

평판 Poiseuille 유동의 열도입부에서의 열적 불안정성 해석

안동준·최창균

서울대학교 공과대학 화학공학과
(1987년 5월 22일 접수, 1987년 8월 27일 채택)

An Analysis of Thermal Instability in Thermal Entrance Region of Plane Poiseuille Flow

Dong June Ahn and Chang Kyun Choi

Department of Chemical Engineering, College of Engineering, Seoul National University, Seoul 151, Korea
(Received 22 May 1987; accepted 27 August 1987)

요 약

Prandtl수가 작은 유체가 밑면이 등온으로 가열되는 열도입부를 평판 Poiseuille 유동형태로 흐르는 계의 열적 불안정성을 전파 이론에 의해 해석하였다. 또한 물($Pr=6.8$)을 이용하여 본 계에서 유동가시화 실험을 시행하였으며, 이로부터 자연대류의 형상은 횡축방향으로 주기적이고 유동방향으로 고정상태인 축방향 와동 roll임을 확인하였다. 이 형태의 자연대류에 대한 안정성 해석 결과, Prandtl수가 작아질수록 열도입부에서 유동상태는 더욱 안정해졌으며 임계조건에 대한 Prandtl수의 영향을 나타내는 근사관계가 이론적으로 다음과 같이 제시되었다.

$$Ra_c = 200(1 + 0.283 Pr^{-1}) x_c^{-1}$$

위 근사관계는 $Pe \geq 100$ 이고 $x_c \leq 0.01$ 인 영역에서 적용되며, 이때 예측된 임계 Rayleigh수는 기존의 실험결과에 매우 접근하였다.

Abstract— The thermal instability of plane Poiseuille flow with sufficiently small Prandtl numbers in the thermal entrance region heated isothermally from below, was investigated by the propagation theory. Also the experiment with water ($Pr=6.8$) in this system was conducted for flow visualization, which showed that the steady longitudinal vortex roll being periodic in the spanwise direction was induced by natural convection. As a result of stability analysis of such a shape of natural convection, it can be suggested that the flow field became to be more stable with decreasing Prandtl numbers. The approximated relation considering the effect of Prandtl numbers on the critical conditions in the thermal entrance region was represented theoretically by

$$Ra_c = 200(1 + 0.283 Pr^{-1}) x_c^{-1}$$

This relation can be applied to the region of $x_c \leq 0.01$ with $Pe \geq 100$ and predicted the critical Rayleigh number in good agreement with existing experimental results.

1. 서 론

수평관사이로 흐르는 유체의 밑면을 높은 온도로 가열하면, 온도분포가 완전히 성장되기 전에 부력에 의한 자연대류가 발생한다. 이때, 열전도와 강제대류만의 열 전달 해석은 더 이상 유효하지 못하므로, 자연대류 발생을 규정하는 임계조건을 파악하는 연구는 이론 및 실험적인 면에서 매우 중요하다.

평판 Poiseuille 유동에서의 자연대류의 형태는 Prandtl수가 0.7인 공기의 실험[1-4]을 통해 고정상태의 유동축방향 와동(steady longitudinal vortex) roll이라고 알려져 있다. Hwang과 Cheng[5]은 유동방향으로의 교란량의 변화를 무시하는 국부 안정성 이론(local stability analysis)에 의해 Prandtl수가 작을수록 유동상태는 열도입부에서 더욱 불안정하며 이는 관성항(convective terms)의 영향 때문이다 예측하였다. 공기($Pr=0.7$)에 대한 실험을 통해 Hwang과 Liu[2]는 유동상태가 열도입부에서 더 안정함을 발표하였으며 이론의 예측과 실험결과의 차이에 대하여 교란이 발생한 후 충분히 성장하여야 관측될 수 있음을 이유로 제시하였다. Kamotani 등[3, 4]도 유사한 경향의 실험결과를 얻고 이 차이는 적절한 수직길이척도가 유체층의 깊이가 아니라 열경계층 두께인데서 비롯된다고 제안하였다.

Davis와 Choi[6]는 열도입부에서 Prandtl수가 큰 Couette 유동에 대한 연구를 통해 온도교란이 열경계층내에 한정된다는 개념을 도입하여 열경계층 두께를 수직길이척도로 하는 임계 Rayleigh수와 파수(wave number)를 제안, 물($Pr=6.8$)을 이용한 실험결과에 접근된 예측을 하였으며 이 개념을 Yeo와 Choi[7]는 Poiseuille 유동에 적용한 바 있다. Choi, Shin과 Hwang[8] 그리고 Kim과 Choi[9]는 Prandtl수가 큰 유체에 국한하여 각각 열도입부의 Couette과 Poiseuille 유동에 대하여 기본온도분포를 적분법으로 근사한 후, 열경계층 두께에 의한 유사변수를 도입함으로써 유동방향으로의 교란량 변화까지 고려하는 전파 이론(propagation theory)을 고안하여 실험결과에 보다 일치된 예측을 제시, 전파 이론의 타당성을 입증하였다. 최근 Choi와 Yoo[10]는 위 이론을 위로부터 냉각되는 수평유체층의 안정성 해석에 적용하고 Prandtl수가 충분히 작을 경우, 클 때와 달리 slip 경계조건을 취하여 유체층이 안정된다는 결과를 얻었다.

본 연구에서는, 유동방향으로의 전도효과가 무시되는

영역에서 Prandtl수가 충분히 작은 평판 Poiseuille 유동의 열도입부에서의 열적 불안정성을 위 전파 이론에 의해 해석하여 Prandtl수가 유동의 안정성에 미치는 영향을 이론적으로 조사하고, 물의 유동가시화 실험을 통해 본 계에서 자연대류의 형태를 관찰하였다.

