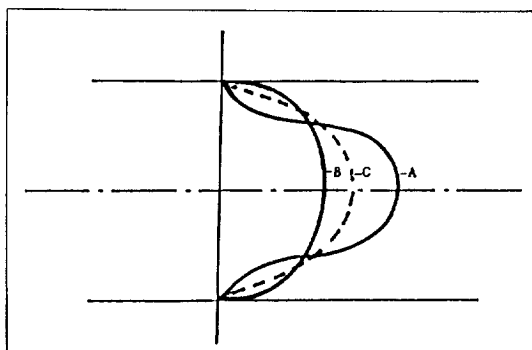


Fig. 2. X-directional velocity distributions between two plates.

는 모두 존재할 수 있으므로 여기서는 두 영향이 서로 상쇄될 것으로 가정하여 Fig. 2의 curve C와 같이 포물선형을 유지한다고 보았다.

연속방정식 (1, 2)와 경계조건 (8, 12)를 만족하는 길이방향 속도분포는 다음과 같다.

$$u = \frac{3}{2} U_0 (h/y_f) \left[1 - (y/y_f)^2 \right] \quad (13)$$

無次元變數 및 無次元數를 定義하여 각 式을 無次元化시키면 다음과 같다.

$$\tau = \frac{\alpha_s t}{h^2}, X = \frac{x}{h}, Y = \frac{y}{h}$$

$$\theta = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f}, \tilde{v} = \frac{v}{U_0}, Y^F = \frac{y_f}{h}$$

$$\alpha = \frac{\alpha_i}{\alpha_s}, K = \frac{k_i}{k_s}, \Lambda = \frac{\lambda}{C_{ps}(T_0 - T_s)}$$

$$P_e = \frac{U_0 h}{\mu_i} \quad (14)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (15)$$

$$U = \frac{3}{2} (1 - (Y/Y^F)^2) / Y^F \quad (16)$$

$$\frac{1}{\alpha P_e} \frac{\partial \theta^i}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta^i}{\partial x} + V \frac{\partial \theta^i}{\partial Y} = \frac{1}{P_e} \left(\frac{\partial^2 \theta^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta^i}{\partial Y^2} \right) \quad (17)$$

$$\frac{\partial \theta^s}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta^s}{\partial Y^2} \quad (18)$$

$$U = \frac{3}{2} (1 - Y^2), V=0, \theta^i = Y^F = 1 \text{ at } \tau=0 \quad (19)$$

$$U = \frac{3}{2} (1 - Y^2), V=0, \theta^i = Y^F = 1 \text{ at } X=0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial \theta^i}{\partial x} = 0 \text{ at } X=L \quad (21)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial \theta^i}{\partial Y} = 0, V=0 \text{ at } Y=0 \quad (22)$$

$$U=V=0, \theta^s = \theta_w \text{ at } Y=1 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta^s}{\partial Y} - K \frac{\partial \theta^i}{\partial Y} &= \Lambda \frac{\partial Y^F}{\partial \tau} \left[1 + \left(\frac{\partial Y^F}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1} \\ & \text{at } Y=Y^F \end{aligned} \quad (24)$$

2-2. 有限差分法

이상에서 유도한 式들의 數值解를 구하기 위해

고정된 Eulerian 격자점 및 流体와 함께 움직이는 Lagrangian 격자점으로 구성되어 있는 mixed Eulerian-Lagrangian 격자점 [19~20]을 이용하여 有限差分化 하면 다음과 같다.

$$U_u = \frac{3}{2} [1 - \{(j-1)\Delta Y/Y_i^F\}^2]/Y_i^F \quad (25)$$

$$V_u = U_u \cdot \frac{(j-1)\Delta Y}{Y_i^F} \cdot \frac{Y_{i+1}^F - Y_{i-1}^F}{2\Delta X} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \theta_u^i &= \theta_u^i - \alpha Pe \Delta \tau [U_u \cdot \frac{\theta_u^i - \theta_u^i}{\Delta X} + V_u \cdot \frac{\theta_{i,j+1}^i - \theta_{i,j-1}^i}{\Delta Y}] \\ &\quad + \alpha \Delta \tau [\cos^2 \phi_u (\frac{\theta_u^i - 2\theta_u^i + \theta_u^i}{\Delta X^2}) \\ &\quad + \frac{\theta_{i,j+1}^i - 2\theta_u^i + \theta_{i,j-1}^i}{\Delta Y^2}] \quad (27) \end{aligned}$$

