HWAHAK KONGHAK Vol. 26, No. 4, August 1988, pp. 428-434
(Journal of the Korean Institute of Chemical Engineers)

점소성 유체의 압착유동에 관한 연구
II. 유한요소 수치모사에 의한 항복경계면 조사

황인석·이승종

서울대학교 공과대학 화학공학과

(1988년 4월 27일 접수, 1988년 6월 16일 채택)

Squeeze Film Flow of Viscoplastic Fluids
II. Investigation of the Yield Surface by Finite Element Simulations

In Seok Hwang and Seung Jong Lee

Department of Chemical Engineering, College of Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea

(Received 27 April 1988; accepted 16 June 1988)

요 약

유한요소법에 의한 수치모사를 수행하여 점소성 유체의 압착유동장 내에서의 항복경계면의 존재 여부를 조사하였다. Bingham 유체의 경우, 압착유동이 지속되는 한 유동장 내에 항복경계면이 존재하지 않는다는 것이 밝혀졌으며, 근사식으로 사용된 bi-viscosity 모델의 경우에는 압착속도 및 $\gamma(=\mu_p/\mu_r)$ 값에 따라 기존에 제시된 여러 모양의 항복경계면이 모두 존재할 수 있음을 보였으나, Bingham 모델에 접근하게 되면 결국 항복경계면이 사라짐을 보였다.

Abstract—The existence of the yield surface in the squeeze film flow of viscoplastic fluids was investigated by finite element simulations. In the case of Bingham fluid, the yield surface does not exist within the squeezing flow field as long as the squeezing process continues. When the bi-viscosity model is used as approximate constitutive equation of viscoplastic fluids, various shapes of the yield surfaces which have been proposed by previous researchers are observed depending on the squeezing speed and the value of $\gamma(=\mu_p/\mu_r)$. But, eventually the yield surface disappears as the model approaches to Bingham model.

1. 서 론

지난 수십년간 유변학(Rheology)분야에 있어서 주된 관심사는 고분자 용액 및 용융체 등 단상물질(one-phase materials)의 유동에 관한 연구에 있었다. 최근에 들어서는 공학적인 용도에서 자주 접하게 되는 복합수지계, 페인트, 고분자 액정 등 다상 비뉴톤 유체에도 관심이 모아지고 있다. 이와 같은 유체는 대부분의 경우 변형이 일어나기 위해서 가해져야 할 최소의 응력을 가지고 있는 것으로 알려져 있는데, 이 최소응력을 항복응력(yield stress)이라 부르며, 그러한 유체를 점소성(viscoplastic)유체라 한다.

한편, 압착유동(squeeze film flow)이란 Fig. 1에서와 같이 유체로 채워져 있는 두 평행 원판에 일정한 하중이 부과되어 유체의 두께가 시간의 경과에 따라 얇아져 가면서 일어나게 되는 유동을 말한다.

점소성 유체의 압착유동에 관한 연구는 1930년대 초 Scott[1], Peek[2] 등에 의해 해석적 방법으로 수행되

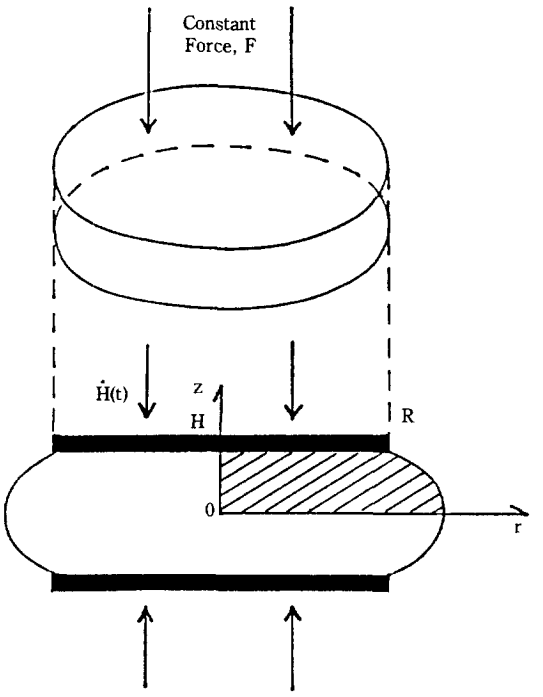


Fig. 1. Schematic of squeeze film flow geometry.