2. 안정성 기본식의 설정

유동방향으로의 열전도 효과가 무시되는 영역에서 Prandtl수가 충분히 작고 점성소실항(viscous dissipation terms)이 극미한 비압축 뉴턴성 유체가 Fig. 1에서와 같이 두 수평 고정경계면 사이에 일정한 온도(T_1)를 유지한 채 속도분포가 완전히 발달된 Poiseuille 유동형태로, 밑면이 등온(T_2)으로 가열되는 열도입부를 흐르고 있다. Prandtl수가 작으므로 속도분포가 완전히 발달되기 위해서는 열도입부로 진입하기 전에 충분히 긴거리를 흘러야 한다.

2-1. 기본온도분포 근사

열도입부에서 열전도와 강제대류만에 의한 기본온도분포를 얻기 위해 다음의 무차원군을 정의한다.

$$(x, y, z) = (X/Pe, Y, Z)/d$$

$$U_0 = U/\langle U \rangle$$

$$\theta_0 = (T - T_1)/(T_2 - T_1)$$

여기서, d 는 유체층의 깊이, $\langle U \rangle$ 는 유동의 평균속도, Pe 는 $\langle U \rangle$ 를 기준으로 하는 Peclet수이고, 하첨자 0는 무차원 기본량을 지칭한다. 유동방향으로의 전도효과를 무시할 경우 기본온도분포식은 다음과 같다.

$$U_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$U_0 = 6(z - z^2) \quad (2)$$

(경계조건)

$$\theta_0(0, z) = 0$$

$$\theta_0(x, 0) = 1$$

$$\theta_0(x, 1) = 0$$

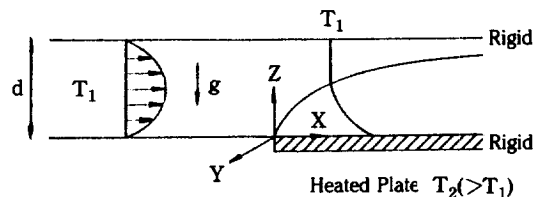


Fig. 1. Schematic diagram of the system.

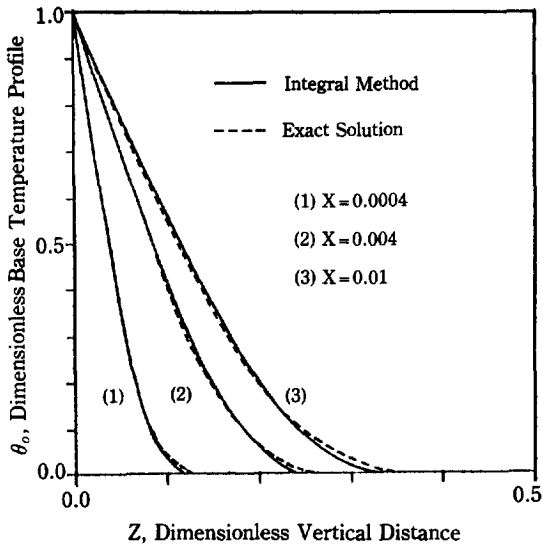


Fig. 2. Base temperature profile.

위의 식은 변수분리에 의한 Graetz 해와 유사변수에 의한 Levêque 해가 가능하며, Yeo와 Choi[7]는 열경계층 두께와 가열면에서의 온도구배를 이용하여 그 해를 근사한 바 있다. 본 연구에서는 Kim과 Choi[9]와 같이 적분법에 의한 3차 다항식으로 기본온도분포를 근사하였다.

$$\theta_0 = 1 - \frac{3}{2} \frac{z}{\delta_T} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\delta_T} \right)^3, \quad 0 \leq z \leq \delta_T \quad (3)$$

$$\theta_0 = 0, \quad z \geq \delta_T \quad (4)$$

여기서, δ_T 는 무차원 열경계층 두께이며 $\delta_T = Ax^{\frac{1}{3}}$, $A = (15/4)^{\frac{1}{3}}$ 이다. 위 근사는 Fig. 2에 도시되었듯이 짧은 열도입 거리($x \leq 0.01$)에서 엄밀해와 잘 일치하며, 이때 열경계층이 가열선단에 위치하므로 ($\delta_T \gg \delta_r^2$) 속도분포를 $U_0 \approx 6z$ 로 취하였다.

2-2. 안정성 기본방정식

Boussinesq 가정과 선형 안정성이론에 의해 기본식이 유도된다. 자연대류 발생지점에서 교란이 미소하므로 속도, 온도, 압력은 기본량과 미소 교란량의 합으로 설정될 수 있다. 자연대류의 형상이 고정상태의 유동축 방향 와동 roll이라는 일반적인 실험적 관찰[2-4]로부터 교란량의 시간에 대한 의존을 배제한다. Hsu, Cheng과 Homsy[11]의 결과에서 보듯이 유동축 방향 속도교란량은 수직면상의 속도교란량들에 비해 무척 작으므로 ($|U_1| \ll |V_1|, |W_1|$), 이에 따른 크기위수 해석(order-of-magnitude analysis)을 한 후 압력과

회속도(V_1)교란량을 소거하면 다음의 안정성 기본방정식이 도출된다.

$$\frac{1}{Pr} [U_0 \nabla_1^2 \frac{\partial W_1}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial x} \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}] = \nabla_1^2 \nabla_1^2 W_1 + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} \quad (5)$$

$$U_0 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + Ra W_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = \nabla_1^2 \theta_1 \quad (6)$$