여기서 導入한 Lagrangian Variable ϕ_u , θ_u^i , θ_u^i 는 다음과 같다.

$$\phi_u = \arctan \left[-\frac{(j-1)\Delta Y}{Y_i^F} \cdot \frac{Y_{i+1}^F - Y_{i-1}^F}{2\Delta X} \right] \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \theta_u^i &= \theta_{i-1,j}^i - \frac{\theta_{i-1,j+1}^i - \theta_{i-1,j-1}^i}{\Delta Y} \\ &\quad - \frac{(j-1)\Delta Y}{2Y_i^F} (Y_{i+1}^F - Y_{i-1}^F) \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_u^i &= \theta_{i+1,j}^i + \frac{\theta_{i+1,j}^i - \theta_{i+1,j-1}^i}{\Delta Y} \\ &\quad - \frac{(j-1)\Delta Y}{2Y_i^F} (Y_{i+1}^F - Y_{i-1}^F) \quad (30) \end{aligned}$$

2-3. Lagrangian interpolation 方程式

앞 절에서의 有限差分式들은 單一相만이 존재하는 領域(固体, 液体)에서 적용된다. 固-液境界面이 존재하는 node에서는 four-point Lagrangian interpolation을 이용하여 폭방향 温度勾配는 固-液境界面에서 계산하고 温度는 node의 中心에서 구하면 다음과 같다.

$$\theta_u^i = \theta_{i,j-1}^i \cdot \frac{3\delta_i}{1+\delta_i} - \theta_{i,j-2}^i \cdot \frac{3\delta_i}{2+\delta_i} + \theta_{i,j-3}^i \cdot \frac{\delta_i}{3+\delta_i} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_u^i}{\partial Y} \Big|_{Y^F} &= -\frac{\theta_{i,j-1}^i}{\Delta Y} \cdot \frac{(2+\delta_i)(3+\delta_i)}{2(1+\delta_i)} + \frac{\theta_{i,j-2}^i}{\Delta Y} \\ &\quad \cdot \frac{(1+\delta_i)(3+\delta_i)}{2+\delta_i} - \frac{\theta_{i,j-3}^i}{\Delta Y} \cdot \frac{(1+\delta_i)(2+\delta_i)}{2(3+\delta_i)} \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_u^s &= -\theta_{i,j-1}^s \cdot \frac{3\delta_i}{1-\delta_i} + \theta_{i,j+2}^s \cdot \frac{3\delta_i}{2-\delta_i} - \theta_{i,j+3}^s \cdot \frac{\delta_i}{3-\delta_i} \\ &\quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_u^s}{\partial Y} \Big|_{Y^F} &= \frac{\theta_{i,j+1}^s}{\Delta Y} \cdot \frac{(2-\delta_i)(3-\delta_i)}{2(1-\delta_i)} - \frac{\theta_{i,j+2}^s}{\Delta Y} \\ &\quad \cdot \frac{(1-\delta_i)(3-\delta_i)}{2-\delta_i} + \frac{\theta_{i,j+3}^s}{\Delta Y} \cdot \frac{(1-\delta_i)(2-\delta_i)}{2(3-\delta_i)} \quad (34) \end{aligned}$$

한편 4점을 취할 수 없는 境界面 근방에서는 벽면과 中心線의 境界條件과 함께 three-point 혹은 two-point式을 적용해야 한다.

