

垂直移動하는 平板 위 薄膜流動의 近似解

金永晟* · 張虎男

*韓國動力資源研究所 廢資源研究室

韓國科學技術院 化學工學科

(1985년 11월 18일 접수, 1986년 4월 7일 채택)

Approximations of Thin Liquid Film Flows in Dip Coating

Young Sung Ghim* and Ho Nam Chang

*Energy Laboratory, Korea Institute of Energy and Resources

P. O. Box 339 Daejeon, Chungnam, Korea

Department of Chemical Engineering, Korea Advanced Institute of Science
and Technology, P. O. Box 131 Dongdaemun, Seoul, Korea

(Received 18 November 1985; accepted 7 April 1986)

要 約

流動현상 自体보다는 液膜의 전체 모양에 보다 관심이 있을 때 시도되는 일반적 방법은, 支配 방정식의 변환 및 결합에 의하여 액막형태 방정식, y 방향 운동량 적분방정식, x 방향 운동량 적분방정식의 利用 等으로 나뉘어 진다. 이들은 보통 薄膜假定과 함께 액막을 가로질러 二次의 속도분포를 가정하게 되는데, 近似의 과정을 통하여 각 방정식들은 液膜의 自由表面 부근과 固体表面 부근이 강조되거나, 두 표면사이의 流動情報가 평균적으로 수용되는 등 특성이 나타나고 있다. 近來 積分法이라는 명칭아래 많이 쓰이는 것은 이들 中 세번째의 x 방향 운동량 적분방정식이다. 그러나 dip coating 공정의 模寫過程을 면밀히 검토한 결과, 積分法은 表面張力이 크고 平板의 이동속도가 느려 액막이 충분히 얇을 경우에만 안전하게 적용될 수 있었다. 기존의 Ca 수나 Re 수 대신 M , U_0 系로써 模寫결과를 해석하였으며, 最終 액막두께와 導入길이, 액막의 발달에 관한 보다 명확한 경향이 관찰되었다.

Abstract—When the meniscus is shape important and the velocity distribution itself is not required in high accuracy, the basic equations have been transformed and combined to yield a meniscus shape equation, an integral- y -momentum equation and an integral- x -momentum equation. Although their original forms were exact as they were, thin film assumption with a parabolic velocity profile across the film rendered the working equation to emphasize the flow characteristics near the free surface or on the solid surface, or to accommodate these two flow patterns. Most frequently used in recent times is the integral- x -momentum equation designated by the integral method in the literature. But a critical examination of simulated results for the dip coating process revealed that the integral method could be applied safely to the limited case of employing the liquid of large surface tension and small withdrawal speed. Simulation was carried out in terms of M and U_0 instead of the capillary and Reynolds numbers, and distinct tendencies of the final film thickness, the entrance length and the dynamic meniscus profile could be observed.

1. 緒 論

Dip coating은 Fig. 1에서 보는 바와 같이 無限平板을 重力의 반대방향으로 움직이며 大量流体(bulk liquid)로부터 고체표면위에 연속적으로 液膜을 형성시키는 공정이다. 液膜이 무한히 뻗어간다고 가정할 때 궁극적으로 도달되는 液膜의 두께와 液膜이 발달되는 中の 自由表面의 모양 등이 주요 변수로써, 慣性力, 粘性力, 重力과 함께 表面張力の 균형에 의하여 그 값들이 결정된다. Landau & Levich[1] 이래 White & Tallmadge[2], Spiers等[3], Esmail & Hummel[4]들이 최종액막의 두께에 중점을 두고 그들의 理論을 전개하고자 하였으나, 近似의 과정이 일정하지 못하다는 등의 문제점들이 지적되고 있다.

Dip coating은 그 自体가 종이, 필름, 접착제 공업에 많이 이용될 뿐 아니라, 重力으로 인한 流動의 不均一性이 극대화됨으로써 slot coating이나 roll coating 등 類似한 coating 공정에서 부딪히는 難点들이 압축되어 있다. 액막형태의 流出이나 액체의

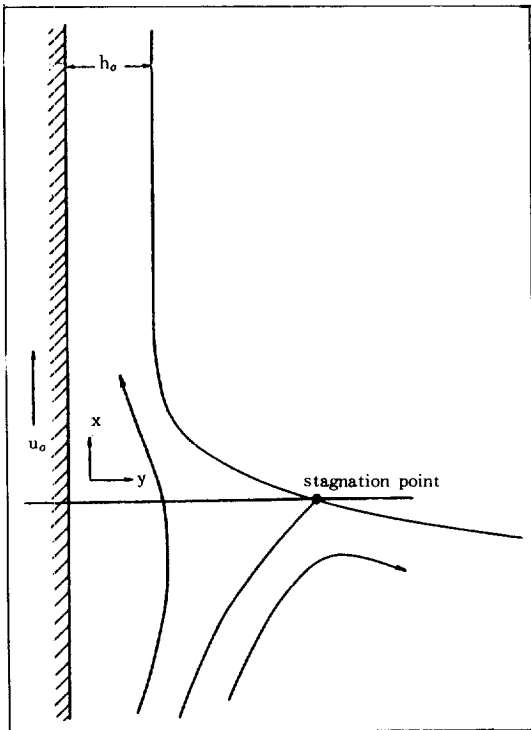


Fig. 1. Dip coating.