여기서, 하첨자 1은 무차원 미소교란량을 의미하며, $\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 이고 그 외의 무차원군은 다음과 같이 정의된다.

$$(U_1, V_1, W_1) = (U'/Pe, V', W')d/\alpha$$

$$Pe = \langle U \rangle d/\alpha$$

$$Pr = \nu/\alpha$$

$$Ra = g\beta d^3 \Delta T/\nu/\alpha$$

$$\theta_1 = g\beta d^3 T'/\nu/\alpha = Ra T'/\Delta T$$

여기서, $\Delta T = T_2 - T_1$, α 는 열확산계수, ν 는 동점도, g 는 중력가속도, β 는 열팽창계수이고, 상첨자 1은 차원 미소교란량을 의미한다. 무차원 온도교란량(θ_1)이 Hwang과 Cheng[5]에서의 $\theta_1 = T'/\Delta T$ 와 달리 Foster[12]에서와 같이 정의되었음을 주지할 필요가 있다.

3. 전파 이론에 의한 안정성 해석

3-1. 전파 이론

발생된 자연대류 횡축방향으로 주기적이고 고정적인 유동축방향 와동 roll 형상임에 유의하여 교란량을 식 (7)로 표현하고, $\zeta = z/\delta_T$ 라는 유사변수를 도입한 후 교란량을 식 (8)로 재정의한다.

$$[W_1, \theta_1] = [W^*(x, z), \theta^*(x, z)]e^{i\alpha y} \quad (7)$$

$$[W_1^*, \theta_1^*] = [\delta_T^2 W^*(\zeta), \theta^*(\zeta)] \quad (8)$$

그러면 식 (5), (6)은 다음으로 전환된다.

$$[(D^2 - a^{*2})^2 + \frac{2A^3}{Pr} (\zeta^2 D^3 - a^{*2} \zeta^2 D + 2a^{*2} \zeta)] W^* = a^{*2} \theta^* \quad (9)$$

$$(D^2 + 2A^3 \zeta^2 D - a^{*2}) \theta^* = Ra^* W^*(D\theta_0) \quad (10)$$

여기서, $D = \frac{d}{d\zeta}$, $D\theta_0 = -\frac{3}{2}(1-\zeta^2)$, $a^* = a\delta_T$,

$Ra^* = Ra\delta_T^3$ 이며, Kim과 Choi[9]가 제시했던 유사변수 전환과정은 위와 같이 수정되어야 한다.

국부 안정성이론[5]이 유동방향(x)에의 변화가 무시되는 교란량을 정의한 데 반하여, 전파이론은 열경계층 두께에 의해 교란량의 x 변화까지를 고려하는 유사변수를 도입함으로써 기본속도량 U_0 와 관련된 관성항을 포함시키는 상미분 안정방정식에 도달하게 된다. 이에 대하여는 다공성층에서 Hsu, Cheng과 Homsy[11]가 "bottling" 효과를 고려한 크기위수해석을 통해 기본속도량 U_0 가 크므로 이것과 관련된 관성항이 해석과정에 포함되어야 하며 이 경우 관성항은 유동상태를 안정하게 하는 효과를 보인다고 발표한 바 있다. 한편, Chen과 Chen[13]은 일반적인 wedge 유동에 대해 경계층이 계속 성장하여 갈 때 자연대류 발생지점과 근접된 영역에서 wedge 매개변수를 이용하여 x변화를 고려하는 준 유사변수 전환(quasi-similarity transformation)을 고안한 바 있다.

위 식 (9), (10)에서 정의된 Ra^* , a^* 는 수직길이 척도를 유체층 깊이에서 열경계층 두께로 전환하였을 때의 Rayleigh와 파수를 의미하는데 실험적 관찰 [2, 6]을 면밀히 살펴보면, 위의 형태로 재정의된 Rayleigh수와 파수는 자연대류발생 임계조건에서 x에 대한 의존도가 매우 약하므로 본 연구에서 채용된 유사변수 전환이 가능하게 된다.

식 (9)는 Prandtl수가 작아질수록 유동의 안정성에 대한 관성항의 영향이 확산항(diffusive terms)보다 강해짐을 보여주고 있다. 본 연구에서는 Prandtl수가 충분히 작을 경우 확산항의 영향이 매우 미약할 것임에 착안, 확산항을 배제하여 식 (11)로 나타낸다.

$$\theta^* = \frac{2A^3}{Pr a^{*2}} (\zeta^2 D^2 - a^{*2} \zeta^2 D + 2a^{*2} \zeta) W^* \quad (11)$$

위 식을 "deep pool" 가정하에 식 (10)과 결합하여 열경계층 내부와 외부로 나누어 다음과 같이 정리한다.

$$[2A^3 (D^2 + 2A^3 \zeta^2 D - a^{*2}) (\zeta^2 D^2 - a^{*2} \zeta^2 D + 2a^{*2} \zeta) - PrRa^* a^{*2} D \theta_0] W_t^* = 0, \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (12)$$

$$(D^2 + 2A^3 \zeta^2 D - a^{*2}) (\zeta^2 D^2 - a^{*2} \zeta^2 D + 2a^{*2} \zeta) W_0^* = 0, \quad 1 \leq \zeta < \infty \quad (13)$$

여기서, 하첨자 $t, 0$ 는 각기 열경계층 내부와 외부의 의미한다.