위의 式들을 이용하면 固-液境界面의 이동(motion of interface)을 (24)식에 의하여 계산할 수 있다.

$$Y_i^F = \frac{1}{\mathcal{L}} \left(\frac{\partial \theta_u^s}{\partial Y} \Big|_{Y^F} - K \frac{\partial \theta_u^i}{\partial Y} \Big|_{Y^F} \right) \left[1 + \left(\frac{Y_{i+1}^F - Y_{i-1}^F}{2\Delta X} \right)^2 \right] \quad (35)$$

$$\tilde{Y}_i^F = Y_i^F + \Delta \tau \cdot \dot{Y}_i^F \quad (36)$$

$$\tilde{S}_i = 1 - \tilde{Y}_i^F \quad (37)$$

3. 数值模寫實驗

本 研究에서는 벽면온도 -1°C , -5°C , -10°C , -20°C 의 4가지 경우와 流入流体의 온도 1°C , 3°C , 5°C , 平均流入流速 1 cm/s , 5 cm/s 의 경우에서 각각 数值實驗을 행하였고, 냉각부의 aspect ratio (l/h)는 20으로 하였다. 시간증분 $\Delta \tau$ 의 한계는 Von-Neumann의 안정성조건 [21]으로부터 구할 수 있는 바

$$\Delta \tau \leq [2\alpha \text{Pr} (\frac{1}{\Delta Y^2} + \frac{\cos^2 \phi}{\Delta X^2}) + \alpha Pe \frac{U}{\Delta X}]^{-1} \quad (38)$$

$$\Delta \tau \leq [2(\frac{1}{\Delta X^2} + \frac{1}{\Delta Y^2})]^{-1} \quad (39)$$

를 만족하도록 시간증분 $\Delta \tau$ 의 범위를 조절하였다.

4. 實 驗

실험장치는 Fig. 3과 같이 유체순환장치, 온도조절장치, 냉매순환장치, 冷却部 그리고 온도측정장치로 이루어져 있다. 流体의 순환장치는 유체저장槽, 액체펌프, 流体의 展開部(developing section), 冷却部 그리고 밸브와 유량계로 이루어져 있다. 展開部の 길이는 1.5 m로 하였는데 이는 입구에서 流入된 유체가 흘러가면서 속도분포를 갖는데 충분한 길이이다. 冷却壁의 재질은 열전도도가 매우 좋은 순수한 구리판을 사용하였으며 옆면은 얼음층을

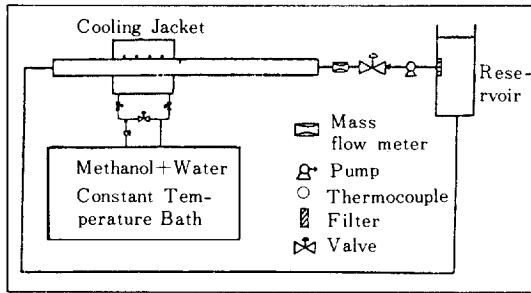


Fig. 3. Schematic of the experimental apparatus.

관찰하기 용이하게 투명한 plexiglass를 사용하였다. 流入流体 저장槽는 流入流体의 온도를 일정하게 유지하기에 유리하도록 용량을 충분히 크게 하였고, 순환유체는 冷固에 방해가 되는 불순입자를 함유하지 않도록 filter를 통해 여과하였다. 저온항온조에는 冷媒로 사용된 Methanol과 물의 혼합용액이 항상 일정한 온도로 조절되며, 冷媒는 冷却部の cooling jacket에 강제순환되어 外壁의 온도를 오차범위 $\pm 10\%$ 이내에서 일정하게 유지시킨다. 流体의 속도를 일정하게 유지시키기 위하여 valve와 Floating flowmeter를 설치하였다.