제거문제도 이들과 밀접한 관계에 있으며[5], 垂直 회전원반위 액막형성 등 액막이 떨어올라갈 때의 流動해석에 근간이 되기도 한다[6].

최근 Higgins等[7, 8]은 液膜의 개괄적 형태를 알기 위하여, 많이 쓰이는 近似解의 방법을 크게 세 가지 유형으로 나누어 정리한 바 있으며, Cerro & Scriven[9]은 慣性力이 크고 表面張力이 작은 경우의 流動현상을 그중 한 방법인 積分法에 의하여 해석하고자 하였다. 본 論文에서는 먼저 Higgins等이 제시한 近似解의 유형이 실제문제에 적용되는 과정에서 보이게 될 物理的 意味를 살펴보고, 현재 가장 많이 사용되는 적분법에 의하여 dip coating의 액막형태를 系의 物理的 特性和 연결시켜 해석함으로써 近似解가 지니게 될 제한점을 검토하고자 한다.

2. 基本 방정식

Fig. 1과 같이 무한한 길이의 平板이 大量액체의 표면을 가로질러 움직인다고 가정하면, 平板 위에 형성되는 액막유동의 지배 방정식은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho g \quad (2)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (3)$$

고체표면에서는 유체의 미끄러짐이 일어나지 않는다면,

$$u = u_0, \quad v = 0 \quad \text{at } y = 0 \quad (4)$$

액막의 自由表面은 表面波가 발생하지 않고 평탄하게 변하여 간다고 보아 정상상태의 경계조건을 취하면, 流動조건(kinematic condition)은

$$q = \int_0^h u \, dy = \text{constant} \quad (5)$$

應力조건(stress condition)은 表面($y=h$)에서 垂直, 水平방향으로 각기[10],

$$p - \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \mu h' \frac{\partial v}{\partial x} + x_s \sigma = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + 2h' \frac{\partial v}{\partial y} - h'^2 \frac{\partial v}{\partial x} + h'u = 0 \quad (7)$$

液膜이 진행되는 x 방향으로, 大量流体로부터 무한히 멀리갈 때 궁극적으로는 액막의 두께가 일정하여지는 부분이 나타난다고 생각하여,

$$h \rightarrow h_0, \quad h' \rightarrow 0, \quad h'' \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow \infty \quad (8)$$

이때의 속도분포는 다음과 같이 주어진다.

$$u = u_0 + \frac{\rho g}{\mu} h_0^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h_0} \right)^2 - \frac{y}{h_0} \right\} \quad (9)$$

液膜이 형성되는 아랫부분에서는, 大量液体의 均一相에서 平板이 움직일 때 유도되는 流動의 크기가 液膜 상태보다는 훨씬 크리라 생각하여 Fig. 1과 같은 두개의 흐름을 가정하였다. Groenvelt[11]는 두 흐름이 갈라지는 액체의 表面에 停滯點이 생기게 됨을 제안하였는데, 이를 x 방향의 출발점으로 잡으면,

$$u=v=0 \quad \text{at } x=0, \quad y=h \quad (10)$$

(10)의 조건을 (2), (3) 및 수직응력조건 (6)에 代入하여 積分하면,

$$2 = \frac{\sigma}{\rho g} x_s^2 + 2h' (1+h'^2)^{-1/2} \quad (11)$$

이때 積分常数 2는, 停滯點 아래의 먼 下流를 무한한 크기의 靜止液膜(static meniscus)으로 취급하여 얻은 값으로, (11)式은 정제점을 中心으로 大量액체를 향하는 유체의 움직임은 고체표면에 딸려올라가는 움직임보다 충분히 느리다고 본 결과이다[12].

3. 液膜流動의 近似 방정식

보통의 流体力学 문제에서는 (1)-(3)式을 변형하여 流動함수(stream function)와 回轉度(vorticity)로써 解를 얻고자 노력하는데 반하여, 応力조건(6)과 같이 경계조건에 壓力항이 포함되는 自由表面 문제에서는 (u, v, p)-系에서 직접 解를 구하는 것이 낫다고 알려져 있다[13]. 그러나 이러한 경우라도 壓力에 대한 타원형 방정식(elliptic equation)이 추가되어야 할 뿐 아니라, 그에 따른 경계조건도 Dirichlet

Table 1. Schematic representation of deriving three types of approximate equations.

identification number	type of equation	coupling strategy of two momentum equations*
1	meniscus shape equation	$(XM)_{y=h} + h' (YM)_{y=h}$
2	integral-y-momentum equation	$\frac{d}{dx} \int_0^h (YM) dy + (XM)_{y=0}$
3	integral-x-momentum equation	$\int_0^h (XM) dy + \int_y^h (YM) dy$

*XM and YM signify the x-momentum and y-momentum equations respectively.

chlet型보다는 Neumann型으로 주어지는 등 간편하게 해를 구하기에는 매우 부적합한 실정이다. 따라서 수직응력조건 (6)과 運動量 방정식 (2), (3)에서 壓力항을 소거하는 방법을 모색하게 되었고, Higgins等[7, 8]은 기존에 발표된 내용들을 세가지 代表的 類型으로 나누어 정리하였다(Table 1).