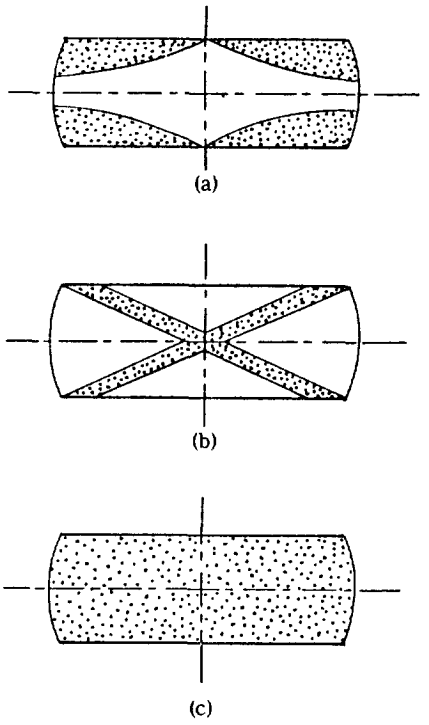


Fig. 2. Flow characteristics proposed by previous researchers in the squeeze film flow of viscoplastic fluids. The shaded parts show the yielded region.

었었으며, 최근 점소성 유체의 유변물성의 측정 및 압착유동장 내의 항복경계면(yield surface) 존재 여부와 그 모양 등에 관하여 상반된 연구결과들이 발표되면서 다시 주목을 끌고 있다. 여기서, 항복경계면이란, 점소성 유체의 압착유동장 내의, 변형이 일어나는 영역(yielded region)과 변형없이 고체와 같은 움직임 만이 일어나는 영역(unyielded region)의 경계면을 일컫는다. Scott[3]는 Fig. 2(a)와 같은 모양의 항복경계면이 존재한다는 종래의 주장을 바꾸어 Fig. 2(b)의 항복경계면을 주장한 Peek[2]의 해석을 받아들였다. 1981년, Covey와 Stanmore[4]는 평행압착(parallel squeezing)의 가정 위에서 해석적인 방법으로 Fig. 2(a)와 같은 모양의 항복경계면이 존재한다고 주장하였으나, Lipscomb과 Denn[5]은 운동학적(kinematical) 관점에서 점소성 유체의 압착유동이 지속되는 한 유동장 내의 어느 곳에도 변형되지 않은 채 남아 있는 부분이 존재할 수 없다는 결과를 발표하였다[Fig. 2(c)]. 유한요소 수치모사에 의한 연구로서는, Gartling과 Phan-Thien[6]이 Fig. 2(a) 형태의 항복경계면을 얻은 것과 O'Donovan과 Tanner[7]가 Fig. 2(b)와 유사한 모양의 항복경계면을 예측하여 서로 상반된 듯한 결과를 보여주고 있는데, 이들은 Bingham 모델 대신 bi-viscosity 모델을 사용하였다.

본 연구에서는 유한요소법에 의한 수치모사를 수행하여, Bingham 모델 및 bi-viscosity 모델로 표시되는 점소성 유체의 압착유동 내에 항복경계면의 존재 여부를 밝히고자 한다.

