

## 밀면이 가열되는 수평 다공성 매질층에서의 열적 불안정성 해석

윤도영·최창균·유재수

서울대학교 공과대학 화학공학과  
(1988년 3월 28일 접수, 1988년 10월 9일 채택)

### An Analysis of Thermal Instability in a Horizontal Porous Layer Heated from Below

Do Young Yoon, Chang Kyun Choi, and Jae Soo Yoo

Department of Chemical Engineering, College of Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea  
(Received 28 March 1988; accepted 9 October 1988)

#### 요 약

초기 정지상태의 유체로 포화되어 있는 수평 다공성 매질층의 하부면을 일정시간 비율로 등가속 가열을 할 때 자연대류의 유발조건을, 전파이론을 통해 예측하였다. Deep-pool계에 대하여 기본온도는 적분법으로 모사하고, 시간에 따른 교란의 변화를 고려한 전파이론을 통해 새로운 안정성 방정식을 유도하였다. 투과도가 상당히 작은 다공성 매질층에 Prandtl 수가 큰 유체가 포화되어 있는 경우, 자연대류 임계조건을 구하여 아래와 같은 상관식을 도출하였다.

$$\tau_c = 6.55 \gamma^{4/3} Ra^{-2/3}$$

$$a_c = 0.41 \gamma^{-2/3} Ra^{1/3}$$

이를 Kaviany의 실험치들과 비교하여 볼 때, 발생하는 자연대류는  $4\tau_c$ 에 감지될 정도로 증폭되는 것으로 나타났다.

**Abstract**—When an initially quiescent, fluid-saturated horizontal porous layer is heated by ramp-heating the bottom side of the layer at a constant temporal rate, the critical condition of the onset of natural convection is analyzed by employing the propagation theory. For deep-pool systems the base temperature profile is approximated by using the integral method and a new stability equation is generated through the propagation theory which considers the variations of disturbance with time. For infinite Prandtl-number fluids saturated in a porous layer to satisfy Darcy's law, the critical condition is deduced to have the following relation:

$$\tau_c = 6.55 \gamma^{4/3} Ra^{-2/3}$$

$$a_c = 0.41 \gamma^{-2/3} Ra^{1/3}$$

In comparison of the above prediction with the experimental data of Kaviany, it is seen that the initiated convection is amplified to observable magnitude at the time  $4\tau_c$ .

#### 1. 서 론

수평면에 위치한 다공성 매질층내에 정지상태의 유체

가 포화되어 있을 때 하부면을 가열하면 기본온도분포가 비선형구조에서 서서히 선형구조를 보이며 역구배의 온도분포에 의하여 아래층에 위치한 유체가 부피 팽창

을 하게 된다. 이러한 부피 팽창은 유체의 밀도변화로 나타나 부력을 유발시킨다. 가열 초기 유체의 점도에 의한 점성 저항과 열전도도에 의한 열전도로 열을 전달시키는 계의 안정화 요인들은 부력의 크기가 임계값을 넘으면 부력을 발생시키는 불안정화 요인으로 인하여 그 영향이 상대적으로 감소하게 되고, 열전달은 전도에 부가하여 대류의 영향을 받게 된다. 이와같은 현상은 잘 알려져 있는 Rayleigh-Bénard 문제의 일환으로 간주할 수 있다.

다공성 매질내에서의 자연대류는 자연대류에 대한 연구가 시작되었던 균질계에 대한 응용연구분야로서 지열의 이용, 대기의 유동, 지구내부의 대류 등의 지구물리학적 견지에서 뿐만 아니라 건물의 보온, 원자로 폐기물의 저장, 촉매반응기의 열안정성, 충전탑에서의 물질전달 등을 들 수 있다. 이와같이 화학공정상 적용범위가 광범위하여 현재 관련된 연구들이 활발히 전개되고 있다.

다공성 매질에 대한 자연대류의 연구는 Horton과 Rogers[1], Lapwood[2]에 의해 시작되었으며, 특히 Lapwood는 기본온도분포가 전도에 의하여 선형상태를 보여주는 경우, Darcy의 법칙으로 운동방정식을 설정하고 선형안정성 이론을 이용하여 자연대류의 임계조건을 이론적으로 결정하였다. 연구의 적용범위가 넓어짐에 따라, Wooding[3]은 여러가지 경계조건에 대하여 실험법을 사용하여 이론적으로 계를 해석하였고, Elder[4]와 Schneider[5] 등은 실험을 통해 자연대류 현상을 해석하였다. Katto와 Masuoka[6]는 기존의 이론치와 실험치간에 오차가 있음을 발견하고 유체의 다공속도(pore velocity)를 고려한 새로운 에너지방정식을 설정한 결과 어느 정도 이론치와 실험치가 일치하였으며 다공성 매질에서의 에너지방정식의 설정에 새로운 전기를 마련하였다. 관련된 연구는 Combarous와 Bories[7], Cheng[8] 등에 의해 상세히 보고되어 있다.

위와같은 정상상태의 문제와는 달리 실제 문제들은 급격한 가열조건하에 있으므로, 기본온도분포가 비선형 상태에서 자연대류가 감지된다. 이러한 deep-pool계에 대하여 균질계에서 많이 적용되었던 증폭이론(amplification theory)[9], 추계모델(stochastic model)[10], 에너지법(energy method)[11] 등 세 이론들을 다공성 매질계에 적용하여 자연대류 임계조건을 밝히려는 노력들이 전개되어 왔다. 그러나 증폭이론과 추계모델 등과 같은 기존의 방법들은 실험적 검증들 통해 초기조건을 설정해야 하는 임의성과 실험상 많은 난점들

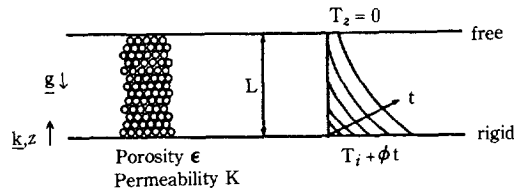


Fig. 1. Schematic diagram of system.

이 있다. 최근 Choi, Shin과 Hwang[12]에 의하여 개발된 전파이론(propagation theory)은 결정론적 방법으로서 다른 이론들이 내포하는 임의성을 배제한다. 균질계에 대하여 Yoo와 Choi[13]는 윗면이 일정시간 비율로 냉각되는 Prandtl 수가 무한히 큰 수평 유체층의 열안정성 문제를 전파이론을 통해 해석한 결과 기존의 실험 자료에 잘 부합됨을 보고하였다. 또한 Choi와 Yoo[14]는 전파이론을 통해 전 Prandtl 수의 영역에 대한 열안정성 해석을 성공적으로 수행하였다.