5. 結果 및 検討

시간에 따른 얼음층의 성장과정을 數値模寫實驗한 결과가 Fig. 4 이다. 얼음층은 초기에는 큰 溫度勾配에 의해 급히 성장하나 시간이 흐를수록 그 성장속도가 감소되며 対流에 의한 熱傳達에 의해 流体의 流入部보다 流出部の 얼음 성장속도가 빨라 얼음층이 冷却部를 따라 단조증가의 형태를 보인다. 정상상태에서의 數値解와 實驗値를 비교한 그림이

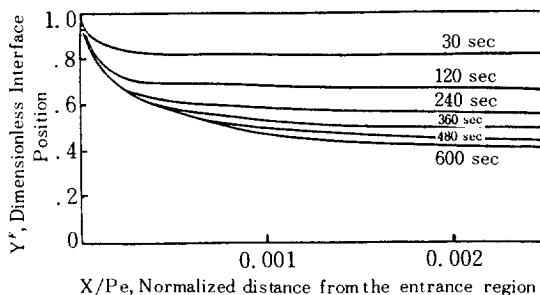


Fig. 4. Solidification history of water($T_w = -10^\circ\text{C}$, $T_o = 5^\circ\text{C}$, $U_o = 5\text{ cm/sec}$).

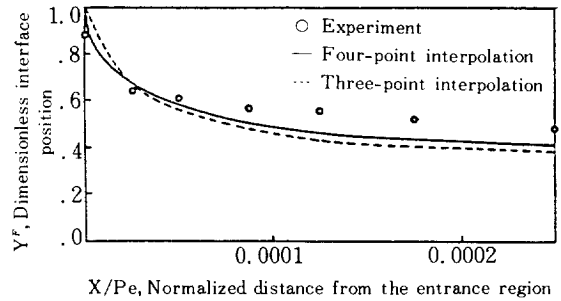


Fig. 5. Comparison of numerical solutions and experiment with steady state data($T_w = -10^\circ\text{C}$, $T_o = 5^\circ\text{C}$, $U_o = 5\text{ cm/sec}$).

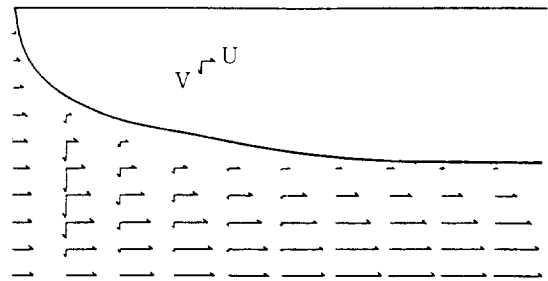


Fig. 6. Velocity profile at steady state($T_w = -10^\circ\text{C}$, $T_o = 5^\circ\text{C}$, $U_o = 5\text{ cm/sec}$).

Fig. 5 이다. 實驗値에서는 流入部に 얼음이 나타나게 되는데 이는 냉각부 앞쪽으로 열전달이 일어남을 보여준다. 반면에 뒷부분에서 數値解가 實驗値보다 두께가 큰 이유는 실제 實驗에서 발생하는 자연대류의 영향을 본 수치해에서 무시했기 때문이라고 추정된다[6]. 數値解에서 four-point interpolation을 이용한 경우가 three-point interpolation을 이용한 경우보다 전체적으로 實驗値에 가깝게 접근하는 것을 보여준다. Fig. 6 은 정상상태에서의 流体의 速

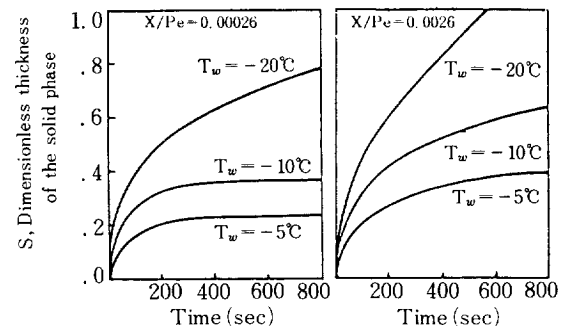


Fig. 7. Effect of the wall temperature on solidification($T_o = 5^\circ\text{C}$, $U_o = 5\text{ cm/sec}$).