個個의 방정식을 살펴보면,

1. 垂直応力조건 (6)은 自由表面 s를 따라서는 언제나 成立되므로 이의 s방향의 微分 역시 항등식이 되는데, 만일 (6)式을 $F=0$ 형태로 표시하면,

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 0 = a^{-1/2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + h' \frac{\partial F}{\partial y} \right) \quad \text{along } s \quad (12)$$

여기서 a는 表面의 metric tensor의 determinant로써 二次元 定常狀態의 경우, $1+h'^2$ 으로 나타내어진다[10]. (6)式과 (12)式을 이용하여 (2), (3) 式의 壓力항을 소거하면,

$$\begin{aligned} \sigma \frac{dx_s}{dx} &= \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho h' \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &\quad - 2\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h' \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \mu h'^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &\quad - \mu h'' \frac{\partial v}{\partial x} - \rho (g_x + g_y h') \quad \text{at } y=h \quad (13) \end{aligned}$$

(13)式은 自由表面에서 성립되는 '液膜形態 방정식'의 定常상태型이 된다.

2. Table 1과 같이 定常상태에서의 'y방향 運動量 적분방정식'을 구하면,

$$\begin{aligned} \sigma \frac{dx_s}{dx} &= \frac{d^2}{dx^2} \int_0^h (\rho uv - \mu \frac{\partial v}{\partial x}) dy - \left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} \\ &\quad - \rho (g_x + g_y h') \quad (14) \end{aligned}$$

3. 定常상태에서의 'x 방향 運動量 積分방정식' 은,

$$\begin{aligned} \sigma h \frac{dx_s}{dx} = & \frac{d}{dx} \int_0^h (\rho u^2 - \rho v^2 - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}) dy \\ & + \frac{d^2}{dx^2} \int_0^h \int_y^h (\rho uv - \mu \frac{\partial v}{\partial x}) dy dy \\ & + \mu h''(u)_{y=h} + \mu (\frac{\partial u}{\partial y})_{y=0} - \rho h(g_x + g_y h') \end{aligned} \quad (15)$$

(13)-(15)式들은 Higgins等[7]이 Table II에 제시하였던 式들과 비교하여 훨씬 간편하여진 것을 알 수 있는데, 이는 Ghim & Chang[10]에 의하여 定常상태에서 유도된 보다 간결한 형태의 應力조건을 이용한 때문이다.

(13)-(15)式에는 連續 방정식에 의하여 연결되는 u, v 이외에도 未知변수 h 가 포함되어 있어 별도의 방정식이 필요하며, 積分형태의 流動조건인 (5)式이나 이의 微分형태가 이용되곤 한다. 여기에 적절한 속도분포만 주어진다면 1, 2, 3의 近似 방정식들은 최소한의 완전한 쌍을 이루게 되는데, 여기서 '최소한'이란 말은 속도분포에 오직 하나의 未知數만이 허용되기 때문에 붙여진 것이다. 만일 하나 이상의 未知數가 포함된다면 그에 상응하는 방정식이 추가되어야 할 것이며, 이로써는 Finlayson[14]이 제안한 여러 加重誤差法(weighted residual method)等, 보다 정확한 속도분포에 의하여 解를 구하는 방법들을 생각할 수 있다.

4. 薄膜 假定 및 변수의 결정

보통의 液膜流動에서는 액막의 두께가 얇으므로, 액막이 진행되는 x 방향으로의 流動의 변화보다는 액막을 가로지르는 y 방향의 流動변화가 훨씬 급격하게 된다. 만일 x 방향의 特性길이에 대하여 y 방향의 特性길이를 ϵ 이라하면 $\epsilon^2 \ll 1$ 이라는 '薄膜 가정(thin film assumption)'이 가능한데, 이에 의하여 (13)-(15)式을 정리하면,

$$1. \quad \sigma h''' = \rho u \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \quad \text{at } y=h \quad (16)$$

$$2. \quad \sigma h''' = -\mu (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})_{y=0} + \rho g \quad (17)$$

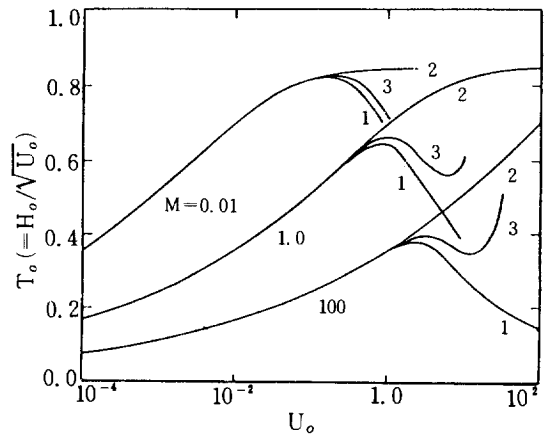


Fig. 2. Dependence of normalized film thickness on dimensionless withdrawal speed in terms of the physical property group.

