

2次元 四角空洞内 流体移動에 대한 磁氣場 効果

閔南泓 · 李炯晚 · 李基俊

서울대학교 工科大学 化学工学科

(1985년 11월 28일 접수, 1986년 10월 4일 채택)

Magnetic Force Effect on Two-Dimensional Cavity Flow

Nam Hong Minn, Hyung Mann Lee and Ki-Jun Lee

*Department of Chemical Engineering, College of Engineering,
Seoul National University, Seoul 151, Korea*

(Received 28 November 1985; accepted 4 October 1986)

要 約

四角空洞内に 外部로부터 磁場을 걸어주었을 때 磁場이 空洞内 流体移動에 미치는 영향을 數值的 方法으로 調査하였다. Vorticity式과 energy式을 풀기 위해 power-law weighted upwind 方法을 사용하였으며 Poisson式은 successive over relaxation法을 적용하여 計算하였다. 아래벽을 加熱한 경우 磁場을 重力方向보다 重力의 直角方向으로 걸어주는 것이 自然對流을 抑制하는데 더 効果的이다. 磁場의 세기가 강해질수록 速度의 絶對値는 작아지며 温度分布는 순수한 傳導만이 있는 경우와 비슷해진다. 또 磁場의 세기가 0.2 tesla 이상 강해지면 自然對流抑制는 磁場의 方向에 큰 영향을 받지 않는다.

Abstract—The effect of an externally imposed magnetic field on the fluid flow in a rectangular cavity are studied numerically. The power-law weighted upwind method is used for the numerical solution of the vorticity transport equation and the energy equation. And the successive over-relaxation method is applied to solve the Poisson equation. It is found that the magnetic field perpendicular to the gravitation is more effective to delay and suppress the natural convection than the magnetic field parallel to the gravitation. The higher the imposed magnetic field is, the greater is the reduction in the absolute value of the velocity, and the less the convection plays a role in the temperature distribution. The direction of the magnetic field does not give as much effect in suppressing the natural convection as the magnetic field strength when it is stronger than 0.2 tesla.

1. 序 論

磁氣場의 效果에 대한 研究는 熱交換器, 氣體吸收塔, 溶媒抽出器 및 항공기 추진장치等 여러가지

응용때문에 매우 흥미로운 分野이다.

1832年 Faraday가 磁石의 兩極사이에 水銀이 담긴 유리관을 넣고 實驗한 결과, 誘導된 전류는 磁氣場과 작용하여 流体의 흐름을 抑制해준다는 事實

을 觀察하였다. 이후 磁場과 對流의 相互作用에 대한 研究가 많은 사람들에 의해 이루어지고 있는 바, 최근에는 單一結晶體의 品質을 높이는 하나의 方法으로 磁場을 이용하는 研究가 활발히 進行되고 있다.

Kim[1]은 內徑이 1.2cm인 조그만 垂直圓筒管에 InSb을 채운 뒤 軸橫斷方向으로 磁場을 걸고 精密한 thermocouple을 이용하여 溫度의 變化를 관찰하였는데, 磁場의 세기가 커짐에 따라 溫度의 變化幅이 작아졌으며 1690 Gauss 정도에서는 自然對流가 거의 抑制됨을 알았다.

Langlois 등[2-4]은 실리콘을 養生하는 Czochralski 工程을 對象으로 하여 여러가지 條件을 變化시키면서 磁力이 對流現象에 미치는 效果를 究明하였는데, 특히 軸方向 磁場을 적용하여 自然對流를 抑制하는 과정에서 Joule heating 效果는 無視해도 됨을 밝혔다. 또 容器의 壁으로부터 擴散汚染되는 酸素의 分布를 조사함으로써 良質의 結晶體를 生成할 수 있는 條件을 提示하였다.

Oreper 등[5]은 各邊이 10cm인 四角空洞에 磁場을 걸었을 때 時間變化에 따라 溫度와 速度場을 計算하였는데, 磁場의 세기는 自然對流 抑制에 중요한 因子이며 모델의 모양과 크기에 따라 磁氣場의 效果는 달라질 수 있음을 示唆하였다.

本 研究에서는 四角空洞內에 重力의 直角方向뿐만 아니라 重力方向으로 磁場을 걸었을 때 自然對流 抑制效果를 比較하고 磁場세기의 變化에 따른 流體의 移動現象을 數值의 方法으로 調查하였다.