본 연구에서는 Kaviany[15]가 수행한 실험조건에 대하여, 균질계에서 성공적인 결과를 보여준 전파이론을 통한 안정성 해석으로 다공성 매질계에서 전파이론의 타당성을 검증하고자 한다. 본 연구는 다공성 매질계의 열안정성 조건을 규명하는데 전파이론을 이용한 최초의 해석적인 시도로 생각된다. 본 연구의 결과는 Kaviany가 사용한 증폭이론에 대하여, 선형안정성 이론에 입각한 증폭이론과 전파이론을 비교하는데 좋은 참고자료가 되리라 생각되며, 해석적 방법을 통한 자연대류의 예측은 정밀한 화공장치의 설계에 좋은 자료를 제공할 수 있을 것이다.

## 2. 기본계의 설정 및 해석

수평면에 위치한 다공성 매질층내의 정지된 유체를 아래로부터 가열하면, 온도차가 상당히 작은 초기상태에서는 전도에 의해서만 열이 전달된다. 그러나 온도차가 점차 커지면 자연대류에 의한 유체의 유동이 시작된다.

본 연구에서는 Fig. 1에 도시되어 있는 바와 같이 비압축 뉴턴 유체가 포화되어 있는 수평 다공성 매질층을 기본계로 채택하였다. 그림에 나타나 있는 바와 같이 다공성 매질의 공극율은  $\epsilon$ , 투과도는  $K$ 이다. 윗면이 자유경계면, 밑면이 고정경계면인 매질층의 깊이는  $L$ 이며, 수평면의 길이를 무한대로 가정하여 옆면 효과를 무시하였다. 초기  $T_i$ 로 유지하고 있는 계의 하부면을 일정시간비율  $\phi$ 로 등가속가열(ramp-heating)을 하면 가열초기의 전도에 의한 기본온도분포는 시간 및 위치

에 따른 비선형구조를 가지며 점차 시간이 흐를수록 선형구조를 갖게 된다.

## 2-1. 지배방정식

다공성 매질내에서 유체의 유동과 열전달을 해석하는데 필요한 지배방정식의 설정은 많은 논란의 대상이 되어 왔으나, 다음의 가정을 통해 보다 일반적인 지배방정식을 설정하였다.

1. 계 안의 어느 지점에서나 유체와 매질간에는 열평형을 이루고 있다.
2. 다공성 매질내에서 유체의 속도, 온도, 압력 등은 국부부피평균에 의하여 그 물리량을 정의한다[16].
3. 다공성 매질내의 유체의 유동특성은 Darcy의 법칙에 따른다.
4. 전통적인 Boussinesq 근사를 적용하여 중력장에서 온도변화에 따른 밀도변화만을 고려한다.
5. 밀도변화의 상태방정식은 온도만의 선형 관계식을 갖는다[17].

이상의 가정을 통하여, 연속방정식, Wankat와 Schowalter[18]에 근거한 운동방정식, 그리고 Katto와 Masuoka[6]에 근거한 에너지방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\bar{\nabla} \cdot \underline{U} = 0 \quad (1)$$

$$\rho_f \left( \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U} \cdot \bar{\nabla} \right) \underline{U} = -\bar{\nabla} P - \frac{\mu_f \epsilon}{K} \underline{U} + \mu_f \bar{\nabla}^2 \underline{U} + g \rho_f \quad (2)$$

$$(\rho C)_e \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho C)_f \underline{U} \cdot \bar{\nabla} T = k_e \bar{\nabla}^2 T \quad (3)$$

위의 식에서  $\rho$ 는 밀도,  $(\rho C)$ 는 열용량,  $k$ 는 열전도도,  $\mu$ 는 점도를 나타내며, 하첨자  $f$ ,  $s$ 는 각각 유체, 고체를 의미하고, 유체와 고체간의 효과적인 유효특성은 하첨자  $e$ 로 나타내었다. 이때 유효특성은 다음과 같이 정의한다.

$$k_e = \epsilon k_f + (1 - \epsilon) k_s \quad (4)$$

$$(\rho C)_e = \epsilon (\rho C)_f + (1 - \epsilon) (\rho C)_s \quad (5)$$

한편 밀도변화의 상태방정식은 다음과 같다.

$$\rho_f = \rho_{f0} [1 - \beta_f (T - T_0)] \quad (6)$$

여기서  $\beta$ 는 부피팽창계수이고,  $T_0$ 는 기본온도이며, 이때 유체의 밀도는  $\rho_{f0}$ 이다.

정지된 유체가 자연대류가 발생하는 임계시점  $t_c$ 에 이르르면 선형안정성 이론에 따라 아주 작은 양으로 가정되는 교란량들이 발생하게 된다. 이러한 교란량들은 다음과 같이 기본량과의 합으로 표시된다.

$$P = P_0 + P_1(t, X, Y, Z) \quad (7)$$

$$\underline{U} = \underline{U}_0 + \underline{U}_1(t, X, Y, Z) \quad (8)$$

$$T = T_0 + T_1(t, X, Y, Z) \quad (9)$$

여기서 하첨자 0과 1은 각각 기본량과 교란량을 의미하며, 대류발생 이전의 기본상태에는  $\underline{U}_0 = 0$ 이고,  $T_0$ 은  $\underline{U}_0$ 하에서의 온도장을 나타내므로 초기 전도에 따른 열전달에 의한 온도를 나타내며 전 밀면을 가열하므로 열전도는  $Z$ 방향으로만 이루어진다. 식 (6)을 식 (2)에 결합시켜 가정에 따른 지배 운동방정식을 새로이 설정하고, 식 (7), (8), (9)를 운동, 에너지 지배방정식에 대입하여 2차 이상의 누승항을 소거하고, 운동방정식에 컬(curl)을 두번 취하여 압력항이 소거된 다음과 같은 선형 안정성방정식을 유도한다.

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu_f \bar{\nabla}^2 + \frac{\nu_f \epsilon}{K} \right) \bar{\nabla}^2 W_1 = \beta g \bar{\nabla}_1^2 T_1 \quad (10)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + (\rho C)_f \epsilon (\rho C)^{-1} W_1 \frac{\partial T_0}{\partial Z} = \alpha_e \bar{\nabla}^2 T_1 \quad (11)$$

식 (10)과 (11)에서 속도장은 수평면의 길이를 무한으로 가정하여 옆면효과를 무시하였으므로  $Z$ 방향의 교란  $W_1$ 의 식으로 압축되었다. 여기서  $\nu$ 는 동점도,  $\alpha$ 는 열확산도이며,  $\bar{\nabla}_1^2$ 은  $X$ - $Y$ 에 대한 Laplace 연산자이다. 식 (10)과 (11)에 적용되는 초기조건과 경계조건은 다음과 같다[19].

$$T_1 = 0, W_1 = 0 \quad \text{at } t = 0 \quad (12)$$

$$T_1 = 0, W_1 = \frac{\partial W_1}{\partial Z} = 0 \quad \text{at } Z = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial Z} = 0, W_1 = \frac{\partial W_1}{\partial Z} = 0 \quad \text{at } Z = L \quad (14)$$

사용되는 변수들을 Foster[9] 이후로 사용된 척도인자들을 도입하여 다음과 같이 무차원화시킨다.

$$\begin{aligned} z &= Z/L, \quad \tau = t/(L^2/\alpha_e) \\ \theta_0 &= (T_0 - T_1)/(\phi L^2/\alpha_e), \\ \theta_1 &= T_1/(\nu_f \alpha_e/g \beta_f L^3) \\ w_1 &= W_1/(\alpha_e/L) \end{aligned}$$

## 2-2. 기본온도분포

기본온도는 정지상태의 유체에 대하여 부력의 크기를 증가시키는 주된 역할을 하며 식 (11)로부터 초기 전도에 의한 열흐름 방정식인 다음의 열전도식에 의해서 온도장이 형성된다.