Prandtl수가 충분히 작으므로 가열면에서 속도교란에 대해 slip 조건을 취하고 열경계면 ($\zeta=1$)에서 교란 속도, 온도, 응력(stress) 등이 연속이어야 하므로, 경계조건은 다음과 같다.

$$\text{at } \zeta = 0; W_t^* = \theta_t^* = 0 \quad (14)$$

$$\text{at } \zeta = 1; D^n W_t^* - D^n W_0^* = 0 \quad \text{for } n=0, 1, 2, 3, 4 \quad (15)$$

$$\text{as } \zeta \rightarrow \infty; W_0^* = DW_0^* = \theta_0^* = 0 \quad (16)$$

식 (12), (13)과 경계조건 (14)-(16)으로 부터 관성항이 열도입부에서 유동의 안정성에 미치는 영향을 파악할 수 있으며 이는 곧 안정성에 대한 Prandtl수의 효과를 의미한다.

3-2. 해 법

열경계층 내부에서의 해는 상미분 방정식 (12)의 계수가 ζ 에 관한 다항식이므로 Frobenius 방법에 의해 다음과 같은 형태의 근사해를 구할 수 있다.

$$W_t^* = \sum_{j=1}^5 H_j f_j(\zeta) \quad (H_j : \text{constants})$$

여기서 $f_j(\zeta)$ 는 급속히 수렴하는 멱급수들이며, $\zeta=0$ 에서의 경계조건으로 부터 해는 다음과 같다.

$$W_t^* = H_2 f_2(\zeta) + H_3 f_3(\zeta) + H_4 f_4(\zeta) \quad (17)$$

여기서,

$$f_2(\zeta) = \zeta - \frac{a^{*2}}{6} \zeta^3 - \frac{1}{192} \frac{a^{*2}}{A^3} PrRa^* \zeta^4 + \dots$$

$$f_3(\zeta) = \zeta^2 - \frac{1}{960} \frac{a^{*2}}{A^3} PrRa^* \zeta^5 + \dots$$

$$f_4(\zeta) = [f_3(\zeta)] \ln \zeta - \frac{a^{*2}}{18} \zeta^4 + \frac{1}{360} \left(\frac{41}{80} \frac{a^{*2}}{A^3} PrRa^* - 2A^3 \right) \zeta^5 + \dots$$

그리고 열경계층 외부에서는 식 (13)을 다음으로 나누어 해를 구한다.

$$(D^2 + 2A^3 \zeta^2 D - a^{*2}) Y = 0 \quad (18)$$

$$\zeta (D^2 - a^{*2}) (\zeta D - 2) W_0^* = Y \quad (19)$$

$\zeta \rightarrow \infty$ 일 때 $Y \rightarrow 0$ 인 조건을 만족하는 식 (18)의 해는 WKB 방법에 의해 근사한다.

$$Y(\zeta) \sim \exp \left[-\frac{A^3}{3} \zeta^3 - \int_1^\zeta (A^6 \zeta^4 + 2A^3 \zeta + a^{*2})^{1/2} d\zeta \right] / (A^6 \zeta^4 + 2A^3 \zeta + a^{*2})^{1/4} \quad (20)$$

이로부터 $Y(1)$ 과 $Y'(1)$ 을 구할 수 있다. $t=\zeta-1$ 로 치환한 후 Y 를 멱급수 해법으로 근사하고, 미분연산자 기법에 의해 식 (19)는 다음으로 전환된다.

$$(t+1)DW_0^* - 2W_0^* = H_7 \left(e^{a^{*2}t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{(n+1)} - e^{-a^{*2}t} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^{n+1}}{(n+1)} \right) / (2a^*) \quad (21)$$

여기서, a_n 는 b_n 은 $a_0 = b_0 = Y(1)$, $a_1 = Y'(1) - (1 +$

$a^*)Y(1)$, $b_1 = Y'(1) - (1 - a^*)Y(1)$ 으로 시작되는 순환공식을 따른다. 식 (21)에서 W_0^* 에 대해 역급수해를 구할 수 있으며 이것은 식 (19)의 특이해에 해당한다. 이를, 나머지 경계조건을 적용하여 구한 순수해와 결합하여 열경계층 외부에서의 해를 식 (22)로 얻을 수 있다.

$$W_0^* = H_6 [(a^*\zeta - 1)e^{-a^*\zeta} - a^{*2}\zeta^2 E_1(a^*\zeta)]/2 + H_7 [e^{a^*\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k + e^{-a^*\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k] / (2a^*) \quad (22)$$

여기서, c_k 와 d_k 는 다음의 순환공식을 따른다.

$$c_k = a_{k-2}/k/(k-1) - (a^* + k - 3)c_{k-1}/k - a^*c_{k-2}/k \quad (k \geq 2)$$

$$d_k = -b_{k-2}/k/(k-1) + (a^* - k + 3)d_{k-1}/k + a^*d_{k-2}/k \quad (k \geq 2)$$

$$c_0 = c_1 = d_0 = d_1 = 0$$

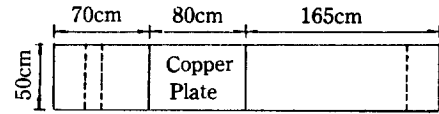
열경계층 ($\zeta=1$)에서의 경계조건으로 부터 다음의 행렬을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} f_2 & f_3 & f_5 & (1-a^*)e^{-a^*} + a^{*2}E_1(a^*) & 0 \\ f_2' & f_3' & f_5' & -a^*e^{-a^*} + a^{*2}E_1(a^*) & 0 \\ f_2'' & f_3'' & f_5'' & a^{*2}E_1(a^*) & 0 \\ f_2''' & f_3''' & f_5''' & -a^{*2}e^{-a^*} & -Y(1) \\ f_2^{IV} & f_3^{IV} & f_5^{IV} & (a^{*2} + a^{*3})e^{-a^*} & 2Y(1) - Y'(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2 \\ H_3 \\ H_5 \\ H_4 \\ H_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (23)$$