The figure attached to each curve indicates the equation used for calculation.

$$3. \quad \sigma h h''' = \frac{d}{dx} \int_0^h \rho u^2 dy + \mu (\frac{\partial u}{\partial y})_{y=0} + \rho g h \quad (18)$$

Fig. 2는 y 방향으로 二次의 속도분포를 가정하여 (16)-(17)式으로부터 얻은 결과를 나타낸 것이다. 無次元 변수 M, U_0 의 項으로 無次元의 최종 액막 두께 H_0 의 변화를 살펴본 것인데, 數值解를 구하기 위한 중간과정은 다음에 이어질 6節에 詳述하였다. 기존의 capillary 數나 Reynolds 數에 비하여 M, U_0 系의 장점은 dip coating을 특징지어 주는 두 변수인 表面張力과 平板의 속도를 분리할 수 있다는 것으로,

$$M = \frac{\sigma}{\mu} (g\nu)^{-1/3}, \quad U_0 = u_0 (g\nu)^{-1/3}, \quad H_0 = h_0 (\frac{g}{\nu})^{1/3} \quad (19)$$

M 은 Fulford[15]이래 Tallmadge & Soroka[16], Esmail & Hummel[4]等에 의하여 '物性群(physical property group)'이라 지칭되어 왔으며, 지금까지 알려진 shear 數나 capillarity-buoyancy 數와는 근본적으로 동일하다[17]. U_0 와 H_0 는 液膜이 형성되는 주요 힘이 重力과 粘性力임을 나타내고 있는데, 특히 H_0 는 Nusselt이 액막형태의 흐름을 해석하기 위하여 도입하였던 바가 있어[18], 'Nusselt의 液膜두께 변수(film thickness parameter)'로 알려져 있다.

流動조건 (5)의 流量은 一定 液膜부분의 속도분포인 (9)式으로부터 얻을 수 있는데, 이를 無次元化하여 표시하면,

$$Q = H_0 \left(U_0 - \frac{H_0^2}{3} \right) \quad (20)$$

平板의 속도 U_0 가 주어졌을 때 가능한 최대의 H_0 는 Q 가 최대가 되는 $\sqrt{U_0}$ 이므로, 따라서 Fig. 2의 縱軸 T_0 는 正規化한 液膜두께 (normalized film thickness)가 된다.

5. 近似 방정식의 物理的 意味

(13)-(15)式들은 모두 완전한 형태이므로 원래 유도된 모양 그대로 동일한 만큼의 의미를 지니고 있다고 볼 수 있다. 그러나 dip coating이라는 구체적인 문제에 대하여 薄膜 가정을 적용하는 과정에서 각 식들은 상당히 다른 特性을 나타내게 된다. 그 특성들은 Table 1의 圖式的 유도과정에서도 짐작할 수 있겠으나 (16)-(18)式을 보면 더욱 명확하여짐을 알 수 있다. 液膜형태 방정식은 自由表面 부분의 運動量 收支를, y 방향 運動量 積分 방정식은 고체 표면 부분을, x 방향 運動量 積分 방정식은 自由表面에서 固体표면까지를 평균적으로 취급하고 있다.

(19)式의 液膜두께의 特性길이에서도 강조되는 바와 같이, Fig. 1의 dip coating 공정에서 重力의 영향을 거슬러 고체표면 위에 액막을 형성시키는 주요 원인은 액체의 粘性力이다. 그러나 自由表面 쪽으로 갈수록 초기에 정지하여 있던 그대로의 慣性力은 증가하게 되고, 流体의 흐름은 大量流体를 향하게 된다. 즉, 粘性力이 액막의 두께를 키우는 쪽이라면 관성력은 重力, 表面張力과 함께 이를 억제하는 역할을 하게 된다.

Fig. 2의 액막형태 방정식 1은 U_0 가 작은 범위에서는 점성력이 지배적이므로 U_0 가 증가함에 따라 액막의 두께가 증가하나, 차츰 그 영향은 둔화되고 결국 관성력이 강하게 되어 正規化한 액막두께 T_0 는 감소하는 경향을 나타내고 있다. 이는 粘性力만이 존재하는 2의 y 방향 운동량 적분방정식의 액막이 계속 증가하는 것과는 좋은 대조를 보이고 있다. 1의 액막형태 방정식에 포함된 慣性力の 효과는 表面張力이 작아 액막이 두꺼워지는 작은 M 값에서

더욱 현저하여 일찍부터 그 영향이 드러나고 있다. 反面, 표면장력이 큰 경우는 U_0 가 상당히 증가할 때까지도 액막이 그리 커지지 않고 粘性力이 계속 지배적이어서 1-3 식들은 거의 동일한 결과를 보여주고 있다.

1, 2의 두 식들이 각기 지시하는 위치가 분명한 만큼 그 결과도 뚜렷하나, 3의 x 방향 운동량 적분방정식은 1, 2式을 혼합한 정도의 경향을 나타내고 있다. 특이한 사실은 曲線의 마지막 부분에 드러나는 粘性力の 효과인데, 이는 U_0 가 증가함에 따라 차츰 반대방향으로 벌어지는 고체표면과 자유표면 부분의 변화를 二次式的 속도분포를 가정한 채 평균적으로 취급하는 과정에서 나타난 異常변화로 보는 것이 타당할 듯하다.