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} \quad (15)$$

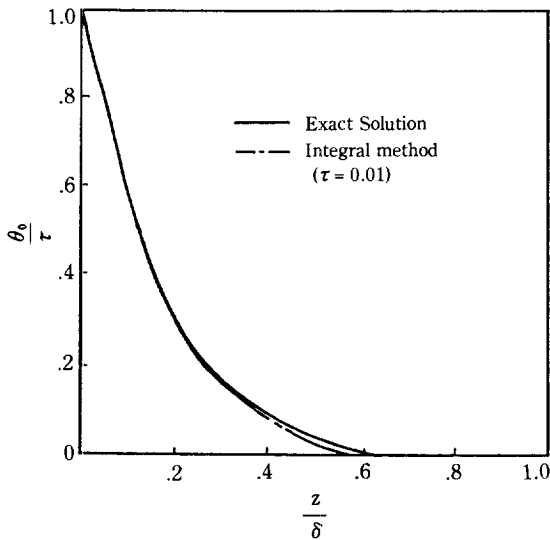


Fig. 2. Base temperature profile for deep-pool system.

$$I. C. : \theta_o = 0 \quad \text{at } \tau = 0 \quad (14a)$$

$$B. C.'s : \theta_o = \tau \quad \text{at } z = 0 \quad (14b)$$

$$\frac{\partial \theta_o}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = 1 \quad (14c)$$

식 (14)의 초기조건 및 경계조건을 만족하는 식 (13)의 해는 여러가지 방법으로 구할 수 있다. 변수분리에 의한 Graetz 해는 다음과 같다.

$$\theta_o = \tau + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{A_n^3} [1 - \exp(-A_n^2 \tau)] \sin(A_n z) \quad (15)$$

$$\text{where } A_n = (n + 1/2) \pi$$

또한 deep-pool계에서 유사변수를 사용한 Leveque 해는 Duhamel 적분정리를 통하여 다음과 같이 표현된다.

$$\theta_o = -\frac{z\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{4\tau}\right) + \left(\tau + \frac{z^2}{2}\right) \operatorname{erfc} \frac{z}{\sqrt{4\tau}} \quad (16)$$

Leveque 해는 Graetz 해와 계산 비교한 결과  $\tau \leq 0.3$ 에서 한정된다. Graetz 해보다 Leveque 해가 훨씬 간단하나 보다 간편한 수학적 처리를 위하여 deep-pool계에 대한 해를 적분법에 의거하여 다음과 같이 채택하였다[13].

$$\theta_o = \tau(1 - z/\delta)^5 \quad \text{for } 0 \leq z \leq \delta \quad (17)$$

$$\theta_o = 0 \quad \text{for } \delta \leq z \leq 1 \quad (18)$$

여기서  $\delta$ 는 가상적인 무차원 열침투깊이로서 열수지에 의하면  $\delta = \sqrt{20\tau}$ 로 결정된다. 적분법에 의한 해는  $\delta \leq 1$ 이므로  $\tau \leq 0.05$ 에 한정되며, 이는 본 연구의

deep-pool계에 적용될 수 있다. Fig. 2에  $\tau = 0.01$ 에서 적분법에 의한 근사해와 엄밀해를 도시하였다. 그림에 보이는 바와 같이 잘 일치하고 있으며,  $\tau$ 가 보다 작아짐에 따라 그 정확도는 높아지므로 본 근사해는  $\tau \leq 0.01$ 인 범위에서 적용이 가능하다.

### 2-3. 교란방정식

자연대류발생 초기상태에서 속도장, 온도장의 지배방정식은 다음과 같이 무차원 물리량  $w_1$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_o$ 의 식으로 표시된다.

$$\left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau} - \nabla^2 + \gamma^2\right) \nabla^2 w_1 = \nabla^2 \theta_1 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + Ra w_1 \frac{\partial \theta_o}{\partial z} = \nabla^2 \theta_1 \quad (20)$$

여기서  $\gamma$ 는 다공성 매질의 형태인자이고,  $Pr$ 과  $Ra$ 는 각각 Prandtl 수, Rayleigh 수로서 이들 세 무차원 변수들은 자연대류에 중요한 영향을 끼치는 주요 인자들이며 다음과 같이 정의된다.

$$\gamma = \sqrt{\frac{\epsilon L^2}{K}}, \quad Pr = \frac{\nu_f}{\alpha_e}$$

$$Ra = \frac{(\rho C)_f}{(\rho C)_e} \epsilon \phi \frac{g \beta L^3}{\nu_f \alpha_e^2}$$

자연대류를 유발시키는 교란들은 시간이 지남에 따라 소멸하거나 성장하게 된다. 밀면을 갑자기 높은 온도로 가열하면 자연대류는 성장하는 교란에 의해서 규칙적인 형태를 갖는다. 소멸하지 않는 교란들이 시간이 변해도 진동하지 않고 대류의 형상이 일정하게 유지된다면 안정성 교란의 원리[20]가 성립된다. 따라서 한계상태(marginal state)에서 안정성 교란의 원리를 가정하면 발생하는 교란들은 무한 평판에서 2차원의 주기적 파동을 보인다. 이와같은 파동은 다음과 같이 x-y에 대한 무차원 파수에 의해 특성지어진다.

$$(w_1, \theta_1) = (w_1^*, \theta_1^*) \exp[i(a_x x + a_y y)] \quad (21)$$

이때 파수  $a$ 는  $(a_x^2 + a_y^2)^{1/2}$ 이고,  $w_1^*$ 와  $\theta_1^*$ 는 시간과 수직거리에 대한 의존성 변수이다. 여기서  $i$ 는 허수이다. 따라서 파수를 도입하면 식 (19)와 (20)은 다음과 같이  $w_1^*$ 와  $\theta_1^*$  식으로 전환된다.

$$\left[\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau} - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2\right) + \gamma^2\right] \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2\right) w_1^* = -a^2 \theta_1^* \quad (22)$$

$$\frac{\partial \theta_1^*}{\partial \tau} + Ra w_1^* \frac{\partial \theta_o}{\partial z} = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2\right) \theta_1^* \quad (23)$$