2. 지배방정식

점소성 유체의 압착유동은 domain의 형상이 시간에 따라 변하는 비정상상태의 유동이나, 대상 유체의 점도가 보통 아주 크기 때문에 creeping 유동을 가정하면, 의정상상태(pseudo-steady state)의 유동으로 볼 수 있다. 또, 유체의 비압축성을 가정하고 중력의 영향을 무시하면, Fig. 1의 빗금친 부분만을 대상으로 할 때, 운동방정식과 연속방정식을 다음과 같이 쓸 수 있고

$$-\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr})-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}=0 \qquad (1a)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz})+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}=0 \qquad (1b)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \qquad (2)$$

경계조건은

$$v_r = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \qquad \text{at } r = 0 \qquad (3a)$$

$$v_z = 0, \quad \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0 \qquad \text{at } z = 0 \qquad (3b)$$

$$v_r = 0, \quad v_z = \dot{H}(t) \qquad \text{at } z = H(t) \qquad (3c)$$

all the stresses = 0 along the free surface (3d)

으로 주어진다. 여기서, $\dot{H}(t)$는 어느 순간 윗판이 중심면으로부터 $H(t)$의 높이에 있을 때 판의 압착속도이고, v_r과 v_z는 축대칭 유동에서 r 및 z 방향의 속도 성분이며, P는 압력, τ_{rr}, $\tau_{\theta\theta}$, τ_{zz}, τ_{rz}는 extra stress tensor($\underline{\underline{\tau}}$)의 각 성분들이다.

점소성 유체의 유변방정식으로는, 가장 널리 사용되고 있는 Bingham 유체 모델과, 이의 근사적 모델인 bi-viscosity 모델을 사용하였다. Bingham 모델의 tensor형 표현은 다음과 같이 주어진다[8].

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\left(\frac{\tau_o}{\sqrt{4\,II_d}} + \mu_p\right)\underline{\underline{d}}, \quad II_\tau \geq \tau_o^2 \qquad (4a)$$

$$\underline{\underline{d}} = 0, \quad II_\tau < \tau_o^2 \qquad (4b)$$

여기서, $\underline{\underline{d}}$는 $[\nabla\underline{v} + \nabla\underline{v}^T]/2$로 정의되는 deformation rate tensor이며, τ_o와 μ_p는 각각 항복응력 및 plastic viscosity이다. II_d와 II_τ는 $\underline{\underline{d}}$와 $\underline{\underline{\tau}}$의 second invariant로서 다음과 같이 정의된다.

$$II_d = \frac{1}{2}\underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}(d_{rr}^2 + d_{\theta\theta}^2 + d_{zz}^2) + d_{rz}^2 \qquad (5)$$

$$II_\tau = \frac{1}{2}\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\tau}} = \frac{1}{2}(\tau_{rr}^2 + \tau_{\theta\theta}^2 + \tau_{zz}^2) + \tau_{rz}^2 \qquad (6)$$

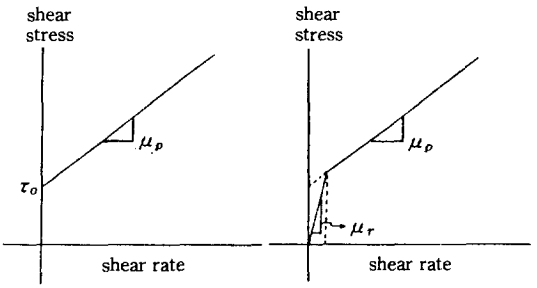
한편, Bingham 유체의 근사적 유변방정식으로 Gartling과 Phan-Thien[6], O'Donovan과 Tanner [7] 등에 의해 사용되어 온 bi-viscosity 모델은 plastic viscosity μ_p보다 매우 큰 unyielded viscosity μ_r을 갖는 뉴톤성 유체를 매우 작은 deformation rate 범위에서 가정한 것으로 다음과 같이 표시된다(Fig. 3 참조).

