

점소성 유체의 압착유동에 관한 연구 I. 항복응력 및 Herschel-Bulkley 파라미터의 측정

차혁진 · 이승종

서울대학교 공과대학 화학공학과

(1986년 12월 2일 접수, 1987년 3월 30일 채택)

Squeeze Film Flow of Viscoplastic Fluids I. Measurement of Yield Stress and Herschel-Bulkley Parameters

Hyuk-Jin Cha and Seung Jong Lee

Department of Chemical Engineering, College of Engineering, Seoul National University, Seoul 151, Korea

(Received 2 December 1986; accepted 30 March 1987)

요 약

두 평행원판 사이에 놓여있는 Herschel-Bulkley 모델로 표시되는 점소성 유체가 일정한 하중 하에서 압착될 때 일어나는 압착유동 현상을 이론적으로 해석하여 새로운 근사해를 유도하였다. 이를 이용하여 압착유동곡선으로부터 점소성 유체의 항복응력 (τ_0) 및 Herschel-Bulkley 파라미터 (n, η_{HB})를 구하는 방법이 제시되었으며, 두가지 시료 물질에 대한 실험 결과는 점소성 유체의 유변물성 측정에 압착유동장치가 충분히 사용될 수 있음을 보여주고 있다.

Abstract—Squeeze film flow of viscoplastic Herschel-Bulkley fluids between two parallel circular plates under a constant load was analyzed theoretically to derive an approximate solution. This solution was used to determine the yield stress (τ_0) and Herschel-Bulkley parameters (n, η_{HB}) of two test materials from their experimental squeezing curves. The results showed that the simple squeeze film apparatus could be used to determine the yield stress and other rheological properties of viscoplastic materials.

1. 서 론

복합수지계, 페인트, 고분자 액정 등 공학적으로 중요한 많은 비뉴턴성 유체들이 항복응력 (yield stress)을 가지고 있는 것으로 알려져 있으며 이들을 보통 점소성 (viscoplastic) 유체라고 부른다. 여기서 항복응력이란, 물질 내에 유동을 일으키기 위해서 가해져야 하는 최소응력을 말하며, 이러한 물질들의 유동을 수반하는 처리 및 가공 공정의 해석, 설계 등에서, 물질의 항복응력 및 관련 유변물성에 대한 정보는 필수적이다. 그

런데, 대부분의 기존 점도계를 사용하여 이들 물성을 측정하는데 있어서는 벽면에서의 미끄러짐 (wall slippage), 부서러짐 (brittle failure) 등의 문제들 때문에 믿음직한 한 측정치를 얻기가 힘든 실정이다.

한편, 압착유동이란 Fig. 1에서 보는 바와 같이 두 개의 평행 원판 사이에 유체가 들어 있고 원판에 일정한 하중이 가해질 때 유체의 두께가 시간에 따라 점점 얇아져 가면서 일어나게 되는 유동을 말하는데, 이에 관한 연구는 1874년 Stefan[1]의 뉴턴유체에 대한 해석으로 부터 시작되어 power-law 유체, 점탄성 유체

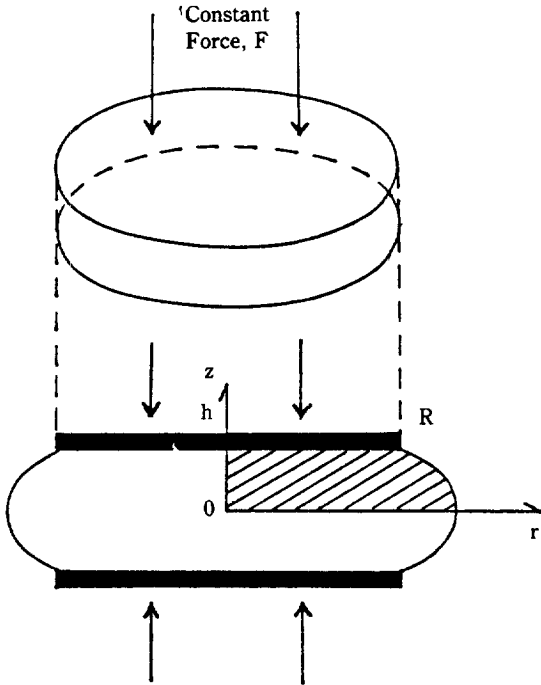


Fig. 1. Schematic of squeeze film flow geometry.