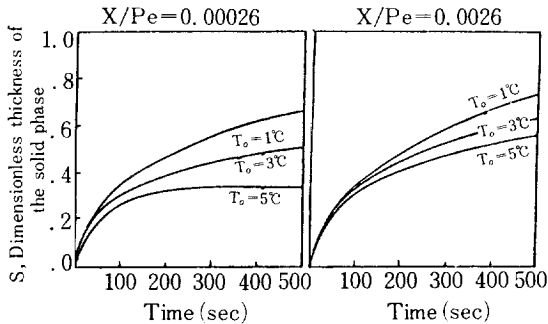


Fig. 8. Effect of the inlet liquid temperature on solidification ($T_w = -10^\circ\text{C}$, $U_o = 5 \text{ cm/sec}$).

度分布이다. 길이방향의 속도성분은 중심선 부근에서 얼음층의 성장으로 인하여 가속되나 固-液경계면 근방을 따라서減速된다. 폭방향의 속도성분은 얼음층의 기울기가 심한 입구부분에서는 크게 나타나나 얼음층이 길이 방향으로 크게 변하지 않는出口부분에서는 거의 나타나지 않는다. 凝固에 영향을 주는 因子들을 조사하기 위하여 벽면온도, 流入流體의 溫度 및 平均流入速度의 변화에 따른 冷却部의 入口와 出口부근에서의 시간에 따른 얼음층의 성장과정은 Fig. 7, 8, 9에 각각 나타나 있다. 그림에서 볼 수 있듯이 凝固에 가장 민감한 영향을 미치는 因子는 壁面溫度로서, 작은 변화에도 크게 영향을 미치는 것을 알 수 있다.

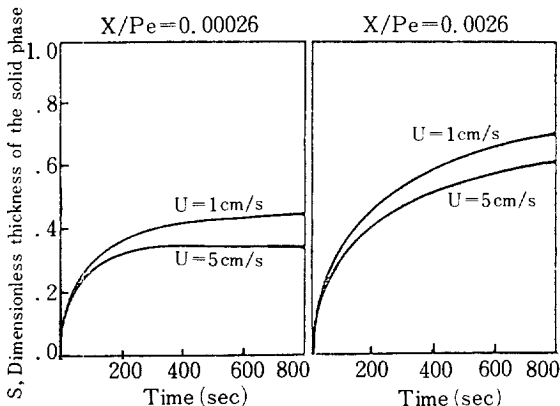


Fig. 9. Effect of the average inlet velocity on solidification ($T_w = -10^\circ\text{C}$, $T_o = 5^\circ\text{C}$).

6. 結 論

두 平行板內 流體의 凝固現象에 관한 數值模寫와

實測을 하여 본 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 凝固되는 固體의 모양은 冷却部를 따라 단조 증가하며, 시간에 따른 고체층의 생성속도는 감소하여 정상상태에 도달한다.

2. 移動境界 (moving boundary)에서 four-point Lagrangian interpolation式을 적용함으로써 정상상태에서의 實驗値와의 오차가 10% 以內로 개선된다.

3. 流體의 凝固에 가장 큰 영향을 주는 因子는 壁面溫度로서 작은 變化에도 凝固에 미치는 영향이 크다. 이로 미루어 보아 겨울철 동파를 방지하기 위해서는 급수온도를 올리거나, 급수속도를 빠르게 하기 보다는 수도관을 보온하는 것이 보다 효과적이다.

감 사

이 연구는 주식회사 유공의 연구비 지원을 받아 이루어졌으므로 이에 감사하는 바입니다.

NOMENCLATURE

- C : specific heat, joule/g $^\circ\text{C}$
- h : half thickness of two parallel plates, cm
- k : thermal conductivity, joule/cm $\cdot\text{sec}\cdot^\circ\text{C}$
- K : thermal conductivity ratio = k_i/k_s
- l : length of plate, cm
- P : Pressure
- Pe : Peclet number = $\text{Re} \cdot \text{Pr} = U_o h/\alpha_i$
- Pr : Prandtl number = $C_i \mu_i/k_i$
- Re : Reynolds number = $\rho_i U_o h/\mu_i$
- s : thickness of solid phase = $h - y_s$, cm
- S : dimensionless thickness of solid phase = s/h
- t : time, sec.
- T : temperature, $^\circ\text{C}$
- u : x - directional velocity, cm/sec
- U_o : mean inlet velocity, cm/sec.
- v : y - directional velocity, cm/sec.
- \underline{V} : dimensionless velocity vector = \underline{v}/U_o
- x : flow direction coordinate, cm
- X : dimensionless flow direction coordinate = x/h
- y : transverse coordinate, cm
- Y : dimensionless transverse coordinate = y/h