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\left(\frac{\tau_o}{\sqrt{4\,II_d}} + \mu_p\right)\underline{\underline{d}}, \quad \dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_c \qquad (7a)$$

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu_r\underline{\underline{d}}, \quad \dot{\gamma} < \dot{\gamma}_c \qquad (7b)$$

단, $\dot{\gamma}_c$는 critical shear rate로서 다음의 관계식으로 주어진다.

$$\dot{\gamma}_c = \tau_o/(\mu_r - \mu_p) \qquad (8)$$



(a) Bingham model (b) Bi-viscosity model

Fig. 3. Viscoplastic fluid models used in this study.

3. 유한요소 수치모사

Galerkin method에 의해 앞서 주어진 지배방정식들이 discretize 되었다[9]. 우선, v_r, v_z, 그리고 P를 biquadratic(Ψ_j) 및 bilinear(ϕ_j) shape functions을 사용하여 다음과 같이 근사적으로 표시한다.

$$v_r \approx \sum_j u_j \Psi_j, \quad v_z \approx \sum_j v_j \Psi_j \qquad (9)$$

$$P \approx \sum P_j \phi_j \qquad (10)$$

다음, 운동방정식을 Galerkin form으로 쓰면

$$\left\langle r\Psi_i, -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}\right\rangle = 0 \qquad (11a)$$

$$\left\langle r\Psi_i, -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}) + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right\rangle = 0 \qquad (11b)$$

인데, 여기서 $\langle\ \rangle$는 domain 내에서의 적분을 의미한다. 이를 부분적분한 후 divergence 정리를 적용하여 경계(boundary)에서의 적분항을 분리해 내고, 유변방정식의 성분 별 관계식을 대입해 넣으면

$$\left\langle r\frac{\partial \Psi_i}{\partial r}, -P + 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r}\right\rangle + \left\langle r\frac{\partial \Psi_i}{\partial z}, \eta\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right\rangle + \left\langle \Psi_i, 2\eta\frac{v_r}{r}\right\rangle - \langle \Psi_i, P\rangle = \langle\langle r\Psi_i, t_r\rangle\rangle \qquad (12a)$$

$$\left\langle r\frac{\partial \Psi_i}{\partial r}, \eta\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right\rangle + \left\langle r\frac{\partial \Psi_i}{\partial z}, -P + 2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z}\right\rangle = \langle\langle r\Psi_i, t_z\rangle\rangle \qquad (12b)$$

으로 된다. 여기서, η는 viscosity 함수로서 식(4) 또는 (7)로부터 $\eta = \underline{\underline{\tau}}/(2\underline{\underline{d}})$으로 정의되며, $\langle\langle\ \rangle\rangle$는 경계를 따른 적분을 의미한다. 또, t_r와 t_z는 경계에서의 contact force vector의 각 방향성분이다. 한편, 연속방정식의 Galerkin form은

$$\langle r\phi_i, \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \rangle = 0 \quad (13)$$

이다. 마지막으로, 식 (12)와 (13)에 식 (9)와 (10)을 대입하여 정리하면 다음과 같은 대수방정식들을 얻을 수 있다.

$$\sum_j (A_{ij} u_j - C_{ij} v_j) - \sum_j D_{ij} P_j = X_i \quad (14)$$

$$\sum_j (C_{ji} u_j - B_{ij} v_j) - \sum_j E_{ij} P_j = Y_i \quad (15)$$

$$\sum_j (-D_{ji} u_j - E_{ji} v_j) = 0 \quad (16)$$

여기서, 각 matrix들은 다음과 같이 정의되는 양들이다.