6. x 방향 運動量 積分 방정식에 의한 數值解析

波動에 대한 액막流動의 安定성과 같이 自由表面의 움직임이 중요할 때는 液膜形態 방정식이 (19), 모양이 간편하다는 면에서는 Higgins 등 [7]이 지적한 바와 같이 y 방향 운동량 積分방정식이 유리한 등, 1-3의 세 近似 방정식은 각기 나름대로의 장점을 지니고 있다. Higgins 등 [7, 8]은 dip coating 문제에 대하여, Landau & Levich [1] 이래 Lee & Tallmadge [20]까지 발표된 대부분의 論文을 액막형태 방정식을 이용한 것으로 분류하고 있으나, (16)-(18)式이나 Fig. 2에서 나타난 대로 薄膜가정을 적용한 상태에서 慣性力을 무시한다면 세 近似式의 구분은 번거로운 작업이 될 뿐이다. 보다 의미있는 것은, 慣性力을 포함시킨 채 x 방향 운동량 적분방정식을 사용하였음을 명시한 근래의 Esmail & Hummel [4]이나 Cerro & Scriven [9], dip coating 문제는 아니나 Ruschak [12]의 연구들이며, 이들은 積分法 (integral method)이라는 명칭아래 Galerkin 法等과 연관시켜 近似式 3의 근거를 마련하고 있기도 하다.

本 研究에서도 x 방향 운동량 적분방정식을 사용하고자 하는데, 고체표면에서 自由表面까지의 流動 정보를 평균적으로 취급하고 있어 가장 안전하다는 意味에서, 다른 하나는 이같은 장점때문에 널리 사용되기 시작하는 積分法의 타당한 이용범위를 조사

하기 위하여서이다. (18)式에서는 다른 近似式과의 비교를 위하여 粘性力項 中에서 가장 큰 것만을 취하였으나 Esmail & Hummel[4]이 제안한 바와 같이 x 방향으로 보다 유연한 流動의 발달을 위하여 다음 項까지를 남겨 놓으면, (15)式과 (19)式으로부터 無次元化한 実行 방정식(working equation)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$MH'''' = \frac{d}{dX} \int_0^H (U^2 - 2 \frac{\partial U}{\partial X}) dY + H''(U)_{Y=H} + (\frac{\partial U}{\partial Y})_{Y=0} - H \quad (21)$$

Y 방향의 경계조건은,

$$U = U_0 \quad \text{at } Y = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = 0 \quad \text{at } Y = H \quad (23)$$

X 방향의 경계조건은,

$$H \rightarrow H_0, H' \rightarrow 0, H'' \rightarrow 0 \quad \text{as } X \rightarrow \infty \quad (24)$$

$$U = V = 0 \quad \text{at } X = 0, Y = H \quad (25)$$

$$2 = MH''^2 + 2H' \quad \text{at } X = 0 \quad (26)$$

流動 조건은,

$$Q = \int_0^H U dY \quad (27)$$

이때 流量 Q 는 (20)式에 주어진 바와 같다.

경계조건 (22)와 (23)을 고려하여 U 의 試圖 함수(trial function)를 Y 에 대한 二次式으로 가정하면,

$$U = U_0 + 3\phi \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{H} \right)^2 - \frac{Y}{H} \right\} \quad (28)$$

(28)式을 (21)式에 대입한 후 (27)式에 의하여 未知 변수 $\phi(X)$ 를 소거하면,

$$MH^3 H'''' = \frac{H'}{5} (U_0^2 H^2 - 6Q^2) + 3Q \left(\frac{3}{2} HH'' - H'^2 + 1 \right) + 3U_0 H \left(\frac{HH''}{2} + 1 \right) - H^3 \quad (29)$$

경계조건은 (24)~(26)으로 주어지며, 따라서 (29)式은 自由表面 停滯点부터 일정액막 부분까지 이어지는 非線形 境界值 문제가 된다. 그러나 Fig. 1에서 보

는 바와 같이 $X=0$ 의 停滯点 부근에서는 액막의 두께변화가 심하므로, 기울기가 작은 一定液膜 부분부터 逆으로 적분하는 것이 유리하게 된다. (24)式의 조건 자체는 支配 방정식의 平凡解(trivial solution)이므로,

$$H = H_0, H' = 0, H'' = \epsilon \quad (30)$$

과 같이 微小한 변동을 줌으로써 數值積分을 행하였다. 이때 $\epsilon = 10^{-6}$ 으로 하였으며, 액막이 유연하게 진행될 수 있도록 二次 微分項에 변동을 주었다.

停滯点的 위치는 속도가 0이 되는 지점을 잡아 (26)의 관계식이 만족되도록 H_0 를 정하였다. 겨냥법(shooting method)은 quasi-Newton 방법의 하나인 BFGS法에 의하였는데 [21], Newton-Raphson과 같은 補助 방정식이 필요없음에도 본 문제에서는 수렴속도도 빠를 뿐 아니라 수렴범위도 넓었다.