등 비뉴턴유체들에 대한 이론 및 실험적 연구가 많은 사람들에 의하여 수행되어 왔다[2~5]. 그러나, 점소성 유체의 압착유동에 관한 연구는 1930년대 초반 Scott [6], Peek[7] 등에 의해 이론적으로 시도된 이래 거의 관심을 끌지 못하다가, 최근 Covey와 Stanmore[8], Gartling과 Phan-Thien[9], Lipscomb과 Denn[10] 그리고 O'Donovan과 Tanner[11] 등에 의해 유변물성의 측정, 항복경계면(yield surface)의 존재 여부 및 위치 등에 대한 연구결과들이 발표되면서 주목을 받고 있다.

본 연구에서는, 압착유동곡선(squeezing curve)으로부터 항복응력 및 Herschel-Bulkley 모델로 표시되는 점소성 유체의 Herschel-Bulkley 파라미터들을 구하는 방법을 위한 이론적인 전개와 이를 이용한 측정 결과를 기존의 점도계에 의해 얻어진 결과들과 비교함으로써 점소성 유체의 유변물성 측정에 압착유동장치의 사용가능성을 살펴 보고자 한다.

2. 이 론

Herschel-Bulkley 모델에 의해 표시되는 점소성 유

체의 압착유동에 대한 이론적인 해석은 Covey와 Stanmore[8]에 의해 시도되어 압착속도가 클 때와 작을 때로 나누어 구간에 따라 다른 근사해가 구해져 있으며, Gartling과 Phan-Thien[9]은 그 특별한 경우로서 Bingham 유체에 대하여 전 압착속도구간에 걸친 근사해를 제시하였다. 본 연구에서는 Herschel-Bulkley 유체의 경우 전 압착속도구간에 걸친 근사해를 구하여 먼저의 경우들과 비교하고 나아가 항복응력 및 Herschel-Bulkley 파라미터를 실험적으로 결정하는 데에 이용하고자 한다.

2-1. Herschel-Bulkley 유체의 유변방정식

Herschel-Bulkley 유체란 항복응력을 갖는 power-law 유체를 말한다. Bingham 유체에 대한 Oldroyd [12]의 tensor형 표현을 이 경우에 확장 적용하여 tensor 식으로 Herschel-Bulkley 유체의 유변방정식을 표시해 보면 다음과 같이 된다.

$$\underline{\underline{\tau}} = 2 \left[\frac{\tau_0}{\sqrt{4\Pi_d}} + \eta_{HB} (4\Pi_d)^{(n-1)/2} \right] \underline{\underline{d}}, \quad \Pi_r \geq \tau_0^2 \quad (1a)$$

$$\underline{\underline{d}} = 0, \quad \Pi_r < \tau_0^2 \quad (1b)$$

여기서 $\underline{\underline{\tau}}$ 는 extra stress tensor, $\underline{\underline{d}}$ 는 $[(\nabla \underline{\underline{u}}) + (\nabla \underline{\underline{u}})^T]/2$ 로 정의되는 deformation rate tensor이며, τ_0 , η_{HB} 와 n 은 각각 항복응력, Herschel-Bulkley 점도, power-law 지수이고, Π_d 와 Π_r 는 $\underline{\underline{\tau}}$ 와 $\underline{\underline{d}}$ 의 second invariant로서 다음 식에 의해 주어진다.

$$\Pi_d = \frac{1}{2} \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}}, \quad \Pi_r = \frac{1}{2} \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\tau}} \quad (2)$$

식 (1)에서 $n=1$ 이 되면 Bingham 유체에 대한 식이 되며, $\tau_0=0$ 이 되면 power-law 유체에 대한 식으로 된다.