$$A_{ij} = 2\langle \eta r \frac{\partial \Psi_i}{\partial r}, \frac{\partial \Psi_j}{\partial r} \rangle + \langle \eta r \frac{\partial \Psi_i}{\partial z}, \frac{\partial \Psi_j}{\partial z} \rangle + \langle \eta \Psi_i, \frac{\Psi_j}{r} \rangle \quad (17a)$$

$$B_{ij} = 2\langle \eta r \frac{\partial \Psi_i}{\partial z}, \frac{\partial \Psi_j}{\partial z} \rangle + \langle \eta r \frac{\partial \Psi_i}{\partial r}, \frac{\partial \Psi_j}{\partial r} \rangle \quad (17b)$$

$$C_{ij} = \langle \eta r \frac{\partial \Psi_i}{\partial z}, \frac{\partial \Psi_j}{\partial r} \rangle \quad (17c)$$

$$D_{ij} = \langle r \frac{\partial \Psi_i}{\partial r}, \phi_j \rangle + \langle \Psi_i, \phi_j \rangle \quad (17d)$$

$$E_{ij} = \langle r \frac{\partial \Psi_i}{\partial z}, \phi_j \rangle \quad (17e)$$

$$X_i = \langle\langle r \Psi_i, t_r \rangle\rangle \quad (17f)$$

$$Y_i = \langle\langle r \Psi_i, t_z \rangle\rangle \quad (17g)$$

식 (17)의 matrices 계산은 Gaussian quadrature를 이용한 수치적분에 의해 구해지며, A_{ij}, B_{ij} 및 C_{ij}에 포함되어 있는 viscosity 함수 η가 속도장의 함수로 주어지므로 식 (14)와 (15)가 비선형방정식이 된다. 이 비선형식의 해법으로는 Picard 반복계산법을 η의 계산에서 사용하였다.

유한요소 수치모사에서 실제로 사용된 mesh의 모양이 Fig. 4에 보여지고 있는데, 초기 mesh[Fig. 4(a), $R/H_o=15$]가 predictor-corrector 방법을 사용하는 알고리듬[10]에 의해 압착되어 형성된 typical mesh가 Fig. 4(b)에 주어져 있다. 항복경계면을 조사하는 데에는 이 Fig. 4(b)의 mesh가 사용되었는데 48개의 elements와 225개의 nodes로 구성되어 있으며 총 변수의 갯수는 515개가 된다.

항복경계면의 조사 방법으로는, Bingham 모델 및 bi-viscosity 모델을 따르는 점소성 유체의 압착유동을 위에서 언급한 mesh에서 수치모사하여 유동장 내의 압력 및 속도성분, deformation rate tensor $\underline{d}$의 각 성분 및 II_d, 그리고 점도함수 η를 구하고, 그로부터 $\underline{\tau}$의 각 성분 및 II_τ을 계산하였다. Bingham 모델을 사용하는 경우에는 그 결과가 yield condition $II_\tau \geqq \tau_o^2$을 유동장 내에서 만족하는지 조사하였고, bi-viscosity 모델을 사용하는 경우에는 식 (7)의 조건이 유동장의 모든 영역에서 만족될 때까지 계속 iteration을 시켰으며 수렴된 뒤에는 $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_c$ 되는 면을 항복경계면으로 간주하였다. 그런데, 실제로 μ_r이 μ_p보다 아주 큰 경우에는 $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_c$ 되는 위치와 $II_\tau = \tau_o^2$되는 위치가 거의 일치함을 쉽게 보일 수 있으며, 따라서, bi-viscosity 모델을 사용하는 경우에도 $II_\tau = \tau_o^2$되는 면을 항복경계면으로 표시하였다. 그러므로, bi-viscosity 모델을 사용한 경우에 정의된 항복경계면은 Bingham 모델을 사용한 경우에 정의된 classical한 항복경계면과 물리적인 의미에서 차이가 있음을 밝혀둔다. 그러나, γ가 0에 가까이 감에 따라 두 항복경계면이 서로 접근해갈 것이라는 것은 쉽게 이해할 수 있다.

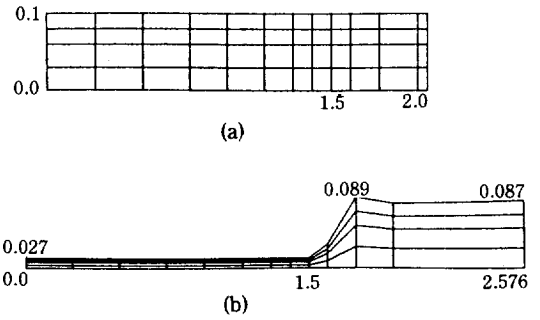


Fig. 4. Finite element meshes used in this study.