#### 2-4. 전파이론에 의한 안정성 해석

위치와 시간에 의존하는 교란의 온도장 및 속도장에 의한 비정상 유동은 정상 유동의 경우와는 달리 시간의 존성을 고려해야 한다. 전파이론(propagation theory)에서는 교란의 일률적인 증폭만을 고려하는 것이 아니라, 시간에 따라 증폭 또는 감폭되는 교란의 유동 형태를 고려한다. 따라서 교란의 시간존성을 고려하기 위하여 시간 및 위치에 따른 변화를 동시에 고려할 수 있는 유사변수  $\zeta$ 를 도입하고, 속도교란과 온도교란을 다음과 같이 유사변수의 함수로 전환시킨다.

$$\zeta = g_1(\tau)z \quad (24)$$

$$w^*(\zeta) = g_2(\tau)w_i^* \text{ and } \theta^*(\zeta) = \theta_i^* \quad (25)$$

전파이론의 특징은  $g_1$ 과  $g_2$ 를 열침투깊이  $\delta (= \sqrt{20\tau})$ 로 조정하여 시간존성을 고려하는 교란의 진폭함수를 도입하는 것이다. 이와같은 개념에 따라 식 (24)와 (25)를 식 (22)와 (23)에 대입하면  $g_1$ 과  $g_2$ 는 각각  $1/\delta$ 와  $1/\delta^2$ 으로 조정되고, 식 (22)와 (23)은 상미분방정식의 형태로 상사전환된다. 이때  $\zeta$ 는 열침투깊이  $\delta$ 로 조정된 새로운 길이척도이며, 식 (22)는 다음과 같이 변형된다.

$$-\frac{10}{Pr}(\zeta D^2 - a^{*2}\zeta D + 2a^{*2})w^* = (D^2 - a^{*2})^2 w^* - \gamma^{*2}(D^2 - a^{*2})w^* - a^{*2}\theta^* \quad (26)$$

여기서  $D$ 는  $\zeta$ 에 대한 미분연산자이고,  $a^*$ 와  $\gamma^*$ 는 열침투깊이를 길이척도로 하여 재조정된 값으로 각각  $a\delta$ ,  $\gamma\delta$ 로 주어진다. 또한 식 (23)은 적분법으로 모사된 식 (17)과 (18)의 기본온도분포를 이용하면, 다음과 같은 두 영역에 대한 식으로 전환된다.

$$(D^2 + 10\zeta D - a^{*2})\theta^* = -5Ra^*(1 - \zeta)w^* \quad \text{for } 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (27a)$$

$$(D^2 + 10\zeta D - a^{*2})\theta^* = 0 \quad \text{for } 1 \leq \zeta \leq 1/\delta \quad (27b)$$

여기서  $Ra^*$ 는  $a^*$ 와  $\gamma^*$ 와 유사하게 조정되어  $Ra\delta^3\tau$ 로 주어진다. 조정된 Rayleigh 수, 파수, 형태인자는 교란발생시점에서 시간존성이 미약하므로 [21, 22], 식 (26)과 (27)은 국부유사에 의한 상미분방정식으로 간주한다. 이렇게 변환된 지배방정식에서  $Ra^*$ ,  $a^*$ ,  $\gamma^*$  등을 상수로 취급하는 것이 전파이론의 핵심이다.

식 (26)에 의하면 형태인자  $\gamma$ 가 작을 경우, 관성항과 점성항의 상호 영향이 Prandtl 수에 의하여 나타나게 된다. Prandtl 수가 크면 점성항이, Prandtl 수가 작으면 관성항이 유체의 유동상태에 미치는 영향이 지

대함을 알 수 있다. 그러나  $\gamma$ 가 큰 경우, Prandtl 수가 크면 Darcy의 저항항이 유체의 유동상태를 좌우하며, Prandtl 수가 작으면 관성항과 Darcy의 저항항이 상호 영향을 끼쳐  $Pr\gamma^2$ 이 유체의 유동에 중요한 변수로 작용할 것으로 생각된다. 본 연구에서는 Prandtl 수가 큰 유체에 대하여  $\gamma$ 가 큰 경우에 국한하여 유체의 열안정성 조건을 전파이론을 통해 해석하고자 한다. 형태인자는 이미 정의한 바와 같이 투과도에 의해서 그 크기가 결정된다. 투과도는 Carman-Kozeny [23]에 의한 다음과 같은 일반적인 실험식이 적용된다면 공극율이 작고, 매질의 반경이 작을수록 투과도는 작아지고 이에 따라 형태인자는 커지게 된다.

$$K = \frac{\epsilon^3}{150(1 - \epsilon)^2} d^2 \quad (28)$$

따라서 다공성 매질의 투과도가 작은 경우, 즉 형태인자가 상당히 크면 ( $\gamma \rightarrow \infty$ ), 식 (26)은 각 항의 크기비교로부터 다음과 같은 형태로 축소된다.

$$a^{*2}\theta^* = -\gamma^{*2}(D^2 - a^{*2})w^* \quad (29)$$

식 (26)에 비하여 식 (29)는 차수가 4차에서 2차인 미분방정식의 형태로 줄어 들어 경계조건의 재조정이 필요하게 되었다. 그런데 식 (29)의 원형은 Darcy의 법칙에 의한 운동방정식이므로 no-slip 경계조건을 사용할 수 없다.

#### 2-5. 안정성 방정식의 해법

전파이론을 통해 도출된 식 (29)에서 온도교란항을 식 (27)에 대입하여 식 (27)과 (29)를 결합시키고 온도교란의 경계조건을 속도교란의 경계조건으로 전환시킨다. 결합된 지배방정식과 이에 따른 경계조건은 다음과 같다.

$$(D^2 + 10\zeta D - a^{*2})(D^2 - a^{*2})w^* - 5a^{*2}\frac{Ra^*}{\gamma^{*2}}(1 - \zeta)w^* = 0 \quad \text{for } 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (30a)$$

$$(D^2 + 10\zeta D - a^{*2})(D^2 - a^{*2})w^* = 0 \quad \text{for } 1 \leq \zeta \leq 1/\delta \quad (30b)$$

$$B.C.'s : w^* = (D^2 - a^{*2})w^* = 0 \quad \text{at } \zeta = 0 \quad (31)$$

$$w^* = D(D^2 - a^{*2})w^* = 0 \quad \text{at } \zeta = 1/\delta \quad (32)$$

식 (30a)와 (30b)에 나타나 있는 바와 같이 전환된 안정성 방정식은  $\zeta$ 의 영역에 따라 식이 나누어져 있다. 이때  $\zeta = 1$ 은 임의시점의 최대 열침투깊이에 해당되며, 본 연구의 deep-pool계에서  $1/\delta$ 는 무한대에 해당된

다. 이후 임의시점에서 최대 열침투깊이를 열경계층이라 칭한다.