2-2. Herschel-Bulkley 유체의 압착유동

Covey와 Stanmore[8]에 의한 Herschel-Bulkley 유체의 압착유동 해석을 간단히 소개하면 다음과 같다. 대상 domain은 Fig. 1의 빗금친 부분 ($0 \leq r \leq R$, $0 \leq z \leq h$)이며, 비압축성 유체, creeping유동, 중력의 무시, 수직응력(normal stress)의 무시, 평행압착(parallel squeezing) 등을 가정함으로써 연속방정식과 r -방향 운동방정식이 다음과 같이 얻어진다.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \quad (4)$$

식 (4)를 z 방향으로 적분함으로써

$$\tau_{rz} = \frac{\partial P}{\partial r} z \quad (5)$$

가 얻어지며, 식 (3)을 r 및 z 방향으로 각각 한 번씩 적분하면

$$\int_0^h v_r dz = -\frac{r\dot{h}}{2} \quad (6)$$

가 얻어지게 된다. 여기서 \dot{h} 는 $\frac{dh}{dt}$ 를 의미한다. 식 (1)

의 τ_{rz} 성분을 적어보면,

$$\tau_{rz} = \left[\frac{\tau_0}{|\frac{\partial v_r}{\partial z}|} + \eta_{HB} \left| \frac{\partial v_r}{\partial z} \right|^{n-1} \right] \frac{\partial v_r}{\partial z}, \quad \frac{1}{2} \tau_{rz} \geq \tau_0 \quad (7a)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{1}{2} \tau_{rz} < \tau_0 \quad (7b)$$

이 되고, 식 (5)와 (7)에서 τ_{rz} 를 소거한 후 적분하여 v_r 을 구한다. 이렇게 얻어진 v_r 을 식 (6)에 대입하여 적분한 후 정리하면 다음 식이 얻어지게 된다.

$$\frac{n+1}{2n} S_n X^2 - \frac{n+1}{2n+1} (-X-1)^{(2n+1)/n} - (-X-1)^{(n+1)/n} = 0 \quad (8)$$

여기서 X 와 S_n 은 다음과 같이 정의되는 무차원변수들이다.

$$X = \frac{h}{\tau_0} \frac{\partial P}{\partial r} : \text{dimensionless pressure gradient} \quad (9)$$

$$S_n = \frac{\eta_{HB}^{1/n} r (-\dot{h})}{\tau_0^{1/n} h^2} : \text{modified plastic number} \quad (10)$$

식 (8)의 해, 즉 X 를 S_n 의 함수로 구할 수 있게 되면, 이를 적분함으로써 윗판에 작용하는 힘 F 를 얻을 수 있게 되고, 나아가 일정한 F 하에서의 두께 h 가 시간에 따라 변하는 모양 $[h(t)]$ 을 계산해 낼 수 있게 된다. 그런데, 식 (8)은 해석적으로 그 해를 구하는 것이 불가능하므로 n 을 파라미터로 하여 수치해를 구해 보면 Fig. 2에 보이는 바와 같다. 그러나, 이러한 수치해는 실험 결과 (일정한 F 하에서 얻어진 $h(t)$ 곡선)를 해석하여 여러가지 유변물성을 결정하는데 이용하기에는 부적당한 형태이며, 적당한 근사해를 찾는 것이 바람직하다.

2-3. 근사해

Covey와 Stanmore[8]는 압착속도, 즉 S_n 이 클 때

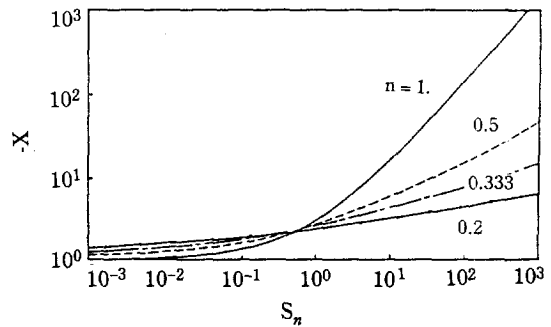


Fig. 2. Dimensionless pressure gradient, X , as a function of modified plastic number, S_n , in the squeeze film flow of Herschel-Bulkely model fluid.