4. 결과 및 토의

Bingham 유체의 압착유동을 해석적인 방법으로 연구한 결과들[1-4]에 의하면 유동장 내에 항복경계면이 존재하며, 그 위치를 나타내는 방정식이 유도되어 있다. 이는 압착원판과 최초에 평행을 이루던 유동장 내의 material plane이 유동이 진행되는 중에 계속 평행상태를 유지할 것이라는 parallel squeezing assumption을 도입한 결과이다. 그러나 Bingham 유체와 같이 유변방정식의 점도함수가 power-law 형태가 아닌 경우 평행압착의 가정을 도입할 수 없음이 Brindley 등[11]에 의해 증명되었으며, Lee 등[12]은 점도 차이가 매우 큰 두 뉴톤 유체층이 층층이 채워진 압착유동의 수치모사 연구 결과 평행압착이 일어나지 않음을 보

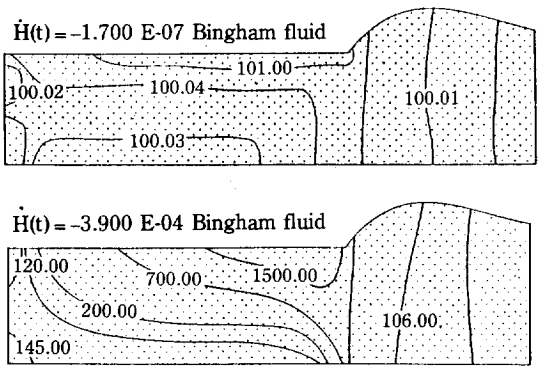


Fig. 5. Contours of stress invariant II_τ when Bingham model fluid is squeezed under different squeezing speed.

였다.

한편, Bingham 유체의 $II_\tau < \tau_o^2$ 조건에서의 유변방정식이 변형없는 고체운동을 나타낸다는 점에 착안해, 평행압착의 가정 위에서 얻어진 속도해가 경계조건 또는 유변방정식에 부합되지 못하며, 그 결과 부분적인 plug 유동영역은 존재치 않고 전 domain에서 유동이 일어나야 한다는 Lipscomb과 Denn[5]의 해석은 설득력이 있다.

유한요소 수치모사를 Bingham 유체(τ_o=10 dyne/cm², μ_p=100 poise)의 압착유동에 대해 수행한 결과 II_τ의 contour plot이 Fig. 5에 주어져 있다. 이 경우, 압착속도를 매우 작게 하여도 유동장 전 영역에서 yield condition인 $II_\tau \geqq \tau_o^2$=100을 만족하고 있는 것을 볼 수 있다. 즉 Lipscomb과 Denn[5]의 주장을 뒷받침해 주는 결과라 하겠다.

한편, Bingham 유체의 근사적 유변방정식인 bi-viscosity 모델을 사용한 수치모사에 의해 항복경계면을 조사하였다. 이 경우 τ_o는 10 dyne/cm², μ_p는 100 poise, 그리고 μ_r은 μ_p의 10^2, 10^3, 10^4배의 값을 갖도록 변화시켜 가면서 계산해 보았다. μ_p의 μ_r에 대한 비를 γ로 표시하였다.