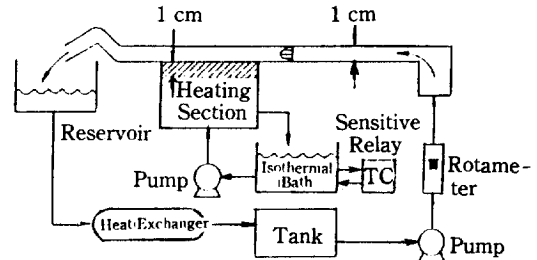
위 행렬이 의미있는 해를 가지기 위해서는 계수들만으로 구성된 행렬식이 0을 만족하여야 한다. 이 문제는 (5×5) 행렬의 고유치 문제이며 고유치는 a^* 와 $PrRa^*$ 로 구성되는데 주어진 a^* 에 대하여 $PrRa^*$ 를 고유치로 간주할 수 있다. 이 결과들로 부터 중립 안정성곡선(neutral stability curve)을 작성하여 $PrRa^*$ 의 최소치와 이에 대응하는 a^* 를 얻을 수 있으며 이것이 유동의 불안정 발생을 규정하는 임계치들이다.

4. 실험

평판 Poiseuille 유동에서의 자연대류의 형상을 알기 위해 Prandtl수가 6.8인 물을 이용하여 유동 가시화 실험을 시행하였다. 가시화를 위하여 염료(dye)와 "Rheoscopic Fluid AQ 1000(Kalliroscope Co., Cambridge, Massachusetts)"를 사용하였다. 열도입부는 25°C - 30°C 로 가열되었고 열도입부로 진입하는 물의 온도는 실험실의 온도와 같게 하였으며 18°C - 20°C 였다. 가열부는 Fig. 3에서 보듯이 sensitive relay에 의해 등온으로 유지되는 항온조에서 데워진 물이



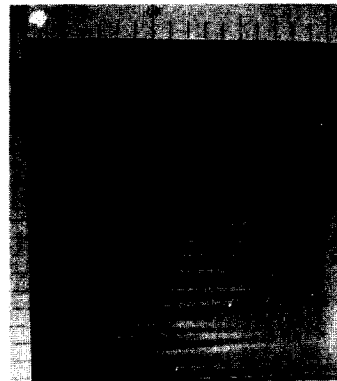
(a) Top View



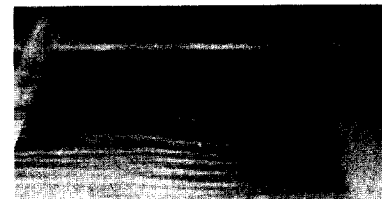
(b) Schematic of the Experimental Apparatus

Fig. 3. Experimental system.

pump에 의해 가열부로 들어가 4개의 분사대를 통해 두께 1cm의 동판을 "shower" 시켜준다. 가시화의 대상 유체인 물은 tank로 부터 pump를 통해 실험 본체에 투입되고 165cm를 흐르며 속도분포가 완전히 성장한 후 열도입부에 진입하게 된다. 열도입부를 지나면 일단 reservoir에 모아져 열교환기에 의해 냉각된 후 다시 tank로 들어가 순환된다. 각종 온도는 알콜 온도계에 의해 측정되었으며, 모든 온도조건이 정상상태에



(a) top view



(b) oblique side view

Fig. 4. Flow visualization ($Pe=400$, $Ra=10^5$).

도달하도록 3-4시간의 "warm-up"을 하였다.

본 실험이 행해진 영역은 $Pe=190-470$, $Ra=7.9 \times 10^4-1.7 \times 10^5$ 이었다. 따라서, 유동방향으로의 열전도 효과를 무시할 수 있으며, 유동가시화 결과가 Fig. 4에 나타나 있다. 본 연구에서 채용된 실험장치는 완벽한 결과보다 상대적인 경향성을 지닌 실험치를 제시해 주고 있다.

5. 결과 및 검토

물에 의한 유동가시화 실험으로 부터 자연대류의 형태는 횡측방향으로 주기적이고 유동방향으로 고정적인 축방향 와동 roll임을 알 수 있었으며, 이는 기존의 실험 결과[2-4]와 일치하고 있다. 이와같은 실험적 증거로부터 교란량의 시간에 대한 의존을 배제하고 횡측방향의 주기함수를 채택하는 과정이 적절한 것임을 알 수 있다.