와 작을 때로 나누어 각각 다음과 같은 근사해를 구하였으며,

$$\bullet \text{ Small } S_n : X = -1 - \left(\frac{n+1}{2n} \right)^{n/n+1} S_n^{n/n+1} \quad (11a)$$

$$\bullet \text{ Large } S_n : X = -1.5 - \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^n S_n^n \quad (11b)$$

중간 범위의 S_n 에 대해서는 수치해에 의존할 수 밖에 없다고 하였다. 식 (11b)는 $S_n \rightarrow \infty$ 인 경우에 power-law 유체에 대하여 Scott[2]이 얻었던 식,

$$X = - \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^n S_n^n \text{ 으로 수렴하게 된다.}$$

한편, Gartling과 Phan-Thien[9]은 Bingham 유체에 대하여 전 압착속도구간에 걸친 근사해를 다음 형태로 제시하였다.

$$X = -1 - 0.948 \sqrt{S} - 1.305 S \quad (12)$$

여기서 S 는 $\frac{\eta_{HB} r (-\dot{h})}{\tau_0 h^2}$ 으로 정의되는 plastic number

이다. 그런데, 식 (12)는 수치해와 비교했을 때 약 10%의 최대오차를 가지고 있으며, $\tau_0 \rightarrow 0$, 즉 $S \rightarrow \infty$ 의 경우에 뉴턴 유체에 대한 Stefan[1]의 식, $X = -1.5S$ 에 수렴하지 않는 단점을 가지고 있다.

본 연구에서는, 위 경우들의 단점을 보완하기 위하여 다음과 같은 형태로 전 압착속도 구간에 걸친 식 (8)의 근사해를 구해 보았다.

$$X = -1 - A S_n^{n/2} - \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^n S_n^n \quad (13)$$

여기서, 첫째 항과 세째 항은 각각 항복응력 및 power-law 유체의 점도함수에 의한 효과로써 위와 같이 해

Table 1. The values of A in eq(13) at various n and the maximum errors of eq(13) and (15) from the exact solution of eq(8).

n	A	max. error of eq	
		(13)	(15)
1.0	0.480	6.5%	14.2%
0.75	0.383	5.1%	10.3%
0.5	0.274	3.6%	6.9%
0.25	0.152	1.9%	4.1%

석적으로 구해질 수 있으며, 둘째 항은 이 두 효과의 상호작용에 의해 나타나는 항으로써 계수 A에 의해 그 크기가 결정된다. A는 식 (8)의 수치해와 식 (13)에 의한 값의 차이, 즉 오차의 최대치를 최소화하는 방법으로 결정하였으며, Table 1에 보이는 바와 같이 n의 값에 따라 약간의 변화를 나타내고 있다. 각 경우에 식 (13)에 의한 값의 최대오차가 표시되어 있는데 n이 감소함에 따라 줄어드는 것을 알 수 있다. 특히, n=1인 경우에 식 (13)은

$$X = -1 - 0.48\sqrt{S} - 1.5S \quad (14)$$

와 같이 되고, 이는 Gartling과 Phan-Thien에 의해 제시된 식 (12)보다 훨씬 적은 최대오차를 가지고 있을 뿐만 아니라, $\tau_0 \rightarrow 0$ (즉 $S \rightarrow \infty$)의 뉴턴유체에 대해서도 Stefan식으로 정확히 수렴하고 있어서 식 (12)보다 훨씬 좋은 근사해임을 알 수 있다.