열경계층 내부 ( $\xi \leq 1$ )에서는 지배식인 식 (30a)에 대하여 속도교란의 식을 Sparrow 등[24]이 제안한 다음과 같은 급격히 수렴하는 먹급수의 형태로 정의한다.

$$w^* = \sum_{i=0}^3 H_i f_i(\xi) \quad (33a)$$

$$f_i(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)} \xi^n \quad (33b)$$

여기서  $H_i (i=0, 1, 2, 3)$ 는 4차 미분방정식에 필요한 임의의 계수이고,  $b_n^{(i)}$ 는 식 (33)을 식 (30a)에 대입하여 결정한다. 결정된  $b_n^{(i)}$ 는 반복적인 형태를 갖는 급수의 계수로서 다음과 같다.

$$b_n^{(i)} = \frac{(n-4)!}{n!} [2(a^* - 5n + 20)(n-2)(n-3)b_{n-2}^{(i)} + \{10(n-4) - a^* + 5\frac{Ra^*}{\gamma^{*2}}\}a^*b_{n-4}^{(i)} - 5a^*\frac{Ra^*}{\gamma^{*2}}(4b_{n-5}^{(i)} - 6b_{n-6}^{(i)} - 4b_{n-7}^{(i)} + b_{n-8}^{(i)})] \quad (34a)$$

$$b_n^{(i)} = \delta_{ni} (n=0, 1, 2, 3) : \text{Kronecker delta} \quad (34b)$$

$$b_{-1}^{(i)} = b_{-2}^{(i)} = b_{-3}^{(i)} = b_{-4}^{(i)} = 0 \quad (34c)$$

식 (34)와 같은 형태를 갖는 식 (33)의 해에 식 (31)의 경계조건을 적용하면 식 (33a)는 다음과 같게 된다.

$$w^* = H_1 f_1(\xi) + H_3 f_3(\xi) \quad (35)$$

열경계층 외부 ( $\xi \geq 1$ )에서는 식 (30b)가 식 (30a)에 비해 간단한 형태로 설정되므로 열경계층 내부와는 다른 해법을 구사한다. 우선 새로운 변수  $Y$ 를 다음과 같이 도입하여 간편한 해로 유도한다.

$$Y = (D^2 - a^*)w^* \quad (36)$$

식 (30b)는 식 (36)으로부터 다음과 같이 간단히 된다.

$$(D^2 + 10\xi D - a^*)Y = 0 \quad (37)$$

따라서 식 (37)과 같은 형태에 많이 적용되는 WKB 방법[25]으로  $Y$ 의 근사해를 구하고, 다시 식 (32)의 경계조건을 적용하면  $Y$ 는 다음과 같다.

$$Y = \frac{1}{4\sqrt{25\xi^2 + 5 + a^*}} \exp\left(-\frac{5}{2}\xi^2 - \int_1^\xi \sqrt{25\eta^2 + 5 + a^*} d\eta\right) \quad (38)$$

$\xi \geq 1$ 인 범위의 해를 구해야 하므로 전산기의 수렴성을 고려하여  $\xi$ 를 다음과 같이  $s$ 로 전환시킨다.

$$s = \xi - 1 \quad (39)$$

$w^*$ 의 특별해를 구하기 위하여  $Y$ 를 다음과 같은 두가지 형태로 먹급수를 정의한다.

$$Y(s+1) = e^{a^*s} \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n \text{ or } e^{-a^*s} \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n \quad (40)$$

이때  $p_n$ 과  $q_n$ 은 두가지 형태의 식 (40)을 식 (37)에 각각 따로 대입하여 결정한다. 결정된  $p_n$ 과  $q_n$ 은 다음과 같다.

$$p_n = -\frac{(n-2)!}{n!} [(2a^* + 10)(n-1)p_{n-1} + 10(n-2+a^*)p_{n-2} + 10a^*p_{n-3}] \quad (41a)$$

$$p_2 = -\frac{1}{2} [(2a^* + 10)p_1 + 10a^*p_0] \quad (41b)$$

$$p_1 = Y'(1) - a^*Y(1) \quad (41c)$$

$$p_0 = Y(1) \quad (41d)$$

$$q_n = -\frac{(n-2)!}{n!} [(10-2a^*)(n-1)q_{n-1} + 10(n-2-a^*)q_{n-2} - 10a^*q_{n-3}] \quad (42a)$$

$$q_2 = -\frac{1}{2} [(10-2a^*)q_1 - 10a^*q_0] \quad (42b)$$

$$q_1 = Y'(1) + a^*Y(1) \quad (42c)$$

$$q_0 = Y(1) \quad (42d)$$

식 (41)과 (42)와 같이 두가지 계수를 갖는  $Y$ 의 급수 해에 대하여 연산자 기법을 통하여  $w^*$ 의 특별해를 구하면 다음과 같다.

$$w^* = \frac{1}{2a^*} (e^{a^*s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{n+1} s^{n+1} - e^{-a^*s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{n+1} s^{n+1}) \quad (43)$$

식 (43)과 같은  $w^*$ 의 특별해와 일반해를 결합하여 다음과 같은 해를 유도한다.

$$w^* = H_4 e^{-a^*s} + H_5 e^{a^*s} + \frac{H_6}{2a^*} (e^{a^*s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{n+1} s^{n+1} - e^{-a^*s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{n+1} s^{n+1}) \quad (44)$$

다시 식 (44)에 경계조건인 식 (32)를 적용하면 속도교란은 다음과 같은 해를 갖는다.

$$w^* = H_4 e^{-a^*s} + \frac{H_5}{2a^*} (e^{a^*s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{n+1} s^{n+1} - e^{-a^*s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{n+1} s^{n+1}) \quad (45)$$

이상과 같이 열경계층 내부와 외부에서 각각 구한 속도교란의 해인 식 (35)와 (45)를 열경계층, 즉  $\xi = 1$ 에서 서로 결합시킨다. 이때 물리적으로는 열경계층에서 속도, 응력, 온도 등이 일정한 값을 가지며, 수학적

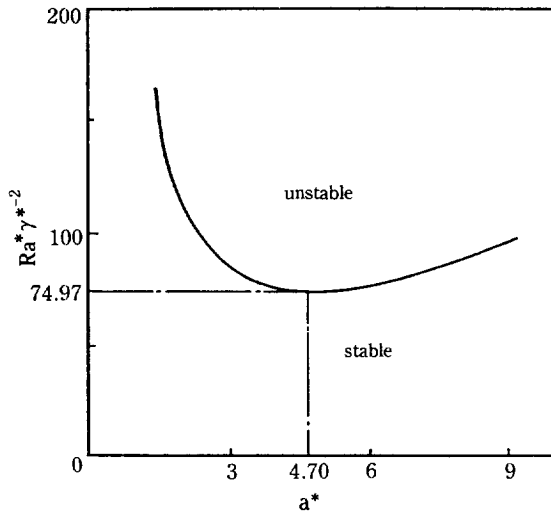


Fig. 3. Marginal stability curve for deep-pool system.