7. Dip Coating 工程의 模寫

Fig. 3는 문헌에 발표된 실험치와 6節의 x 방향 운동량 적분방정식에 의하여 模寫한 결과를 비교한

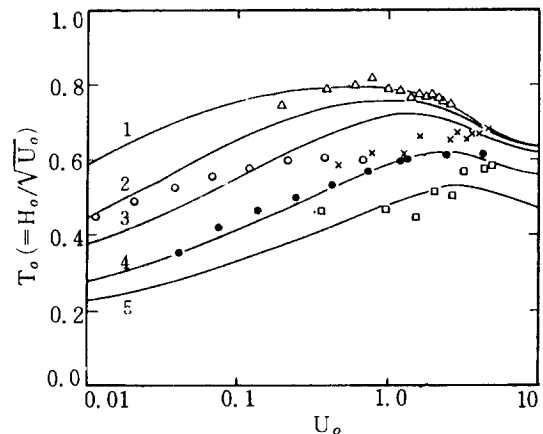


Fig. 3. Comparison of the results simulated by an integral-x-momentum equation with experimental data.

1 (Δ), $M=0.061$; 2 (\circ), $M=0.30$; 3 (\times), $M=0.90$; 4 (\bullet), $M=5.0$; 5 (\square), $M=18.2$. Data of 1&3 were taken from Soroka and Tallmadge[22], 2&4 from Groenvelt[11], and 5 from Gutfinger and Tallmadge[23].

것이다. 다소의 分散이 눈에 띄나, M 에 따라 表面張力이 커질 때나, 平板의 이동이 느릴 때부터 빠를 때까지 상당히 近似하게 일치하고 있음을 볼 수 있다. 平板의 속도가 느릴 때에는 표면張력의 영향이 비교적 큰 데 반하여 속도가 빠를 때에는 영향이 줄고 있으며, 慣性力의 효과는 Fig. 2에서도 관찰한 바와 같이 表面張력이 작아 액막이 두꺼울 때 빨리 나타나고 있다. 表面張력이 크고 액막이 얇아 粘性力이 클 때는 (18)식과 (21)식이 차이를 보이지 않았으나 表面張력이 감소할수록 (21)식의 粘性力이 (18)식보다 작게 나타났으며, 결과적으로 Fig. 3과 같이 M 이 작을 때에도 실험치와 잘 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. 그러나 1을 제외한 2와 3의 실험치가 分散이 심하다는 사실은 (21)식이 全 범위에서 유용하다는 결론을 내리기에 無理가 있다고 생각되어, 이후의 論說에서 다시 한번 살펴보기로 한다.

模寫實驗의 목적이 系의 주요 변수에 대한 定性的 내지는 定量的 정보를 얻기 위한 것이라면, M , U_0 系의 우수성은 Fig. 3와 같은 T_0 보다는 Fig. 4의 從屬변수인 H_0 를 통하여 보다 잘 입증될 수 있다. 일종의 正規化한 액막두께인 T_0 는 Levich[24], 아래 Groenvelt[11], Spiers等[3], Esmail & Hummel[4], Lee & Tallmadge[20] 등에 의하여 無次元化한 액막두께로써 사용되어 왔으나, 操業변수인 U_0

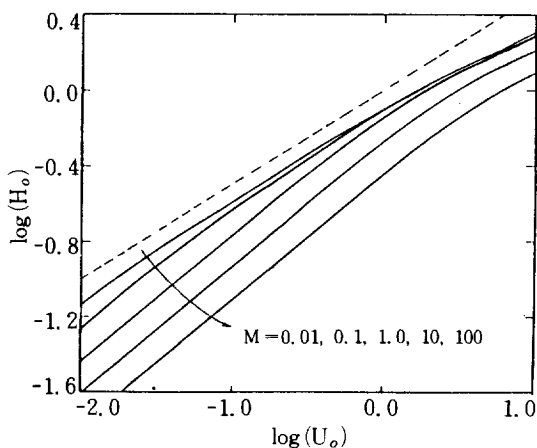


Fig. 4. Effect of withdrawal speed on the final film thickness.

Dotted line represents the maximum attainable thickness, $H_0(\max) = \sqrt{U_0}$.

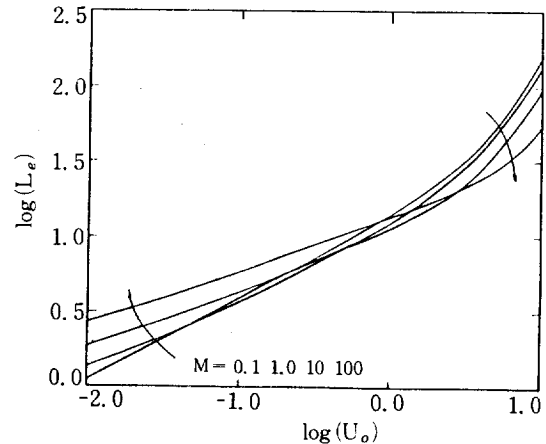
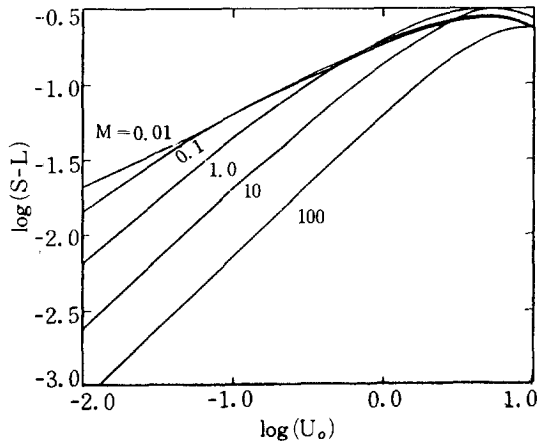


Fig. 5. Effect of withdrawal speed on the entrance length.