식 (13)에서 둘째 항 $(-AS_n^n/2)$ 의 상대적인 크기는 n이 작아짐에 따라 점점 작아지게 되며, 나아가 이 X를 적분하여 얻어지는 F에서는 그 상대적인 크기가 더 작게 나타나게 되므로 이 둘째 항을 무시하여 얻어지는 다음 식 (15)가 n이 1보다 상당히 작은 물질들의 경우에 큰 오차없이 효과적으로 쓰일 수 있음을 알 수 있다.

$$X = -1 - \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n S_n^n \quad (15)$$

Table 1의 마지막 열에 식 (15)를 사용한 경우의 최대 오차가 표시되어 있는데 n이 약 0.7보다 작은 경우에 10% 이하의 최대오차를 보임을 알 수 있다. 더우기 이 오차는 최대오차이므로 실제의 압착유동실험의 결과해석에 식 (15)를 사용하는데 있어서는 이보다 훨씬 적은 오차가 포함되리라고 예측할 수 있다.

2-4. 유변물성의 실험적 결정

실험적으로 측정된 압착유동곡선, 즉 시간에 따른 두

께의 변화로부터 τ_0 , η_{HB} 및 n 등의 유변물성들을 결정하는 방법은 다음과 같다. 식 (15)를 적분하여 윗판에 작용하는 힘 F를 계산해 보면,

$$F = \frac{\pi \tau_0 R^3}{3h} + \pi \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n \frac{1}{n+3} \frac{\eta_{HB} (-\dot{h})^n}{h^{2n+1}} R^{n+3} \quad (16)$$

이 된다. 우선, 더 이상 압착이 일어나지 않는 ($\dot{h}=0$) limiting height (h_L)를 구해보면,

$$h_L = \frac{\pi \tau_0 R^3}{3F} \quad (17)$$

이 되고, 실험적으로 h_L 를 측정함으로써 τ_0 를 계산할 수 있게 된다. 다음, 식 (16)을 다음과 같이 정리한 후

$$\frac{Fh}{R^3} - \frac{\pi}{3} \tau_0 = \pi \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n \frac{\eta_{HB}}{n+3} \left(-\frac{\dot{h}R}{h^2}\right)^n \quad (18)$$

$\left(\frac{Fh}{R^3} - \frac{\pi}{3} \tau_0\right)$ vs. $\left(-\frac{\dot{h}R}{h^2}\right)$ 의 log-log plot으로부터 n을 구할 수 있으며, 일단 n이 결정되면 식 (16)으로 부터 η_{HB} 가 계산될 수 있다.

3. 실험

3-1. 실험장치

본 실험에서 사용된 압착유동장치는, Fig. 3의 개략도에 보이는 것처럼, 두 평행원판 사이에 놓여있는 시

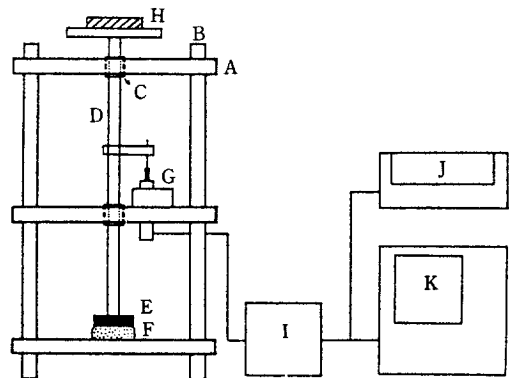


Fig. 3. Schematic diagram of squeeze film apparatus.

- | | |
|-------------------------|------------------|
| A : Steel plate | G : LVDT |
| B : Steel column | H : Weight |
| C : Linear ball bushing | |
| D : Moving rod | I : Power supply |
| E : Squeezing plate | J : Recorder |
| F : Test sample | K : Oscilloscope |

료가 일정한 하중하에서 압착되고 있는 압착부와 시료 두께의 시간에 따른 변화를 측정하는 측정부로 구성되어 있고 측정부는 다시 LVDT (Linear Variable Differential Transducer)와 기록장치(x-y 기록계 및 storage 오실로스코프)로 이루어져 있다.