전과 이론에 의한 안정성 해석결과에 따라 중립 안정성 곡선이 Fig. 5에 제시되었다. 이론적으로는 무한히 많은 수의 중립 안정성 곡선들을 작성할 수 있으며, 여기서는 3개의 곡선만을 도식하였다. 각 곡선에 대하여

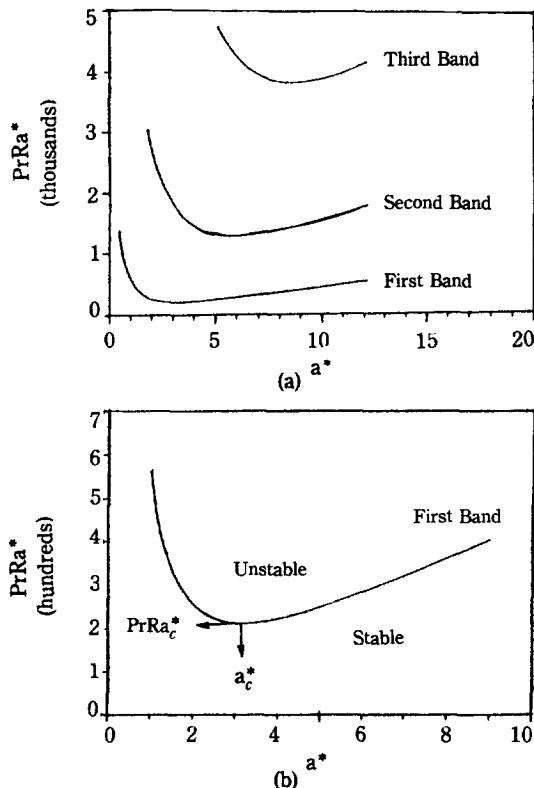


Fig. 5. Neutral stability curve.

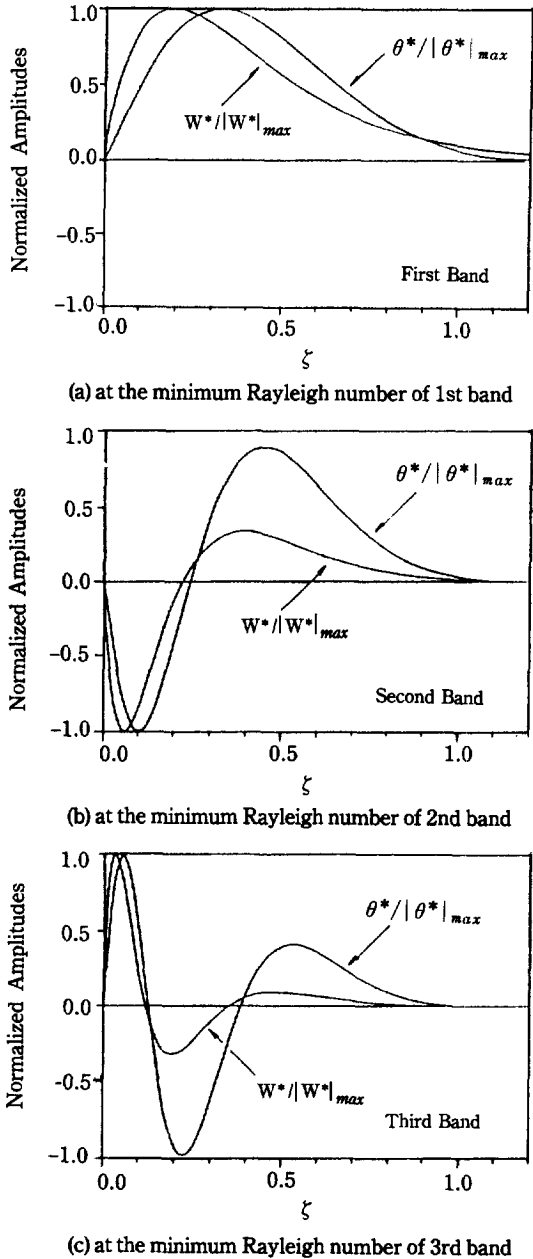


Fig. 6. Profiles of disturbances.

임계 Rayleigh수와 이에 대응하는 파수를 구할 수 있으며 이때, 각 임계치에서의 교란량 분포는 Fig. 6에 나타나있듯이 첫째 곡선의 경우 단일 와동 roll, 둘째 곡선의 경우 이중 와동 roll 그리고 셋째 곡선에서 삼중 와동 roll의 형태이다. 따라서, 가장 불안하여 교란이 쉽게 성장할 수 있는 조건은 그 형태가 단일 와동

Table 1. Results of analysis through propagation theory.

	a_c^*	$PrRa_c^*$	$ W^* _{max}$	$ \theta^* _{max}$
1st Band	3.14	212.1	0.121($\zeta=0.20$)	1.458($\zeta=0.32$)
2nd Band	5.8	1265.	0.081($\zeta=0.06$)	0.712($\zeta=0.10$)
3rd Band	8.6	3800.	0.136($\zeta=0.03$)	0.971($\zeta=0.05$)

roll인 첫번째 곡선에서의 임계치 $a^*=3.14$, $PrRa^*=212.1$ 이다. 안정성 해석 결과치가 Table 1에 정리되었다.

위 임계조건에서의 교란량 분포와, Prandtl수가 무한히 큰 경우에 대한 분석[9]에서 구해진 임계조건 $a^*=1.96$, $Ra^*=748.3$ 에서의 교란량 분포를 비교하여 보면, Prandtl수가 작아지면서 속도교란이 가열면 쪽으로 근접하여 그 양이 최대가 되는 지점이 온도교란의 최대치 지점의 내부에 위치함을 알 수 있다. 이는 열경계층에 대한 속도경계층의 상대적인 두께비를 뜻하는 Prandtl수의 물리적인 의미와 일맥상통하는 결과로서 본 연구의 해석결과에 타당성을 부여해주고 있다.