가 다시 從屬변수에 포함됨으로써 獨立변수의 영향이 분리되어 나타나지 않는다는 단점을 지니고 있다. Fig. 4는 Fig. 3와 비교하여 平板의 이동이 느릴 때 表面張력의 영향이 크을, 表面張력이 작을수록 平板의 이동속도가 커질수록 液膜의 두께가 두꺼워 짐을 보다 명확히 알 수 있게 하여준다. 이는 表面張력의 효과가 流動의 特性길이가 작을 때 잘 나타난다는 일반적 개념과 일치되는 결과이다. 그러나 表面張력이 작고 속도가 빠른 右側 上端에서는 액막두께의 증가가 제한되어 가능한 최대 액막두께에서 차츰 멀어지고 있다.

Groenvelt & Van Dortmond[25], Esmail & Hummel[4] 등은 液膜의 形態변수(shape parameter)를 통하여, Lee & Tallmadge[20, 26]는 실험측정으로 大量流体의 표면으로부터 액막이 발달하는 과정을 살펴보고 있다. 그러나 결국 設計변수로써 중요한 것은 一定액막에 도달하기까지 필요한 x 방향의 길이이며, 傾斜面 위를 흐르는 液膜流動에 대하여 Stücheli & Özisik[27]은 表面張력이 없을 때의 導入길이(entrance length)를 조사한 바 있다. 本 연구에서는 停滯點부터, 액막두께의 차이가 一定值의 10^{-4} 되는 지점까지를 도입길이(L_e)로 하여 Fig. 5에 나타내었다. 平板의 이동속도에 따라서는 L_e 의 증가를 뚜렷이 알 수 있으나 表面張력의 영향은 平板의 움직임에 따라 相反되게 드러나 일정한 경향을 말하기가 어려웠다. 그러나 定性的으로, 도입길이는 액막의 모양, 혹은 自由表面의 크기와 밀접한

Fig. 6. Plot of $\log(S-L)$ vs. $\log U_0$.

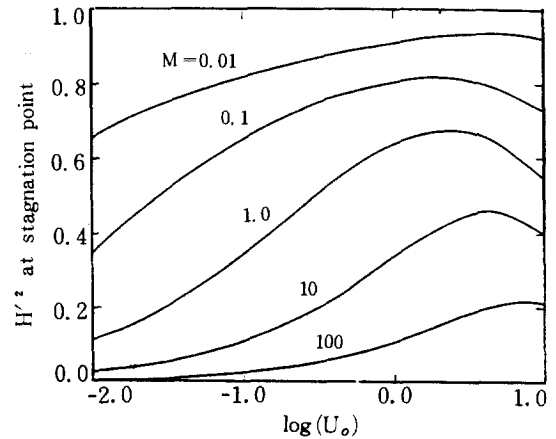
관계에 있으므로 이들을 조사함으로써 변수의 영향을 보다 상세히 살펴보고자 한다.

Fig. 6의 L 은 (30)의 출발점부터 정체점까지의 x 방향의 길이이며, S 는 自由表面의 길이로써,

$$S = \int_0^L (1 + H'^2)^{1/2} dx \quad (31)$$

따라서 $(S-L)$ 은 액막의 두께 H_0 나 L 에 관계없이, 정체점으로부터 액막이 발달하는 중에 늘어나는 自由表面의 길이, 혹은 曲率을 표시하게 된다. Fig. 6는 平板의 이동속도가 빠를수록, 표면장력이 작을수록 自由表面의 길이가 증가함으로써 일반적인 견해와 일치하고 있다. 그러나 M 이 작아지고 U_0 가 커지는 우측 상단에서는 曲線들의 異常變化가 나타남으로써 Fig. 3부터 Fig. 6까지의 경우와 동일한 양상을 보이고 있다.

지금까지의 模寫결과는, x 방향의 적분방정식 (15)를 薄膜가정에 의하여 (21)로 간략하게 하였으며, y 방향의 속도분포를 (28)식과 같이 포물선 형태로 가정함으로써 얻은 결과이다. 그러나 Fig. 3부터 Fig. 6까지의 결과는 표면장력이 작고 평판의 이동속도가 클 때 異常 현상을 보이고 있다. Fig. 7은 액막 전체영역에서 가장 변화가 심한 停滯點 부근의 기울기를 조사함으로써 두가지 중요한 假定中 薄膜가정의 타당성을 조사한 것이다. 원래의 가정은 H'^2 이 全 영역에 걸쳐 1보다 충분히 작아야 한다는 것이었으나, U_0 가 커질수록 정체점에서의 액막의 기울기는 증가하고 있으며, M 이 작아짐에 따라 기울기

Fig. 7. Variations of H'^2 at the stagnation point with withdrawal speed.

는 극히 심한 증가를 보이고 있다.

물론 Fig. 7은 運動量 積分 방정식 (15) 자체의 적용범위가 제한됨을 이야기하는 것은 아니다. 그러나 Esmail & Hummel[4] 이래 (15)의 이용은 언제나 薄膜가정과 (28)의 포물선형 속도분포를 동반하였기에 本 論文에서는 통칭하여 積分法이라 한 것이다. 보다 많은 未知數로써 속도분포의 次數를 늘리고 그에 相應하는 적분방정식을 수립하여 解의 적용범위를 넓히기 위한 시도를 할 수도 있으나, Esmail & Hummel[4]이 지적하였던 바와 같이 U_0 가 크고 M 이 작을 때에는 流動 자체가 不安定하다는 점도 고려하여야 할 것이다.