실험과정을 간략히 설명하면 다음과 같다. 우선, 두 평행원판 사이에 아무 것도 없는 상태에서 두께가 0이 되는 영점을 기록장치에 표시한다. 다음, 두 판 사이에 측정하려는 시료를 적당량 놓고 원하는 초기두께에 도달할 때까지 천천히 압착하여 초기두께에 이르면 고정하여 더 이상 압착이 일어나지 않게 한다. 기록장치를 작동시키고 곧이어 고정장치를 제거하여 주어진 하중하에서 압착이 일어나도록 한다. 시료두께의 시간에 따른 변화가 LVDT의 magnetic core의 움직임에 의해 유도된 전류의 전압차로 나타나며 이는 증폭된 후 기록장치에 기록된다. 압착속도가 빠를 경우에는 storage 오실로스코프를 사용하여 기록하였다. 이렇게 기록장치에 의해 기록된 시료두께의 시간에 따른 변화, 즉 $h(t)$ 를 압착유동곡선이라 한다.

3-2. 시료

실험에 사용된 시료로는 항복응력이 비교적 큰 물질들을 택하였는데, 시판되고 있는 치약 1종과, silicone oil에 SiO_2 분말을 33 wt%분산시켜 만든 suspension이 사용되었다. Suspension 제조에 사용된 silicone oil의 점도는 25°C 에서 10,000 CS이며 밀도는 0.97 g/cm^3 이다.

4. 결과 및 토의

실험적으로 얻어진 압착유동곡선, $h(t)$, 으로 부터 시료의 항복응력 및 Herschel-Bulkley 파라미터들을 2-4절에서 설명한 바와 같이 식 (16)~(18)을 이용하여 다음과 같이 구하였다. 우선, 항복응력 (τ_0)은 식 (17)을 이용하여 h_L 로 부터 계산하였으며, power-law지수 n 은 식(18)을 이용한 ($\frac{Fh_{1/2}}{R^3} - \frac{\pi\tau_0}{3}$) vs. ($-\frac{\dot{h}_{1/2}R}{h_{1/2}^2}$)의 log-log plot으로 부터 구하였다. 여기서, $h_{1/2}$ 은 초기두께 h_0 와 limiting height h_L 의 중간두께, 즉 $(h_0 + h_L)/2$ 을 의미하며, $\dot{h}_{1/2}$ 은 $h_{1/2}$ 에서의 \dot{h} 를 뜻한다. n 을 구하기 위한 이러한 plot이 치약과 silicone oil- SiO_2 powder suspension에 대하여 Fig. 4와 5에 각각 주어졌으며, 이렇게 구해진 τ_0 및 n 값을 사용하면서 식 (16)으로 부터 계산된 η_{HB} 값들이 여러 경우에 대하여

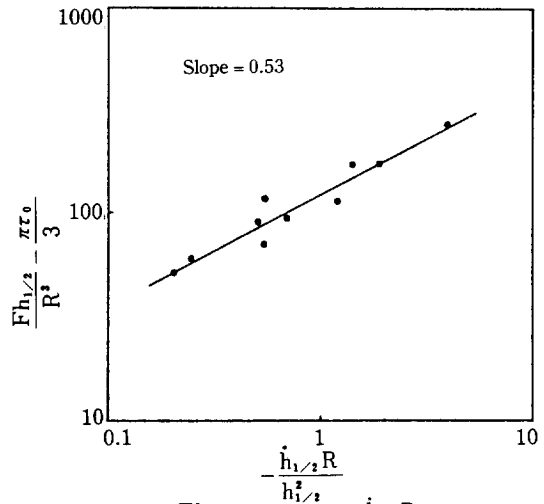


Fig. 4. Plot of $\frac{Fh_{1/2}}{R^3} - \frac{\pi\tau_0}{3}$ vs. $-\frac{\dot{h}_{1/2}R}{h_{1/2}^2}$ to determine the power-law index of toothpaste.