2. 理論展開

2-1. 問題의 設定 및 支配方程式

空洞內의 流動現象을 調查하기 위하여 Fig. 1 과 같이 높이 H, 너비 W인 四角空洞을 設定한다. 이때 아래벽을 加熱하고 外部에서 磁場을 걸어주면 空洞內에서는 溫度勾配에 의한 浮力과 磁場에 의한 Lorentz 힘이 作用한다.

이와 같은 모델에 대한 連續方程式, 運動方程式 및 에너지式은 아래와 같다.

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\underline{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \underline{v} + g\beta (T - T_c) + \underline{J} \times \underline{B} \quad (2)$$

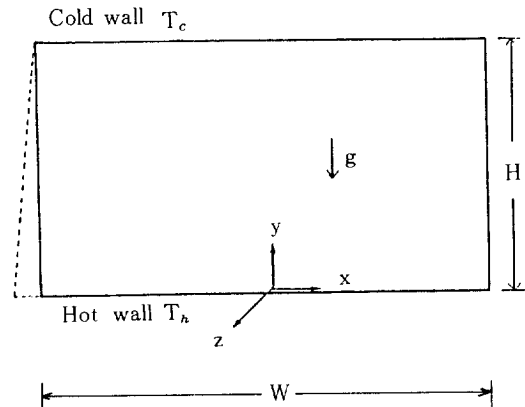


Fig. 1. Diagram of the system.

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T \quad (3)$$

운동방정식에 포함된 $\underline{J} \times \underline{B}$ 項은 磁場이 空洞內 流體에 作用하는 Lorentz 힘으로써 이 項을 計算하기 위해서는 아래와 같은 Maxwell式을 도입해야 한다.

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\underline{J} = \sigma (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \underline{J} = 0 \quad (6)$$

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_e \underline{J} \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad (8)$$

위와 같은 聯立非線型 偏微分方程式을 有限差分化하기 위하여 stream function과 vorticity를 도입하고 에너지式도 收斂性이 좋은 conservative form으로 表示하면(6) 다음과 같다.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (9)$$

$$\omega = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial u \omega}{\partial x} + \frac{\partial v \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) \\ + g\beta \frac{\partial T}{\partial x} + \underline{e}_z \cdot (\nabla \times (\underline{J} \times \underline{B})) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u T}{\partial x} + \frac{\partial v T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \quad (12)$$

이때 (11)式의 右邊 마지막項은 Lorentz 힘이 변형된 형태로서 Maxwell式을 이용하여 풀게 되는데, 磁場이 重力方向으로 걸릴 때는 $\sigma B_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ 이 되고 重力

이 直角方向으로 걸릴 때는 $\sigma B_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ 이 된다.

2-2. 初期 및 境界條件

本 研究의 모든 경우는 初期에 정지해 있다고 두고 計算했으며, 各 壁面은 no-slip 條件을 적용하여 速度는 零으로 두었다. 아래벽은 T_h 로 加熱하고 윗벽은 T_c 로 冷却하였으며 양쪽벽은 아래벽에서 윗벽으로 올라갈수록 線型的으로 감소하는 溫度를 擇하였다. 또 中心軸에서는 對稱條件을 적용하였으며 以上の 條件들을 정리하면 아래와 같다.

$$u=v=0 \quad \text{at } t=0 \quad (13a)$$

$$u=v=0, \quad T=T_h \quad \text{at } y=0 \quad (13b)$$

$$u=v=0, \quad T=T_c \quad \text{at } y=H \quad (13c)$$

$$u=v=0 \quad \text{at } x=-\frac{W}{2}, \frac{W}{2} \quad (13d)$$

$$u=\frac{\partial v}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}=0 \quad \text{at } x=0 \quad (13e)$$

3. 數値模寫 實驗

本 研究에서는 磁場을 걸지 않았을 경우(NO-MAG)와 磁場을 重力方向으로 걸었을 경우(Y-MAG) 및 重力直角方向으로 걸었을 경우(X-MAG)에 대해 數値模寫를 遂行했던 바, 空洞의 너비는 10 inch (25.4 cm), 높이는 12cm로 設定하였으며, 中心軸에 대해 對稱이므로 한쪽면만을 對象으로 計算하였다.

溫度分布와 vorticity 計算은 upwind 方法을 補正한 소위 power-law weighted upwind 方法을 사용했다. 이 方法은 Peclet 數가 큰 경우 相對적으로 擴散項의 效果가 크게 減산되는 短點을 補完한 方法으로서 格子크기에 크게 制限받지 않고 Peclet 數가 큰 경우에도 수렴성이 우수하다[7]. 또 stream function 計算은 Successive Over Relaxation Method (SOR 法)를 사용하였다.