Fig. 6를 보면, 일정한 압착속도와 경계조건 하에서 γ 값을 0.01에서 0.0001로 감소시킨 결과, 변형이 일어나지 않는 unyielded region(Fig. 6에서 밝은 부분)이 점차 사라짐을 알 수 있다. 즉, γ 값이 감소함에 따라 Bingham 모델을 사용하여 얻은 결과와 일치해 가고 있음을 보여주고 있다. 이는 충분히 작은 γ(≦0.01) 값을 갖는 bi-viscosity 모델 유체에 대해서는 항복경계면이 γ 값의 영향을 거의 받지 않는다는 종전

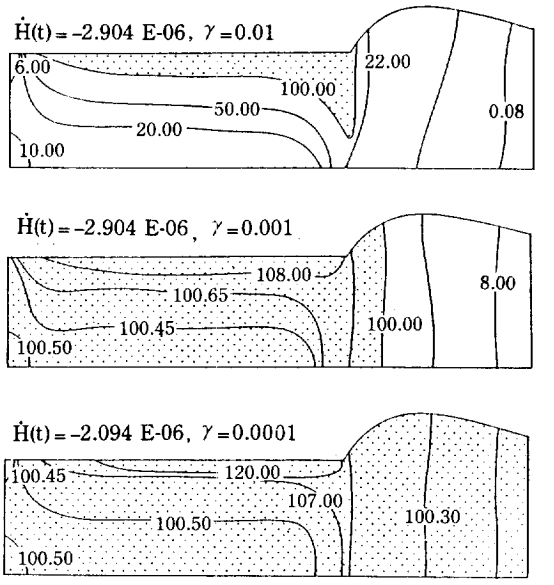


Fig. 6. Contours of stress invariant II_τ for bi-viscosity model, when the squeezing speed is fixed and the value of γ decreases.

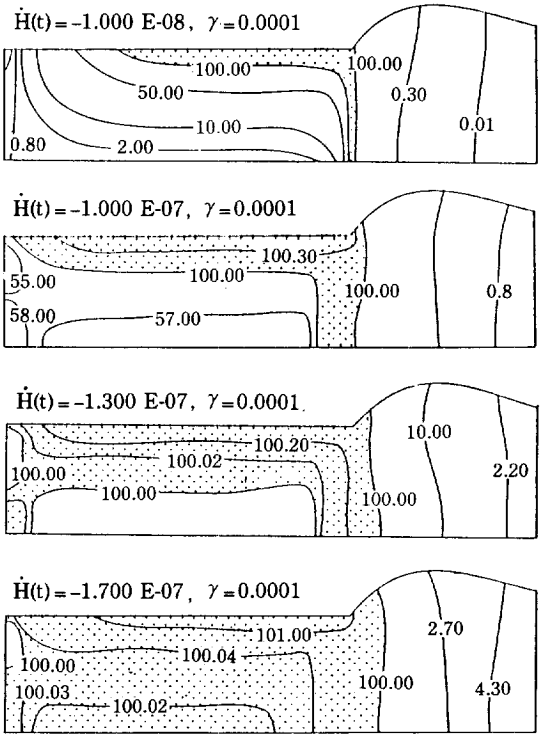


Fig. 7. Contours of stress invariant II_τ for bi-viscosity model, when the squeezing speed changes for the fixed value or γ.

의 연구보고[6, 7]와 상반된 결과이다.

항복경계면의 모양이 변화해 가는 것을 관찰하기 위하여, γ 값은 0.0001로 고정시키고 압착속도를 변화시켜가면서 조사해 보았다. 그 결과, Fig. 7을 보면, 압착속도가 감소해 감에 따라 unyielded region(밝은 부분)이 점차 커져가는 것을 알 수 있는데, 이는 bi-viscosity 모델을 사용하여 압착유동장 내에 존재하는 항복경계면의 모양에 대하여 발표되어 온 종래의 연구결과들이 압착속도 및 γ 값에 민감하게 변하게 된다는 것을 말해주고 있으며, 그러나, γ 값이 아주 작아져서 Bingham 유체에 가까와지면 압착속도에 관계없이 유동장 내에 항복경계면은 존재하지 않게 된다는 것을 결론적으로 얘기할 수 있다.