으로는 속도교란의 식이 해석적인 함수임을 의미한다.

$$w_{inner}^* = w_{outer}^* \quad \text{at } \zeta=1 \quad (46a)$$

$$D^n w_{inner}^* = D^n w_{outer}^* \quad (n=1,2,3) \quad \text{at } \zeta=1 \quad (46b)$$

식 (46)의 관계는 다음과 같은 행렬의 식으로 표시된다.

$$\begin{bmatrix} f_1(1) & f_3(1) & 1 & 0 \\ f_1'(1) & f_3'(1) & -a^* & 0 \\ f_1''(1) & f_3''(1) & a^{*3} & Y(1) \\ f_1'''(1) & f_3'''(1) & -a^{*3} & Y'(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_6 \end{bmatrix} = 0 \quad (47)$$

식 (47)에서  $H_1, H_3, H_4, H_6$ 이 의미있는 값을 갖기 위하여  $4 \times 4$  행렬식(determinant)의 값이 0이 되어야 한다. 행렬식의 값은  $a^*$ 와  $Ra^*/\gamma^{*2}$ 의 두 변수에 의해 결정되므로  $a^*$ 를 고정시키고 행렬식의 값을 0으로 하는  $Ra^*/\gamma^{*2}$ 를 계산하는 전산모사를 수행하였다.

### 3. 결과 및 검토

앞의 절차에 따라 본 연구에서는 deep-pool제에서, 투과도가 무척 작은 다공성 매질내에 Prandtl 수가 큰 비압축성 뉴턴 유체가 포화되어 있는 계에 대한 자연대류의 임계조건을 구하였다. 이를 도시하면 Fig. 3과 같다. 그림에 보이는 곡선은 진동이 없는 일정한 형태의 자연대류 유동이 개시되는 한계상태(marginal state)조건이다. 곡선 밑의 영역에서는 대류 유동이 없이 전도에 의해서만 열전달이 이루어지는 안정한 상태(stable state)이며, 곡선의 윗부분으로 갈수록 점차 심한 유동

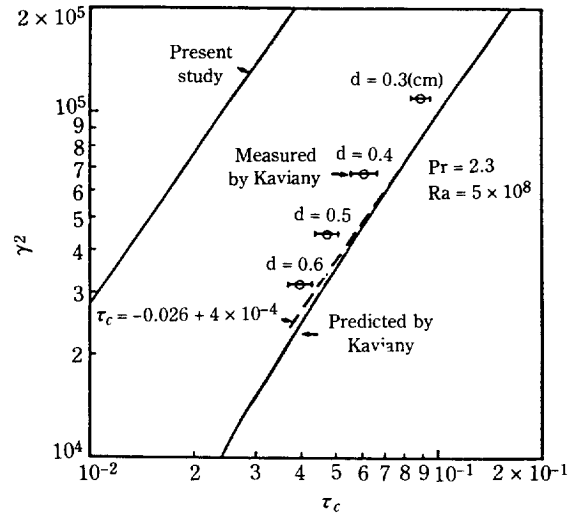


Fig. 4. Comparison of present study with experimental data of Kaviany.

을 갖는 불안정한 상태(unstable state)가 된다. 이때 최초 자연대류 발생지점은 한계안정성 곡선상의 최소  $Ra^*/\gamma^{*2}$ 에서 결정되며, 최소  $Ra^*/\gamma^{*2}$ 에 해당하는  $a^*$ 와 함께 자연대류 임계조건이 다음과 같이 결정되었다.

$$(Ra^*/\gamma^{*2})_c = 74.97 \quad (48a)$$

$$a_c^* = 4.70 \quad (48b)$$

$Ra^*, a^*, \gamma^*$  등은  $Ra\delta^3\tau, a\delta, \gamma\delta$ 과 같이 열침투 깊이  $\delta$ 로 조정된 Rayleigh 수, 파수, 형태인자이다. 따라서 시간이  $\delta(=\sqrt{20\tau})$ 에 의하여 환산되면 자연대류 임계조건이 주어진 Rayleigh 수에 대하여 다음과 같이 변형된다.

$$\tau_c = 6.55 \gamma^{4/3} Ra^{-2/3} \quad (49a)$$

$$a_c = 0.41 \gamma^{-1/3} Ra^{1/3} \quad (49b)$$

즉 주어진 Rayleigh 수에 대하여 자연대류의 임계지점과 자연대류의 셀의 크기를 알 수 있는 파수가 결정된다.

본 연구에서 이론적으로 예측한 자연대류 임계조건과 동일한 계에 대한 Kaviany[15]의 실험자료를 Fig. 4에 비교하였다. Kaviany의 실험결과는 유리로 제작된 직경이 0.3-0.6 cm인 고체구조 다공성 매질을 설정하여 실험적으로 공극율이 0.4인 것으로 보고되어 있다. 이때 투과도는 Carman-Kozeny에 의한 실험식인 식 (28)에 의하면  $1.07 \times 10^{-4}$ - $2.7 \times 10^{-4} \text{ cm}^2$ 으로 계산된다. Katto와 Masuoka[6]에 의하면  $K/L^2$ 이  $10^{-6}$ - $10^{-3}$ 인 범위에 속하면 유체의 유동이 Darcy의 법칙에

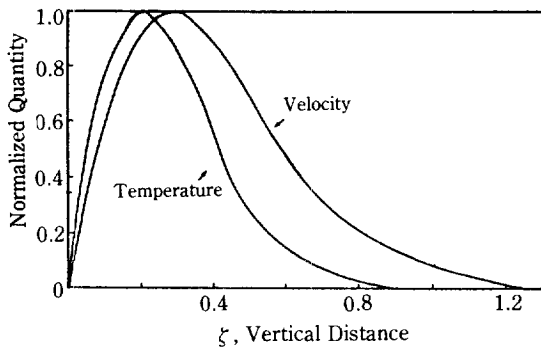


Fig. 5. Distribution of normalized amplitude functions for  $\tau < 0.01$ .

