

## 동시 수렴법을 이용한 정상상태 이득의 효율적인 계산

고재욱\*·윤인섭

서울대학교 공과대학 화학공학과

\*광운대학교 공과대학 화학공학과

(1988년 8월 2일 접수, 1989년 1월 6일 채택)

### Efficient Calculation of Steady State Gain Using Simultaneous Solution Method

Jae Wook Ko\* and En Sup Yoon

Department of Chemical Engineering, College of Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea

\*Department of Chemical Engineering, College of Engineering, Kwang Woon University, Seoul 139-701, Korea

(Received 2 August 1988; accepted 6 January 1989)

#### 요 약

동시 수렴법(simultaneous solution method)에 의한 공정모사를 이용하여 공정제어 구조 합성의 핵심적인 수치인 정상상태 이득을 합리적으로 구하는 방법을 제시하였다. 공정 설계조건을 만족하는 해를 구한 후, 해를 구하는 과정에서 계산된 역 Jacobian 행렬의 부분 행렬로부터 정확한 정상상태 이득을 구할 수 있었으며, 이를 이용한 방법이 많은 반복 계산을 통하여 정상상태 이득을 구하는 기존의 단계적 계산방법보다 효율적임을 알 수 있었다.

단단한 이성분계 증류탑에 이 방법을 적용하여 유용성을 알아보았으며 탑상농도와 탑저농도에 따른 가능한 제어 구조를 조사하였다.

**Abstract**—A powerful technique using the simultaneous solution method is proposed to calculate the steady state gain which is quite essential to the synthesis of process control structure. After calculation of the solution of variables in process design, the steady state gain can be calculated accurately from the partial matrix of the inverse Jacobian matrix which is available for the solution. This technique is more efficient than the technique employing the conventional sequential modular approach which requires repetitive calculations to obtain the steady state gain.

This method was applied to a typical binary distillation column to illustrate its usefulness in finding the feasible control structures for the top and bottom concentration control.

#### 1. 서 론

에너지 가격 변동, 원료 가격 상승, 상호 경쟁, 안정성(stability) 및 공해방지 등의 이유로 새로운 공정 및 개선되고 있는 공정은 서로 얽히고 재순환이 증가하여 복잡하게 되어가고 있다. 이로 인해 각 장치들 사이에 서로 영향을 미칠 뿐 아니라 변수들 사이에서도 상

호작용(interaction)이 심하게 나타나고 있으며, 기존 방식으로 설계된 공정의 구조가 제어 측면에서 불안정하거나 제어자체를 할 수 없는 경우도 발생하게 된다. 또한 제어목적이 단순히 안전성(safety)과 경제성의 추구로부터 보다 복합적으로 공정 시스템의 flexibility, reliability 및 operability 등이 추가되어 다목적성을 띠게 되었다. 따라서 제어 시스템의 설계자

의 경험이나 직관에 의해서는 제어 시스템의 설계가 어렵게 되었으며 보다 효율적이고 체계적인 설계기법이 요구되고 있다[1, 2].

현재 사용되는 화학공정에 관한 대부분의 제어이론은 제어변수와 조작변수, 그리고 이들의 제어 구조가 결정된 상태에서 제어 loop의 안정성, 제어기 매개변수의 tuning 등을 고려하는 것이 일반적이며 작은 범위의 제어 시스템 설계라 할 수 있다. 그러나 최근에는 전체 공정을 대상으로 화학공정의 복잡성 및 상호작용을 고려하여 공정 설계 단계에서 제어 시스템 설계를 병합(integration)함으로써 효율적인 제어 시스템 구조 설계 및 제어문제에 의한 공정도의 재설계를 방지하고자 하는 큰 범위의 공정제어 시스템 설계에 관한 연구가 진행중이다.

일반적으로 이들 공정제어 구조 합성(synthesis)이라 부르며 과거의 공정에의 제어법칙 적용의 범주를 벗어나 전 공정을 subsystem으로 분해(decomposition)하여 측정변수와 제어변수 및 조작변수의 합리적 선택, 변수들 사이의 상호작용 해석을 통한 최적 제어 구조 선정 및 설계된 제어 시스템의 robustness와 resilience 해석 등을 다루고 있다[3].

1980년 전후로 초기 제어 구조 합성 연구는 전 공정 변수들의 정성적인 상관관계를 고려하여 측정변수, 제어변수 및 조작변수의 집합을 합리적으로 선택할 수 있는 여러가지 방법들이 제시되었다[4, 5]. 그러나 이 방법들에 의해 구해진 변수 집합들을 좀 더 실제적으로 세분하고 변수들의 상호작용 해석을 위해서는 정량적 방법의 도움을 받아야 한다.

1960년대 후반에 SISO(single input single output) pairing을 위한 정량적 기법으로 RGA(Relative Gain Array)[6]와 RI(Rijnsdorp Index)[7]가 제시된 바 있으며, 1980년대 들어와 SISO pairing을 위한 새로운 정량적 기법들[8, 9]과 부분적으로 MIMO(multi input multi output) pairing까지 확장할 수 있는 판별기준들이 꾸준히 발표되고 있다[10, 11].

일부 동특성을 이용하는 판별기준도 있으나 대부분의 판별기준은 정상상태 이득을 이용하여 가능한 제어 구조를 선정하고 있다. 따라서 정상상태 이득은 정상상태를 이용하는 공정제어 구조 합성의 정량적 기법의 핵심이 되는 수치이다.

일반적으로 간단한 공정 시스템에서는 정상상태 이득을 모델로부터 구할 수 있으나 복잡한 공정에서는 정상상태 모사기(simulator)를 이용하여 구한다.