Table 2와 3에 주어져 있다. 이때 사용된 실험변수들은 R : 3 cm, h_0 : 0.6~2.1 mm, F : 17.3~29.4 N으로서 평행압착을 위한 $h/R \ll 1$ 의 조건이 만족되며 F 도 충분히 작아서 creeping 유동과 중력의 무시 등 가정이 정당화 될 수 있는 범위의 값들이다. τ_0 와 η_{HB} 에 대한 평균치와 표준편차가 또한 Table 들에 표시되어 있는데, τ_0 값이 작은 치약의 경우 더 큰 표준편차를 나타내고 있다. 그러나, 이 치약의 경우 Mechani-

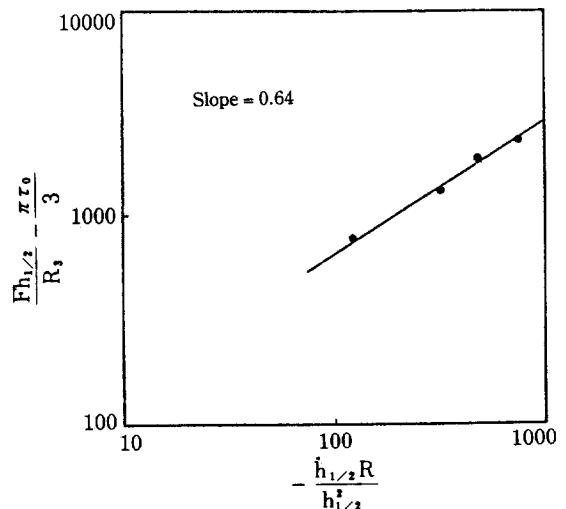


Fig. 5. Plot of $\frac{Fh_{1/2}}{R^3} - \frac{\pi\tau_0}{3}$ vs. $-\frac{\dot{h}_{1/2}R}{h_{1/2}^2}$ to determine the power-law index of silicone oil- SiO_2 powder suspension.

Table 2. Herschel-Bulkley parameters for tooth-paste.

Experiment number	n	τ_0 (Pa)	η_{HB} (kg m ⁻¹ s ⁿ⁻²)
1.	0.53	102	62
2.	"	130	54
3.	"	124	72
4.	"	110	71
5.	"	92	65
6.	"	111	73
Mean (st. dev.)		111.5(13.9)	66.2(7.3)
Mechanical Spectrometer 0.52		126. (39.)	

Table 3. Herschel-Bulkley parameters for silicone oil-SiO₂ powder suspension.

Experiment number	n	τ_0 (Pa)	τ_{HB} (kg m ⁻¹ s ⁿ⁻²)
1.	0.64	210	15.8
2.	"	213	17.6
3.	"	217	14.75
4.	"	206	14.9
Mean (st. dev.)		211.5 (4.6)	15.8 (1.3)

cal Spectrometer(Rheometrics 사 제품)에 의해 얻어진 결과와 비교해 보면 훨씬 적은 표준편차를 보이고 있는 것으로 보아서, 저렴한 가격으로 구성할 수 있는 압착유동장치가 점소성 유체의 유변물성을 측정하는데 고가의 상업적인 점도계에 못지 않게 충분히 사용될 수 있음을 보여주는 것이라 하겠다. 실험에 사용된 시료들의 n 값이 0.53 및 0.64로서 1보다 상당히 작은 값들이므로 2-3절에서 언급된 것처럼 식 (15) 및 식 (16) ~ (18)을 이용하여 실험결과를 해석한 데에 무리가 없었음을 알 수 있다. 그러나, n 이 1에 가까운 물질에 대해서는 위와 같은 방법으로 결정된 유변물성의 신뢰도가 떨어질 것을 추측할 수 있다.