지배를 받으며, 이 경우  $Ra/\gamma^2$ 는 Darcy-Rayleigh 수인  $Ra_0$ 로 정의된다. Kaviany의 실험자료는 환산하여 보면  $K/L^2$ 이  $2.31 \times 10^{-6}$ ~ $5.20 \times 10^{-5}$ 의 범위에 있으므로 Katto와 Masuoka의 조건상 유체의 유동은 Darcy의 법칙에 지배를 받는 조건임을 알 수 있다. 따라서 Kaviany의 실험조건은 본 연구에서 가정한 투과도가 작은 경우와 부합된다고 볼 수 있다. 또한 Kaviany가 사용한 유체는 Prandtl 수가 7.0인 물이므로, 밀도가  $2700 \text{ Kg m}^{-3}$ , 비열이  $840 \text{ J Kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , 열전도도가  $0.78 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ 인 고체 유리구를 고려하면 유효 Prandtl수는 Fig. 4에 나타낸 바와 같이  $Pr=2.3$ 이 된다. 한편 deep-pool제로 가정한 본 연구의 임계시점의 영역은 Kaviany의 실험결과  $3.690 \times 10^{-6} \leq \tau_c \leq 9.426 \times 10^{-6}$ 이므로 무차원 열침투깊이가  $8.591 \times 10^{-3} \leq \delta \leq 1.373 \times 10^{-3}$ 으로 환산됨을 고려하면, 식 (17)과 (18)의 적용타당성을 암시해 준다. Fig. 4에서 Kaviany는 증폭이론을 사용하여 자연대류의 임계시점을 이론적으로 예측을 하였다. 증폭이론에서는  $t=0$ 에서 임의의 초기조건들을 설정하고, 초기속도교란의 크기를 가정하여, 이중 가장 빠르게 증폭율이 1000배에 도달했을 때를 자연대류가 감지되는 것으로 임계조건을 설정한다. 따라서 초기교란의 설정 및 증폭율의 결정에 임의성을 수반한다. Kaviany는 증폭이론에, 본 연구는 같은 계에 대하여 전파이론에 근거하였으므로 Fig. 4는 공히 선형안정성 이론에 근거한 증폭이론과 전파이론을 비교할 수 있는 좋은 자료라 할 수 있다. Kaviany의 예측이 본 연구의 결과보다 실험치에 접근해 있으나 실험치보다는 자연대류 임계시점이 늦게 나타나 있다. 그러나 전파이론에 의한 본 연구의 결과는 Fig. 4에서와 같이 실험치보다는 빠르게 자연대류 임계시점을 지정해 준다. 이는 선형안정성 이론에 따라 교란의 크기를 무한소로 가정했으므로 무한소의 교란이 실

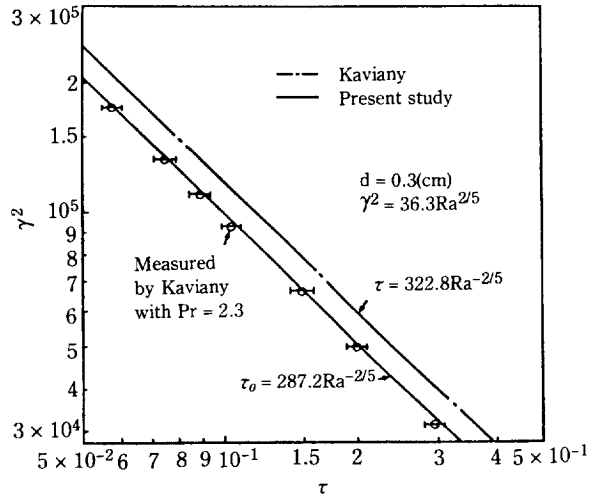


Fig. 6. Variation of magnitude of onset time.

험장치에 의해 감지되려면 교란이 어느 정도 성장해야 할 것이므로, 선형안정성 이론에 근거한 예측치는 실험치보다 빨리 나타나는 것은 합리적일 것으로 고려된다. 물과 같이 Prandtl 수가 큰 유체는 열전달 능력보다는 운동량 전달능력이 상대적으로 크므로 교란의 특성은 본 연구에서 채택한 유체 ( $Pr > 1$ )의 경우에 해당되는 결과인 Fig. 5와 유사할 것으로 고려된다. Fig. 5에 본 연구에서 구한 임계점에서 교란의 분포를 도시하였다. 온도교란, 속도교란의 각기 최대값으로 규격화한 것으로 온도교란이 속도교란에 비해 빠르게 최대치에 도달함을 알 수 있다. 온도교란은  $\zeta=0.20$ 에서, 속도교란은  $\zeta=0.28$ 에서 각각 최대값을 보인 후, 속도교란에 비해 온도교란이 빠르게 감소하여  $\zeta=1$ , 즉 열침투경계 근처에서는 그 양이 거의 무시할 수 있을 정도가 된다. Fig. 5의 결과는 Prandtl 수가 큰 유체로 국한시킨 본 연구의 가정과 부합하며, 균질계에서 Davis와 Choi[22]가 물, 실리콘오일과 같이 Prandtl 수가 큰 유체에 대하여 자연대류 발생 순간에 열교란이 열침투 깊이내에 한정된다고 발표한 이론과도 부합되는 결과로서 비균질계와 균질계의 유사성이 나타난다.

최초 무한소의 교란은 가열에 따른 잠재력이 축적되어 점차 성장하여 명백한 대류 형태로 가시화된다. 균질계에서 Choi 등[26]은 전파이론을 통해 도출한 자연대류의 임계시점에서 발생한 무한소의 최초 교란이  $4\tau_c$ 에 이르러 유한한 크기를 갖고 명백한 대류현상을 보일 것으로 제시하였다. 지배방정식의 유사성에 비추어 비균질계인 본 연구에 자연대류 임계시점을  $4\tau_c$ 로 가정한 가시대류 임계조건을 Fig. 6에 도시하였다.



Fig. 6은 직경이 0.3 cm 고체구에 대하여 Rayleigh 수를 변화시킨 Kaviany[15]의 실험결과인데, Kaviany와 마찬가지로  $\gamma^2 = 36.3 Ra^{2/5}$ 로 하여 자연대류 임계시점을  $\tau_c$ 에서  $4\tau_c$ 로 연장한 본 연구의 결과는 다음과 같다.

$$\tau_o = 287.2 Ra^{-2/5} \quad (50)$$

여기서  $\tau_o$ 는 가시대류(manifest convection)시점을 나타낸다. 균질계와 유사하게 비균질계에서도 전파이론에 의한 자연대류 임계시점은 가시화를 위한 교란의 성장을 고려하여  $4\tau_c$  이후로 늦추었을 때 자연스럽게 실험치와 매우 근접해 있음을 알 수 있었다.

본 연구와 같이  $\gamma$ 가 무한히 크면  $Ra/\gamma^2$ 이 수정된 Rayleigh 수인 Darcy-Rayleigh 수로의 사용이 가능하며,  $\gamma$ 가 작아지면 투과도는 커지는 결과이므로  $\gamma \rightarrow 0$ 이면 다공성 매질이 없는 균질계로 계가 전환된다. 즉  $\gamma$ 의 영역에 따라 유체의 유동은 구분지어 진다. 투과도가 커지면 Darcy의 법칙은 더 이상 유효하지 못하며 이때는 본 연구에서 Prandtl 수만을 무한으로 가정했을 경우와 유사한 Brinkman의 모델[27]이 적용됨이 알려져 있다. 또한 Rayleigh 수가 무척 큰 경우, 즉 외력이 커졌을 때는 관성의 영향으로 인하여 유동의 형태는 non-Darcy 유동으로 전환된다. Non-Darcy 영역에 대하여는 운동의 지배방정식은 Forchheimer[28]의 모델의 적용이 일반적이다. 이와같이 다공성 매질의 형태에 따라 지배방정식이 다를 뿐만 아니라, 포화되어 있는 유체 및 외력의 영향 등을 검토하면 지배방정식이 새로이 설정되어야 하므로 앞으로 본 연구에서 Darcy의 법칙에 지배를 받는 계에 대하여 전파이론을 통해 구축한 안정성 해석방법을 토대로 보다 넓게 연구의 폭을 확장시켜야 함이 과제로 남는다.