4. 結果 및 檢討

空洞內 流体로는 硅素(Si)의 熔融體를 試料로 사용하였는데, 數値模寫實驗에 필요한 物性值 등은 Table 1에 나타냈다. 여기서 無次元 媒介變數인 Prandtl 數와 Grashof 數는 아래와 같다.

$$Pr=\nu/\alpha=0.024 \quad (14a)$$

Table 1. Physical properties of silicon and geometrical parameters.

Melt density (ρ) : 2.33 g/cm ³
Heat capacity (c_p) : 0.233 cal/g·K
Thermal diffusivity (α) : 0.125 cm ² /sec
Volumetric expansion coefficient (β) : 0.0000141/K
Kinematic viscosity (ν) : 0.003 cm ² /sec
Electrical conductivity (σ) : 0.0000125/abohm.cm
Magnetic permeability (μ_e) : 1.0
Cold wall temperature (T_c) : 1685°K
Hot wall temperature (T_h) : 1773°K
Width of the cavity (W) : 25.4 cm (10 inch)
Height of the cavity (H) : 12 cm

$$Gr=g\beta\Delta Tw^3/\nu^2=2.328\times 10^8 \quad (14b)$$

Fig. 2와 3은 磁場을 걸지 않았을 때 300초 후의 溫度分布와 streamline을 나타낸 그림이다. 그림에서 볼 수 있듯이 오른쪽 隅角으로부터 secondary cell이 생겨 점점 발달되며 그 세력은 중심쪽으로 移動하고 있다. 本 研究에서는 Grashof 數가 2.328×10^8 인 매우 큰 값으로써 磁場을 걸지 않았을 경우는 自然對流가 심하여 時間이 지남에 따라 oscillation 現象이 일어나게 된다.

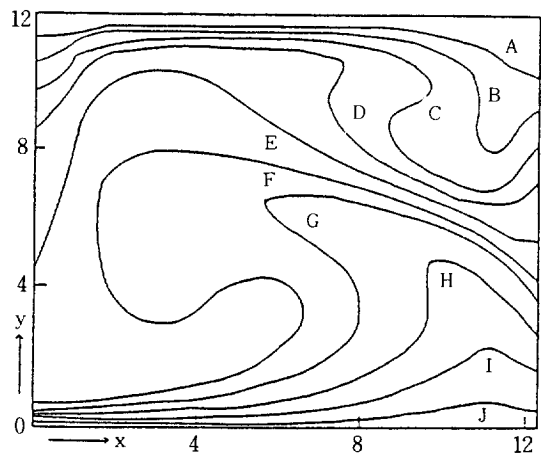


Fig. 2. Isothermal lines with NO-MAG after 300 sec.

(A=1697, B=1705, C=1713, D=1721, E=1733, F=1741, G=1745, H=1753, I=1761, J=1769°K)

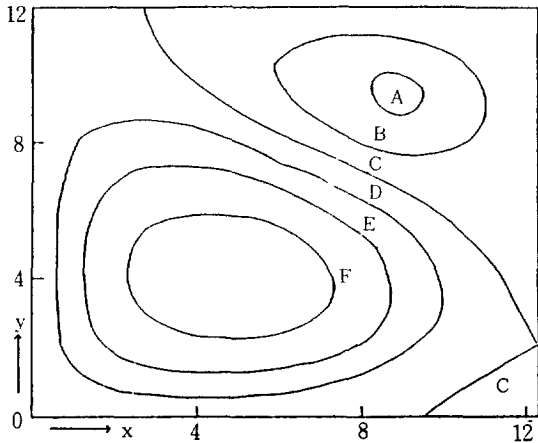


Fig. 3. Streamlines with NO-MAG after 300sec.
($A = -2$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 1$, $E = 2$,
 $F = 3 \text{ cm}^2/\text{sec}$)

Fig. 4와 5는 重力方向으로 0.1tesla의 磁場을 걸었을 때 300초후의 温度分布와 streamline이다. 温度分布는 wave 형태로 나타나며 streamline은 5개의 조그만 cell로 형성된다. 이와 같이 여러개의 cell로 형성되는 것은 磁場에 의한 Lorentz 힘과 重力直角方向의 浮力이 相互作用하여 自然对流가 抑制되고 있음을 나타낸다.