5. 결 론

1. Herschel-Bulkley 모델로 표시되는 점소성 유체의 압착유동을 해석하여 dimensionless pressure gradient (X)와 modified plastic number (S_n) 사이의 새로운 근사해를 $X = -1 - AS_n^{1/2} - (\frac{2n+1}{2n})^n S_n^n$ 의

형태로 구하였다. $n=1$ 의 Bingham 유체인 경우 얻어진 새로운 근사해 $X = -1 - 0.48S^{1/2} - 1.5S$ 는 Gartling과 Phan-Thien[9]에 의해 유도된 근사해 보다 훨씬 높은 정확도를 보여 주었다.

2. Power-law지수 n 이 1보다 상당히 작은 경우에는 둘째 항 ($-AS_n^{1/2}$)의 크기가 작아져서 무시될 수 있으며, 이렇게 얻어진 식 $X = -1 - (\frac{2n+1}{2n})^n S_n^n$ 을 이용하여 압착유동곡선으로 부터 항복응력 (τ_0) 및 Herschel-Bulkley 파라미터들 (η_{HB} , n)을 구할 수 있었다. 시료로 사용된 치약과 silicone oil-SiO₂ powder suspension의 경우에 얻어진 실험결과는 저가의 압착유동장치가 고가의 상업적인 점도계에 못지 않게 점소성 유체의 유변물성 측정에 충분히 사용될 수 있음을 보여주고 있다.

감 사

본 연구가 한국과학재단의 신진연구비와 (주)유공의 장학금 지원으로 이루어진 데 대하여 감사드리며, Mechanical Spectrometer에 의한 시료의 유변물성 측정에 도움을 준 (주)럭키 중앙연구소에 또한 감사드립니다.

NOMENCLATURE

d	: deformation rate tensor [$= (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T)/2$]
F	: total force on the upper plate
h	: half of the film thickness
h_L	: limiting height (h at $t \rightarrow \infty$)
h_0	: initial height (h at $t = 0$)
$h_{1/2}$: $(h_0 + h_L)/2$
\dot{h}	: dh/dt
$\dot{h}_{1/2}$: \dot{h} at $h = h_{1/2}$
n	: power-law index
P	: pressure
r	: radial coordinate
R	: radius of the squeezing plate
S	: plastic number
S_n	: modified plastic number defined by eq(10)
t	: time
$\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$: velocity vector and its components
X	: dimensionless pressure gradient defined by eq(9)
z	: axial coordinate

Greek Letters

η_{HB}	: Herschel-Bulkley viscosity
-------------	------------------------------

τ_{xz} : extra stress tensor
 τ_0 : yield stress
 τ_{rz} : rz component of τ

Others

II_d : second invariant of \underline{d} ($= 1/2 \underline{d} : \underline{d}$)
 II_τ : second invariant of $\underline{\tau}$ ($= 1/2 \underline{\tau} : \underline{\tau}$)

REFERENCES

1. Stefan, M.J.: *Akad. Wiss. Wien Math-Nature Klass. Abt. 2*, **69**, 713 (1874).
2. Scott, J.R.: *Trans. Inst. Rubber Ind.*, **4**, 347 (1929).
3. Leider, P.J. and Bird, R.B.: *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **13**, 336 (1974).
4. Brindley, G., Davies, J.M. and Walters, K.: *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **1**, 19 (1976).
5. Lee, S.J., Denn, M.M., Crochet, M.J., Metzner, A.B. and Riggins, G.J.: *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **14**, 301 (1984).
6. Scott, J.R.: *Trans. Inst. Rubber Ind.*, **7**, 169 (1931).
7. Peek, R.L., Jr.: *J. Rheol.*, **3**, 347 (1932).
8. Covey, G.H. and Stanmore, B.R.: *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **8**, 249 (1981).
9. Gartling, D.K. and Phan-Thien, N.: *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **14**, 347 (1984).
10. Lipscomb, G.G. and Denn, M.M.: *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **14**, 337 (1984).
11. O'Donovan, E.J. and Tanner, R.I.: *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **15**, 75 (1984).
12. Lodge, J.G.: *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **43**, 100 (1947).