δ_T 를 수직길이 척도로 잡아 정의된 a^* , Ra^* 의 임계치로부터 실제 a_c , Ra_c 의 관계가 다음과 같이 설정된다.

$$Ra_c = 200x_c^{-1}, \quad a_c = 0.216Ra_c^{1/3} \quad \text{for } Pr \rightarrow \infty$$

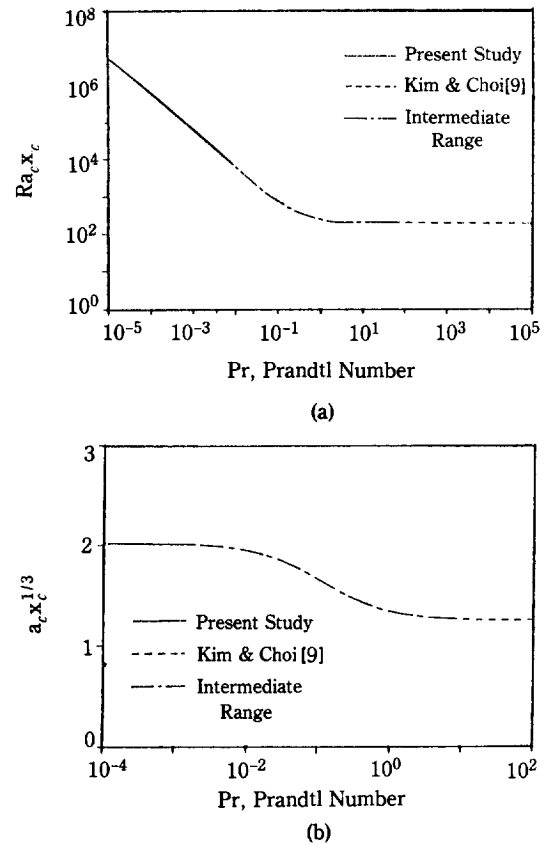
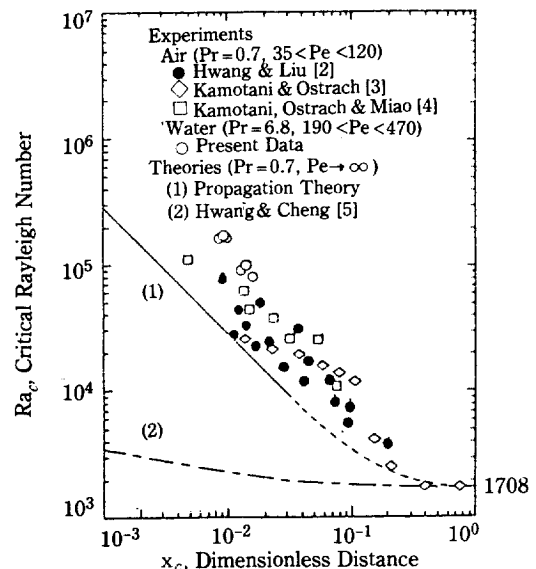
$$Ra_c = 56.6x_c^{-1}Pr^{-1}, \quad a_c = 0.527Ra_c^{1/3}Pr^{1/3} \quad \text{for } Pr \rightarrow 0$$

위 양 극단의 관계로부터 Prandtl수 전 영역에 대한 근사식이 식 (24), (25)로 간단하게 제시될 수 있다. 단, 이 근사관계는 $Pe \geq 100$ 이며 짧은 열도입부 영역($x_c \leq 0.01$)에서 유효하다.

$$Ra_c = 200(1 + 0.283 Pr^{-1})x_c^{-1} \quad (24)$$

$$a_c = 1.263 \left[\frac{1 + 0.283 Pr^{-1}}{1 + 0.0689 Pr^{-1}} \right]^{1/3} x_c^{-1/3} \quad (25)$$

Fig. 7로 부터 유동상태에 대한 Prandtl수의 영향을 쉽게 파악할 수 있는데, Prandtl수가 작아질수록 Ra_c 는 증가하여 유동상태가 더욱 안정해지고 있으며 이는 곧 관성항이 유동을 안정화한다는 것을 의미한다. 동일 계에 대한 국부 안정성 이론의 예측[5]과는 정반대의 결론이다. 또한 Prandtl수가 커질 경우 Ra_c 에 대한 영향은 $Pr > 1$ 인 영역에서 거의 무시될 만 하다. 한편 a_c 는 Prandtl수가 작아짐에 따라 점차로 커지며 전반적으로 a_c 는 Ra_c 보다 Prandtl수의 영향이 미약하다.

**Fig. 7. The effect of Prandtl number on the critical conditions.****Fig. 8. Critical Rayleigh number in thermal entrance region.**

공기($Pr=0.7$)에 대하여 식 (24)에 의한 이론적 예측과 실험치를 비교하여 Fig. 8에 도시하였다. 전파 이론에 의한 예측은 실험치에 보다 근접하고 있으며, 최초에 발생된 교란이 충분히 성장한 후에야 관찰될 수 있다는 사실을 감안하면 가시화된 와동 roll의 사진[2] 또는 횡측방향으로 주기적인 온도분포의 탐지[3] 등으로 관찰한 실험치와의 차이는 매우 근소하다 할 수 있다. 이는 전파 이론이 유동상태의 불안정성 예측에 매우 유용한 이론임을 시사한다.

6. 결 론

본 연구에서는, 열경계층 두께를 이용한 유사변수를 도입함으로써 기본유동방향으로의 교란량 변화까지 고려하는 전파 이론에 의하여 수평 고정 경계면 사이에서 Prandtl수가 작은 유체가 Poiseuille 유동으로 열도입부를 흐르는 계에 대해 열적 불안정성을 해석하고, 물의 유동가시화 실험을 시행하여 다음의 결론에 도달하였다.