重力直角方向으로 0.1tesla의 磁場을 걸었을 때 300초후의 温度分布와 streamline은 Fig. 6과 7에 나타냈는데 重力方向으로 磁場을 걸었을 때보다

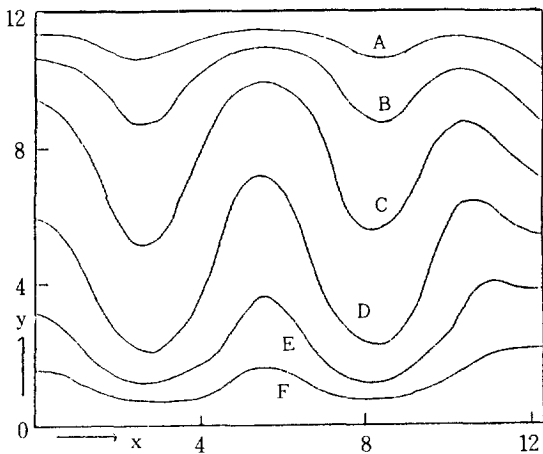


Fig. 4. Isothermal lines with Y-MAG of 0.1 tesla after 300sec.
($A = 1697$, $B = 1709$, $C = 1721$, $D = 1733$,
 $E = 1745$, $F = 1757^\circ \text{K}$)

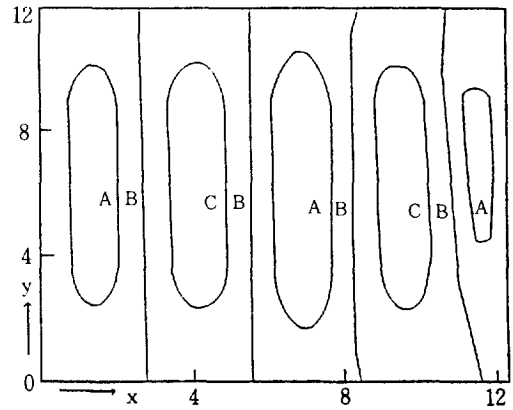


Fig. 5. Streamlines with Y-MAG of 0.1 tesla after 300sec.
($A = -0.25$, $B = 0$, $C = 0.25 \text{ cm}^2/\text{sec}$)

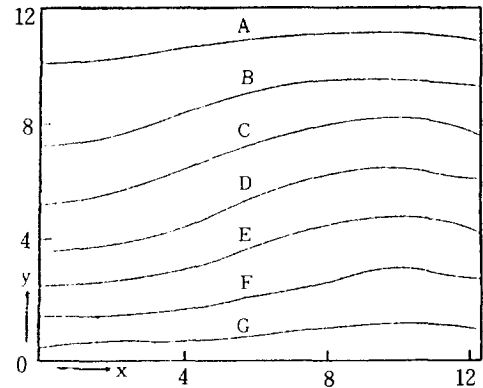


Fig. 6. Isothermal lines with X-MAG of 0.1 tesla after 300sec.
($A = 1693$, $B = 1705$, $C = 1717$, $D = 1729$,
 $E = 1741$, $F = 1753$, $G = 1765^\circ \text{K}$)

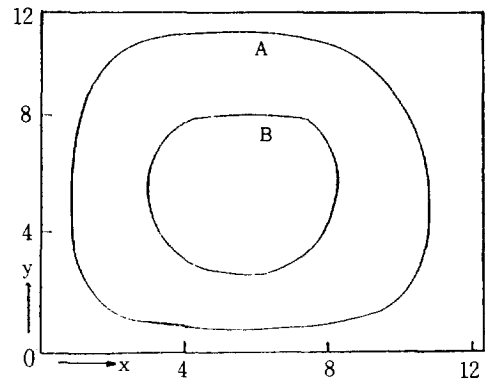


Fig. 7. Streamlines with X-MAG of 0.1 tesla after 300sec.
($A = 0.025$, $B = 0.075 \text{ cm}^2/\text{sec}$)

Table 2. Comparison of the maximum velocity in the cases of NO-MAG, X-MAG and Y-MAG of 0.1 tesla with time.