結論의으로, dip coating 工程의 模寫를 위한 積分法은 표면장력이 크고 평판의 이동속도가 작아 액막의 두께가 얇고 粘性力이 지배적인 경우에 안전하게 사용할 수 있다. 以上の 조건에서 dip coating 工程은,

1. 平板이 빨리 움직일수록, 表面張力이 작을수록 최종액막의 두께는 증가하며, 表面張力의 효과는 平板의 움직임이 느릴 때 더욱 크다.
2. 最終 液膜두께에 도달할 때까지의 導入部는 표면장력이 클수록, 平板의 속도가 빠를수록 길어진다.
3. 大量流体로부터 발달되는 액막의 總括曲率은 표면장력이 작을수록, 平板의 속도가 빠를수록 커진다.

NOMENCLATURE

Capital letters refer to nondimensionalized variables.

- a : determinant of surface metric tensor
- g : gravitational acceleration, m/sec^2
- h : film thickness, m
- h_0 : final constant film thickness, m
- L : distance from stagnation point to flat meniscus
- L_e : entrance length
- M : physical property group defined by equation (19)
- p : pressure, N/m^2
- q : volumetric flow rate per unit width, m^2/sec
- S : line integral along the free surface given by equation (31)
- s : coordinate tangential to the free surface, m
- T_0 : normalized film thickness
- u : velocity in x direction, m/sec
- u_0 : withdrawal speed, m/sec
- v : velocity in y direction, m/sec
- x : coordinate along the solid surface, m
- y : coordinate normal to the solid surface, m
- ϵ : small disturbance
- κ_s : curvature in s direction
- μ : viscosity, Kg/m-sec
- ν : kinematic viscosity, m^2/sec
- ρ : density, Kg/m^3
- σ : surface tension, N/m
- ϕ : function in equation (28)
- ' : x derivative

REFERENCES

1. Landau, L.D. and Levich, V.G. : *Acta Physicochimica USSR*, **17**, 42 (1942).
2. White, D.A. and Tallmadge, J.A. : *Chem. Eng. Sci.*, **20**, 33 (1965).
3. Spiers, R.P., Subbaraman, C.V., and Wilkinson, W.L. : *Chem. Eng. Sci.*, **29**, 389 (1974).
4. Esmail, M.N. and Hummel, R.L. : *AIChE J.*, **21**, 958 (1975).
5. Tallmadge, J.A. and Gutfinger, C. : *Ind. Eng. Chem.*, **59**, 19 (1967).
6. Ghim, Y.S. and Chang, H.N. : Submitted for Publication (1985).
7. Higgins, B.G., Silliman, W.J., Brown, R.A., and Scriven, L.E. : *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **16**, 393 (1977).
8. Higgins, B.G. and Scriven, L.E. : *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **18**, 208 (1979).
9. Cerro, R.L. and Scriven, L.E. : *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **19**, 40 (1980).
10. Ghim, Y.S. and Chang, H.N. : *Hwahak Konghak*, **23**, 103 (1985).
11. Groenveld, P. : *Chem. Eng. Sci.*, **25**, 33 (1970).
12. Ruschak, K.J. : *AIChE J.*, **24**, 705 (1978).
13. Roache, P.J. : "Computational Fluid Dynamics," Sec. III-G, Hermosa, Albuquerque, N.M. (1976).
14. Finlayson, B.A. : "The Method of Weighted Residuals and Variational Principles," Academic Press, New York (1972).
15. Fulford, G.D. : *Adv. Chem. Eng.*, **5**, 151 (1964).
16. Tallmadge, J.A. and Soroka, A.J. : *Chem. Eng. Sci.*, **24**, 377 (1969).
17. Massey, B.S. : "Units, Dimensional Analysis and Physical Similarity," Sec. 7.4, Reinhold, London (1971).
18. Bird, R., Stewart, W.E. and Lightfoot, E.N. : "Transport Phenomena," P.417, Wiley, New York (1960).
19. Kranz, W.B. and Goren, S.L. : *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **10**, 91 (1971).
20. Lee, C.Y. and Tallmadge, J.A. : *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **15**, 258 (1976).
21. Avriel, M. : "Nonlinear Programming. Analysis and Methods," Chap. 11, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1976).
22. Soroka, A.J. and Tallmadge, J.A. : *AIChE J.*, **17**, 505 (1971).
23. Gutfinger, C. and Tallmadge, J.A. : *AIChE J.*, **11**, 403 (1965).

24. Levich, V.G. : "Physicochemical Hydrodynamics," Sec. 133, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1962).
25. Groenveld, P. and Van Dortmond, R.A. : *Chem. Eng. Sci.*, **25**, 1571 (1970).
26. Lee, C.Y. and Tallmadge, J.A. : *AIChE J.*, **20**, 1079 (1974).
27. Stücheli, A. and Özisik, M.N. : *Chem. Eng. Sci.*, **31**, 369 (1976).