#### 4. 결 론

정지상태의 유체로 포화되어 있고, 밀면과 윗면이 각각 고정, 자유경계면인 수평 다공성 매질층의 밀면을 일정한간비율로 가열할 때 유발되는 자연대류 발생에 대하여 이론적으로 해석하였다. Prandtl 수가 큰 유체가 투과도가 매우 작은 다공성 매질내에 포화되어 있는 경우 유체의 유동은 Darcy의 법칙에 의존하였다. 시간에 따른 교란의 변화를 고려하는 전파이론을 적용하여 새로운 안정성 방정식을 유도하였다. Deep-pool 조건과, Darcy의 법칙에 따르는 다공성 매질계에 대한 안정성 해석을 한 결과, 아래와 같은 자연대류 임계조건

이 도출되었다.

$$\tau_c = 6.55 \gamma^{4/3} Ra^{-2/3}$$

$$a_c = 0.41 \gamma^{-2/3} Ra^{1/3}$$

실험적으로 감지되는 가시화 대류시간은  $4\tau_c$  근처인 것으로 보여지며, 이는 임계시점에서 발생한 교란이 성장되어 실험적으로 감지될 때까지 소요되는 시간인 것으로 보인다. 이러한 이론적인 결과들은 기존의 Kaviany의 실험결과에 잘 일치함을 알 수 있었다.

#### 감 사

본 연구를 후원한 한국과학재단에 감사드립니다.

#### NOMENCLATURE

a	: dimensionless wave number
a*	: modified wave number, $a\delta$
C	: specific heat capacity [ $J Kg^{-1} K^{-1}$ ]
D	: differential operator with respect to $\zeta$
d	: diameter of sphere(porous medium) [m]
g	: gravitational constant [ $ms^{-2}$ ]
i	: imaginary number, $\sqrt{-1}$
K	: permeability [ $m^2$ ]
k	: thermal conductivity [ $Wm^{-1} K^{-1}$ ]
L	: depth of the porous layer [m]
P	: pressure [ $Nm^{-2}$ ]
Pr	: Prandtl number, $\nu_f/\alpha_e$
Ra	: Rayleigh number, $(\rho C)_f(\rho C)_e^{-1} \epsilon \phi g \beta_f L^3 \nu_f^{-1} \alpha_e^{-2}$
Ra <sub>D</sub>	: Darcy-Rayleigh number, $(\rho C)_f(\rho C)_e^{-1} \phi g \beta L^3 K \nu_f^{-1} \alpha_e^{-2}$
Ra*	: modified Rayleigh number, $Ra \delta^3 \tau$
T	: temperature [K]
t	: time [s]
<u>U</u>	: velocity vector
U,V,W	: components of velocity [ $ms^{-1}$ ]
u,v,w	: components of dimensionless velocity
X,Y,Z	: space coordinates [m]
x,y,z	: dimensionless space coordinates

#### Greek Letters

$\alpha$	: thermal diffusivity [ $m^2 s^{-1}$ ]
$\beta$	: coefficient of thermal expansion [ $K^{-1}$ ]
$\gamma$	: porous medium shape parameter, $(\epsilon L^2/K)^{1/2}$
$\delta$	: thermal penetration depth
$\epsilon$	: porosity
$\zeta$	: similarity variable, $z/\delta$
$\theta$	: perturbation component of temperature

$\mu$	: dynamic viscosity [ $\text{Kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ ]
$\nu$	: kinematic viscosity [ $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ]
$\rho$	: density [ $\text{Kgm}^{-3}$ ]
$\tau$	: dimensionless time
$\phi$	: temporal rate of heating [ $\text{Ks}^{-1}$ ]

### Subscripts

c	: critical value
e	: effective property, $A_e = \epsilon A_f + (1 - \epsilon) A_s$
f	: fluid phase
o	: observable magnitude
s	: solid phase
0	: base state
1	: perturbed state

### Superscript

*	: magnitude of time- and z-dependent perturbations
---	--

### REFERENCES

- Horton, C.W. and Rogers, F.T.: *J. Appl. Phys.*, **16**, 367 (1945).
- Lapwood, E.R.: *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **44**, 508 (1948).
- Wooding, R.A.: *J. Fluid Mech.*, **3**, 582 (1958).
- Elder, J.W.: *J. Fluid Mech.*, **27**, 609 (1967).
- Schneider, K.J.: 11th Int. Cong. of Refrig., Munich, pap. no. 11-4 (1963).
- Katto, Y. and Masuoka, T.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **10**, 297 (1967).
- Combarnous, M.A. and Bories, S.A.: *Adv. Hydroscience*, **10**, 231 (1975).
- Cheng, P.: *Adv. Heat Transfer*, **14**, 1 (1978).
- Foster, T.D.: *Phys. Fluids*, **8**, 1249 (1965).
- Jhaveri, B.S. and Homsy, G.M.: *J. Fluid Mech.*, **114**, 251 (1982).
- Wankat, P.C. and Homsy, G.M.: *Phys. Fluids*, **20**, 1200 (1977).
- Choi, C.K., Shin, C.B., and Hwang, S.T.: Proc. 8th Int. Heat Transfer Conf. (San Francisco), **3**, 1389 (1986).
- Yoo, J.S. and Choi, C.K.: *Korean J. Chem. Eng.*, **4**, 128 (1987).
- Choi, C.K. and Yoo, J.S.: Heat Transfer: Korea-U.S. Seminar on Thermal Engineering and High Technology, Springer-Verlag, Berlin, 1 (1988).
- Kaviany, M.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **27**, 2101 (1984).
- Slattery, J.C.: Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua, McGraw-Hill, New York, 402 (1972).
- Straus, J.M. and Schubert, G.: *J. Geophys. Res.*, **82**, 325 (1975).
- Wankat, P.C. and Schowalter, W.R.: *Phys. Fluids*, **13**, 2418 (1970).
- Chandrasekhar, S.: Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford University Press, London, 21 (1961).
- Davis, S.H.: *Proc. Roy. Soc.*, **A310**, 341 (1969).
- Chen, K. and Chen, M.M.: *J. Heat Transfer*, **106**, 284 (1984).
- Davis, E.J. and Choi, C.K.: *J. Fluid Mech.*, **81**, 565 (1977).
- Ergun, S.: *Chemical Engineering Progress*, **48**, 89 (1952).
- Sparrow, E.M., Goldstein, R.J., and Jonsson, V.K.: *J. Fluid Mech.*, **18**, 513 (1964).
- Mathew, J. and Walker, R.L.: Mathematical Methods of Physics, Benjamin, California, 27 (1973).
- Choi, C.K., Lee, J.D., Hwang, S.T., and Yoo, J.S.: Proc. Int. Conf. on Fluid Mech. (Beijing), 1193 (1987).
- Brinkman, H.C.: *Appl. Sci. Res.*, **A1**, 27 (1947).
- Forchheimer, P.H.: *Z. Ver. Dtsch. Ing.*, **45**, 1782 (1901).