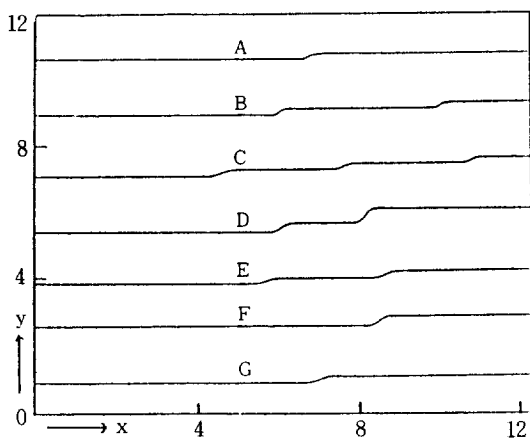
(a) u_{max} (cm/sec)				(b) v_{max} (cm/sec)			
Time (sec)	NO-MAG	X-MAG	Y-MAG	Time (sec)	NO-MAG	X-MAG	Y-MAG
50	1.546	0.072	0.157	50	2.046	0.075	0.359
100	1.855	0.069	0.133	100	1.827	0.051	0.418
150	1.962	0.065	0.130	150	1.562	0.039	0.456
200	1.981	0.056	0.133	200	1.369	0.032	0.465
250	1.920	0.047	0.128	250	1.145	0.027	0.441
300	1.665	0.039	0.127	300	0.846	0.022	0.441
350	1.517	0.032	0.125	350	1.091	0.019	0.441
400	1.754	0.026	0.129	400	0.893	0.016	0.442
450	1.455	0.022	0.131	450	1.137	0.014	0.442
500	1.622	0.018	0.131	500	1.309	0.012	0.439
550	1.411	0.016	0.130	550	0.977	0.010	0.432
600	—	0.013	0.128	600	—	0.009	0.423

自然対流가 현저하게 抑制되었음을 볼 수 있다. 이것으로 보아 아래벽을 加熱한 경우 自然対流는 温度勾配에 의해 윗벽쪽으로 강하게 일어나므로 重力의 直角方向으로 磁場을 걸어주는 것이 自然対流를 抑制하는데 効果의임을 알 수 있다. 위와 같은 事實은 Table 2에서도 확인할 수 있는데 Table 2는 磁場의 세기가 0.1 tesla 일때 위의 세가지 경우(NO-MAG, X-MAG, Y-MAG)에 대해 速度의 最大값

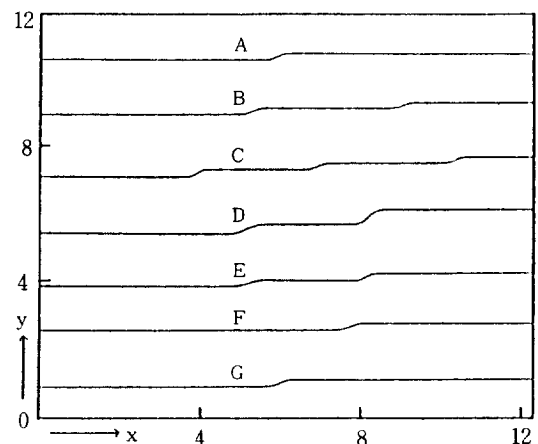
을 比較하였다. 表에서 보듯이 重力의 直角方向으로 磁場을 걸때(X-MAG) 速度의 最大값이 가장 작음을 알 수 있다.

그러나 0.2 tesla 정도의 磁場을 걸면 Fig. 8, 9와 같이 温度分布는 거의 같은 양상이 나타나는 바, 자장의 세기가 강할 때는 自然対流 抑制効果는 磁場의 方向에 큰 영향을 받지 않음을 알 수 있다.

対流의 크기를 stream function의 最大값과 最小

**Fig. 8. Isothermal lines with Y-MAG of 0.2 tesla after 300 sec.**

(A=1693, B=1705, C=1717, D=1729, E=1741, F=1753, G=1765°K)

**Fig. 9. Isothermal lines with X-MAG of 0.2 tesla after 300 sec.**

(A=1693, B=1705, C=1717, D=1729, E=1741, F=1753, G=1765°K)

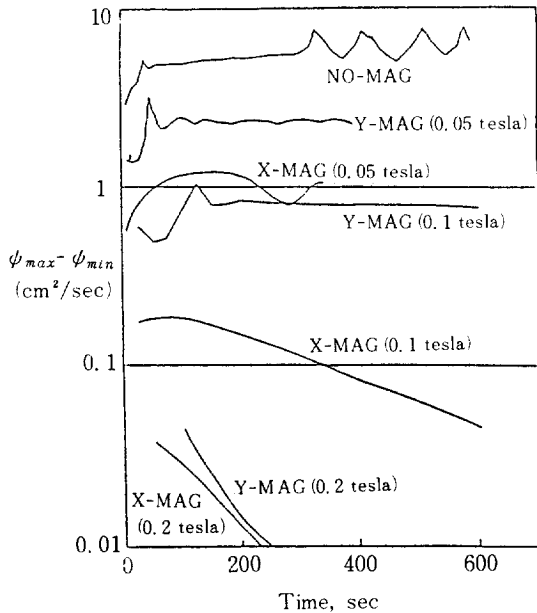


Fig. 10. Comparison of $\Delta\psi$ in the cases of NO-MAG, X-MAG and Y-MAG for different values of magnetic field strength.