Fig. 5-7의 contour plot에 나타나 있는 압착유동 domain의 모양은, 실제의 모양[Fig. 4(b)]이 contour plot을 시각적으로 보여주는데 적합치 않기 때문에, schematic하게 표시된 것임을 부연하고, Fig. 6과 7에서 선택된 압착속도의 값은 항복경계면의 변화되는 정도가 가장 분명하게 보일 수 있는 범위에서 정해진 것이다.

5. 결 론

점소성 유체의 압착유동장 내에 항복경계면의 존재여부를 유한요소 수치모사에 의해 조사한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. Bingham 유체모델의 경우 압착유동이 지속되는 한 유동장 내의 모든 영역에서 유동이 일어나게 되므로 항복경계면은 존재하지 않는다.

2. Bingham 모델의 근사모델로 종래에 자주 사용되어 온 bi-viscosity 모델을 사용한 경우에는 γ ($=\mu_p/\mu_r$)값 및 압착속도에 따라 여러가지 모양의 항복경계면이 나타날 수 있음을 알았으며, γ 가 작아짐에 따라 yielded region의 크기가 점차 줄어들고 있는 것으로 보아, Bingham 유체에 가까와짐에 따라 항복경계면도 없어져 갈 것으로 예측된다.

감 사

본 연구가 한국과학재단의 신진연구비에 의해 이루어진데 대하여 감사드립니다.

NOMENCLATURE

$\underline{\underline{d}}$: deformation rate tensor ($=[\nabla\underline{v}+\nabla\underline{v}^T]/2$)
H(t) : half of the film thickness
H_o : initial height of the plate at t=0
$\dot{H}(t)$: velocity of the plate
P : pressure
P_j : nodal value of pressure
r : radial coordinate
R : radius of the plate
t : time
t_r, t_z : components of contact force vector
u_j : nodal value of v_r
v_j : nodal value of v_z
$\underline{v}$: velocity vector
v_r, v_z : components of velocity vector
z : axial coordinate

Greek Letters

γ : ratio μ_p/μ_r
$\dot{\gamma}$: shear rate
$\dot{\gamma}_c$: critical shear rate
η : viscosity function
μ_p : plastic viscosity
μ_r : unyielded viscosity
$\underline{\underline{\tau}}$: extra stress tensor
$\tau_{rr}, \tau_{\theta\theta}, \tau_{zz}, \tau_{rz}$: components of extra stress tensor
τ_o : yield stress
ϕ_j : bilinear interpolation function
Ψ_j : biquadratic interpolation function

Others

II_d : second invariant of $\underline{\underline{d}}$
II_τ : second invariant of $\underline{\underline{\tau}}$

REFERENCES

1. Scott, J.R.: *Trans. Inst. Rubber Ind.*, **7,** 169 (1931).
2. Peek, R.L., Jr.: *J. Rheol.*, **3,** 347 (1932).
3. Scott, J.R.: *Trans. Inst. Rubber Ind.*, **10,** 481 (1935).
4. Covey, G.H. and Stanmore, B.R.: *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **8,** 249 (1981).
5. Lipscomb, G.G. and Denn, M.M.: *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **14,** 337 (1984).
6. Gartling, D.K. and Phan-Thien, N.: *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **14,** 347 (1984).
7. O'Donovan, E.J. and Tanner, R.I.: *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **15,** 75 (1984).
8. Oldroyd, J.G.: *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **43,** 100 (1947).
9. Crochet, M.J., Davies, A.R. and Walters, K.: "Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow", Elsevier Science Publishing Company, Inc., Ams-

terdam (1984).
10. Lee, S.J.: Ph.D. Dissertation, University of Delaware, Newark, Delaware (1982).
11. Brindley, G., Davies, J.M. and Walters, K.: *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **1,** 19 (1976).
12. Lee, S.J., Denn, M.M., Crochet, M.J. and Metzner, A.B.: *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **10,** 3 (1982).