1. 물($Pr=6.8$)에 대한 실험을 통해 본 계에서 자연대류의 형상은 알려진대로 횡측방향으로 주기적이고 유동방향으로 고정상태인 축방향 와동 roll임을 파악하였다.

2. 위 형태의 자연대류 발생에 관한 해석결과, 유동방향으로의 열전도 효과가 무시되는 영역에서 Prandtl수가 충분히 작을 경우에는 클 때와 달리 속도교란이 온도교란보다 가열면에 접근해 있으며 이때 임계조건에서의 교란형태는 단일 와동 roll이었다.

3. 열도입부에서의 임계조건은 유동방향의 교란량 U_1 이 무시되는 경우 $Pe \geq 100$, $x_c \leq 0.01$ 인 영역에서 다음의 관계식으로 근사 가능하다.

$$Ra_c = 200 (1 + 0.283 Pr^{-1}) x_c^{-1}$$

$$a_c = 1.263 \left(\frac{1 + 0.283 Pr^{-1}}{1 + 0.0689 Pr^{-1}} \right)^{1/3} x_c^{-1/3}$$

4. Prandtl수가 0.7인 공기에 대해 예측된 임계 Rayleigh수 Ra_c 는 실험결과에 보다 잘 일치하였으며 이는 전파 이론이 열적 불안정성의 예측에 적합한 이론임을 입증해주고 있다.

감 사

본 연구는 한국과학재단의 연구지원에 의하여 이루어진 것입니다. 이에 감사의 뜻을 포함합니다.

NOMENCLATURE

A	: constant [= (15/4) ^{1/3}]
a	: wave number
a^*	: wave number based on thermal boundary layer thickness as length scale [= $a \delta_T$]
d	: fluid depth (cm)
g	: gravitational acceleration (cm/sec ²)
i	: complex number
n	: order of differentiation in equation (15)
Pe	: Peclet number [= $\langle U \rangle d / \alpha$]
Pr	: Prandtl number [= ν / α]
Ra	: Rayleigh number [= $g \beta d^3 \Delta T / \alpha \nu$]
Ra^*	: Rayleigh number based on thermal boundary layer thickness as length scale [= $Ra \delta_T^3$]
T	: temperature (K)
T_1	: inlet temperature of fluid and temperature of upper rigid boundary (K)
T_2	: temperature of heated plate (K)
ΔT	: temperature difference between boundaries [= $T_2 - T_1$] (K)
t	: time (sec)
U, V, W	: velocities in rectangular coordinates (cm/sec)
u, v, w	: dimensionless velocities [= $(U/Pe, V, W)d/\alpha$]
X, Y, Z	: positions in rectangular coordinates (cm)
x, y, z	: dimensionless positions [= $(X/Pe, Y, Z)/d$]

Greek Letters

α	: thermal diffusivity (cm ² /sec)
β	: thermal expansion coefficient (1/K)
Δ_T	: thermal boundary layer thickness (cm)
δ_T	: dimensionless thermal boundary layer thickness [= Δ_T/d]
ζ	: similarity variable [= z/δ_T]
θ_0	: dimensionless base temperature profile [= $(T-T_1)/\Delta T$]
θ_1	: dimensionless temperature disturbance [$RaT'/\Delta T$]
κ	: thermal conductivity (cal/cm/sec/K)
μ	: viscosity (g/cm/sec)
ν	: kinematic viscosity (cm ² /sec)
ρ	: density (g/cm ³)

Subscripts

c	: critical condition
i	: inner region of thermal boundary layer
o	: outer region of thermal boundary layer
T	: thermal boundary layer

- 0 : dimensionless base quantity
 1 : dimensionless disturbance

Superscripts

- * : amplitude function of disturbance
 , : disturbance quantity

Brackets

- | | : absolute value
 < > : mean value

Mathematical Operators

- D : differential operator with respect to ξ [$=d/d\xi$]
 ∇_1 : Laplacian operator in normal plane to heated surface [$=\partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$]

REFERENCES

1. Akiyama, M., Hwang, G.J. and Cheng, K.C.: *J. Heat Transfer*, **93**, 335 (1971).
2. Hwang, G.J. and Liu, C.L.: *Can. J. Chem. Eng.*, **54**, 521 (1976).
3. Kamotani, Y. and Ostrach, S.: *J. Heat Transfer*, **98**, 62 (1976).
4. Kamotani, Y., Ostrach, S. and Miao, H.: *J. Heat Transfer*, **101**, 222 (1979).
5. Hwang, G.J. and Cheng, K.C.: *J. Heat Transfer*, **95**, 72 (1973).
6. Davis, E.J. and Choi, C.K.: *J. Fluid Mech.*, **81**, 565 (1977).
7. Yeo, Y.K. and Choi, C.K.: *Int. Chem. Eng.*, **23**, 281 (1983).
8. Choi, C.K., Shin, C.B. and Hwang, S.T.: Proc. Int. Heat Transfer Conference, San Francisco, pp. 1389-1394 (1986).
9. Kim, J.J. and Choi, C.K.: Proc. World Congress III of Chem. Eng., Tokyo, vol. 2, pp. 328-331 (1986).
10. Choi, C.K. and Yoo, J.S.: Proc. Heat Transfer: Korea-U.S.A. Seminar, Seoul, pp. 1-9 (1986).
11. Hsu, C.T., Cheng, P. and Homsy, G.M.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **21**, 1221 (1978).
12. Foster, T.D.: *Phys. Fluids*, **8**, 1249 (1965).
13. Chen, K. and Chen, M.M.: *J. Heat Transfer*, **106**, 284 (1984).