$y_f(x, t)$: interface position, cm
 $Y^F(X, \tau)$: dimensionless interface position
 $= y_f/h$

Greek Letters

α : thermal diffusivity, cm^2/sec .
thermal diffusivity ratio $= \alpha_i / \alpha_s$
 δ_i : dimensionless distance used in Lagrange interpolation
 θ : dimensionless temperature $= (T - T_f) / (T_o - T_f)$
 λ : latent heat, joule/g
 Λ : latent to sensible heat ratio $= \lambda / C_s(T_o - T_f)$
 μ : viscosity, $\text{g/cm} \cdot \text{sec}$.
 ν : kinematic viscosity, cm^2/sec .
 ρ : density, g/cm^3
 τ : dimensionless time $= \alpha_s t / h^2$
 ψ : angle between X-axis and Lagrangian surface

Subscripts

d : downstream condition
f : fusion front condition
i, j : indices
o : initial or inlet condition
u : upstream condition
w : wall condition
 Δ : increment

Superscripts

F : fusion front condition
. : time derivative $= \partial / \partial t$ or $\partial / \partial \tau$
 \sim : value at time $\tau + \Delta \tau$

REFERENCES

1. Stefan, J.: *Annalen der Physik und Chemie*, **42**, 269 (1891).
2. Perkeris, C.L. and Slichter, L.B.: *J. Applied Physics*, **10**, 135 (1939).
3. Dankwertz, P.V.: *Trans. Faraday Society*, **46**, 701 (1950).
4. Kreith, F. and Romie, F.E.: *Proc. Physics Society*, **68**, 277 (1955).
5. Murray, W.D. and Landis, F.: *Trans. ASME (C)*, **81**, 106 (1959).
6. Zerkle, R.D. and Sunderland, J.E.: ASME Paper No. 67-HT-40, Aug. (1967).
7. Graetz, L.: *Annalen der Physik und Chemie*, **25**, 337 (1885).
8. Sellars, J.R., Tribus, M. and Klein, J.S.: *Trans. ASME(C)*, **78**, 441 (1956).
9. Özisik, M.N. and Mulligan, J.C.: *J. Heat Transfer*, **91**, 385 (1969).
10. Bilenas, J.A. and Jiji, L.M.: *J. Franklin Institute*, **289**, 265 (1970).
11. Hwang, G.J. and Sheu, J.P.: *The Canadian J. Chem. Eng.*, **54**, 66 (1976).
12. Langaar, H.L. and Fayette, L.: *J. Applied Mechanics*, **A**, 55 (1942).
13. Hwang, G.J. and Sheu, J.P.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **17**, 372 (1974).
14. Shibani, A.A. and Özisik, M.N.: *J. Heat Transfer*, **99**, 20 (1977).
15. Özisik, M.N.: "Heat Conduction," John Wiley-Sons, New York (1980).
16. Wijngaarden, H.V., Dijkman, J.F., and Wesseling, P.: *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **11**, 175 (1982).
17. Yang, K.T.: *J. Heat Transfer*, **84**, 353 (1962).
18. Denn, M.M.: "Process Fluid Mechanics," Prentice-Hall Inc., New Jersey (1980).
19. Frank, R.M. and Lazarus, R.B.: "Methods in Computational Physics," Academic Press, Vol. 3 (1964).
20. Noh, W.F.: *ibid.*, p. 117.
21. Roache, P.J.: "Computational Fluid Dynamics," Hermosa, Albuquerque (1976).