값의 차이로 나타내는 방법이 통용되고 있는데 Fig. 10은 시간이 지남에 따라 여러가지 磁場의 세기에 대한 對流의 크기를 그려 보았다. 그림에서 보듯이 0.05 tesla, 0.1 tesla인 경우에는 重力直角方向으로 磁場을 걸었을 때가 重力方向으로 걸었을 때보다 自然對流抑制에 效果의임을 알 수 있다. 그러나 0.2 tesla 이상의 磁場이 걸리면 方向에는 무관하며 200 초후에는 自然對流가 거의 抑制된다.

5. 結 論

本 研究는 磁場의 세기와 方向을 變化하여 四角空洞内の 自然對流 抑制效果를 調査하였는데 主要結論을 정리하면 아래와 같다.

1. 硅素 熔融體와 같은 電導性 流体가 차있는 容器에 磁場을 걸어주면, 磁場은 空洞內 流体移動의 直角方向으로 相互作用함으로써 自然對流를 抑制해 주는 역할을 하였다.

2. 本 研究와 같이 아래벽을 加熱한 경우에는 磁場을 重力方向보다 重力의 直角方向으로 걸어주는 것이 自然對流를 抑制하는데 더 效果的이었다.

3. 磁場의 세기를 크게 해줌에 따라 自然對流는

더욱 抑制되었는데 0.2 tesla 정도의 磁場 세기는 너비 25.4 cm, 높이 12 cm인 四角空洞内の 自然對流를 거의 억제시킬 수 있었으며 이 때는 磁場의 方向에 거의 무관하였다.

4. 對流가 相對的으로 크게 일어나는 경우에 대해 格子크기에 크게 制限을 받지 않는 소위 power-law weighted upwind 差分法은 온도式과 vorticity式을 푸는데 매우 效果的이었다.

감 사

이 연구는 한국과학재단 차관연구비의 지원을 받아 이루어졌으므로 이에 감사의 뜻을 표하는 바이다.

NOMENCLATURE

\underline{B}	: Magnetic field, tesla
B_o	: Magnetic field strength, tesla
\underline{E}	: Electrical field, volt/cm
\underline{e}_z	: z-directional unit vector
g	: Gravitational acceleration, cm/sec^2
Gr	: Grashof number, $g\beta\Delta TW^3/\nu^2$
H	: Height of the cavity, cm
\underline{J}	: Manetic current density, Ampere/ cm^2
p	: Pressure, dyne/ cm^2
Pr	: Prandtl number, ν/α
T	: Temperature, $^\circ\text{K}$
T_c, T_h	: Temperature of upper wall and lower wall, $^\circ\text{K}$
t	: time, sec
u, v	: x-directional and y-directional velocity, cm/sec
\underline{v}	: Velocity vector, cm/sec
W	: Width of the cavity, cm
x, y	: Cartesian coordinates, cm

Greek letters

α	: Thermal diffusivity, cm^2/sec
β	: Volumetric expansion coefficient, $/\text{K}$
μ_e	: Magnetic permeability
ν	: Kinematic viscosity, cm^2/sec
ρ	: Density, g/cm^3
σ	: Electrical conductivity, /abohm.cm

ϕ : Stream function, cm^2/sec
 ω : Vorticity, $/\text{sec}$

REFERENCES

1. Kim, K.M.: *J. Electrochem. Soc.*, **129**, 427 (1982).
2. Langlois, W.E. and Lee, Ki-Jun: *J. Crystal Growth*, **62**, 481 (1983).
3. Langlois, W.E. and Lee, Ki-Jun: *IBM J. Res. Develop.*, **27**, 281 (1983).
4. Lee, Ki-Jun, Langlois, W.E. and Kim, K.M.: *Physico Chemical Hydrodynamics*, **5**, 135 (1984).
5. Oreper, G.M. and Szekely, J.: *J. Crystal Growth*, **64**, 505 (1983).
6. Roache, R.J.: "Computational Fluid Dynamics," Hermosa, Albuquerque (1972).
7. Patankar, S.V.: "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow," McGraw-Hill, New York (1980).