Luyben[12]은 정상상태 이득을 실험으로부터 구할 때는 신호(signal) 잡음 때문에 입력변수에 보통 5-10% 변화를 주어 구하게 되므로 비선형 시스템에서는 커다란 오차를 수반하게 되며 실험에서 구한 정상상태 이득을 이용하여 판별기준을 적용할 때 전혀 무의미한 결과가 나올 수 있으므로 주의하여야 한다고 지적한 바 있다[12]. 또한 잘 개발된 정상상태 모사기를 사용하여 정상상태 이득을 구할 때도 입력변수의 변화폭을 줄여가면서 반복 계산하므로써 수렴치를 구하여야 한다. 따라서 정상상태 이득을 효율적이고 정확히 구할 수 있는 방법이 필요하다.

본 연구에서는 동시 수렴에 의한 공정모사를 이용하여 정상상태 이득을 합리적으로 구하는 방법을 제시하고자 한다. 또한 간단한 이성분계 증류탑에 적용하여 유용성을 알아보고자 하며 탑상농도와 탑저농도에 따른 가능한 제어 구조를 조사하고자 한다.

## 2. 동시 수렴법에 의한 정상상태 이득 계산

정상상태 이득은 주어진 조건에서 어떤 입력변수(m)의 정상상태의 변화에 대한 그에 대응하는 출력변수(y)의 정상상태의 변화로 정의된다. 선형 시스템의 입력변수  $m_j$ 와 출력변수  $y_i$ 의 정상상태 이득( $g_{ij}$ )은 다음과 같이 표시된다.

$$g_{ij} = \frac{\Delta y_i}{\Delta m_j} \Big|_{m_{k,k \neq j}} \quad (1)$$

선형 시스템에서 정상상태 이득은  $\Delta m$ 의 크기에 상관없이 이득값이 일정하나 비선형 시스템(대부분의 화학공정)에서는  $\Delta m$ 의 크기와 운전조건에 따라 다르다. 따라서 비선형 시스템의 정상상태 이득( $g_{ij}$ )은 다음과 같이 표시된다.

$$g_{ij} = \lim_{\Delta m_j \rightarrow 0} \frac{\Delta y_i}{\Delta m_j} \Big|_{m_{k,k \neq j}} = \frac{\partial y_i}{\partial m_j} \Big|_{m_{k,k \neq j}} \quad (2)$$

단계적 계산방법(sequential modular approach)를 사용하는 정상상태 모사기를 사용하여 비선형 시스템의 정상상태 이득을 구할 때는  $\Delta m$ 을 0에 접근해 가면서 반복계산을 통해 이득값이 변화가 없을 때까지 수렴시켜 구해야 하며  $\Delta m$ 을 어느 정도하여야 하는 것은 입력변수와 출력변수에 따라 경우마다 다르다[12].

동시 수렴법을 사용하기 위하여 비선형 시스템의 수학적 모델을 다음과 같은 연립 대수 방정식으로 표시한다.

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{m}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3)$$

여기서

$\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_{n+p}]^T$  : 시스템 방정식

$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$  : 종속 변수

$\mathbf{m} = [m_1, m_2, \dots, m_p]^T$  : 독립 변수

$\mathbf{x} = [\mathbf{y}^T, \mathbf{m}^T]^T = [y_1, y_2, \dots, y_n, m_1, m_2, \dots, m_p]^T$  : 변수

이다.

이 연립 대수 방정식을 Newton-Raphson 반복계산 방법으로 풀기 위해 변수에 관하여 선형화시키면

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}^i = \mathbf{0} \quad (4)$$

이 되며, 변수의  $i$ 번째 반복식은 다음과 같다.

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \Delta \mathbf{x}^i \quad (5)$$

$$\Delta \mathbf{x}^i = -\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (6)$$

여기서

$\mathbf{J}(\mathbf{x}) =$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} & \frac{\partial f_1}{\partial m_1} & \frac{\partial f_1}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial m_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} & \frac{\partial f_2}{\partial m_1} & \frac{\partial f_2}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial m_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} & \frac{\partial f_n}{\partial m_1} & \frac{\partial f_n}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial m_p} \\ \frac{\partial f_{n+1}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial y_n} & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial m_1} & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial m_p} \\ \frac{\partial f_{n+2}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_{n+2}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_{n+2}}{\partial y_n} & \frac{\partial f_{n+2}}{\partial m_1} & \frac{\partial f_{n+2}}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial f_{n+2}}{\partial m_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{n+p}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_{n+p}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_{n+p}}{\partial y_n} & \frac{\partial f_{n+p}}{\partial m_1} & \frac{\partial f_{n+p}}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial f_{n+p}}{\partial m_p} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$\mathbf{J} : (n+p) \times (n+p)$  행렬

이다.

$\Delta \mathbf{x}^i$ 가 0에 수렴하면  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 는 0에 수렴하게 되며, 이때  $\mathbf{x}$  값들은 주어진 시스템 방정식을 만족하는 해를 의미한다.

일반적으로 공정 설계 단계에서 독립변수  $m_j$ 를 변화시켜 가면서 대응하는 종속변수  $y_i$ 를 구하므로 함수  $f_{n+1}, f_{n+2}, \dots, f_{n+p}$ 의 형태는

$$f_{n+i} = m_i - k_i = 0 \quad (k_i \text{는 상수}, i=1, 2, \dots, p) \quad (8)$$

이 되며 Jacobian 행렬[식 (7)]은 다음과 같다.

$\mathbf{J}(\mathbf{x}) =$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} & \frac{\partial f_1}{\partial m_1} & \frac{\partial f_1}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial m_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} & \frac{\partial f_n}{\partial m_1} & \frac{\partial f_n}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial m_p} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} & \frac{\partial f_1}{\partial m_1} & \frac{\partial f_1}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial m_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} & \frac{\partial f_n}{\partial m_1} & \frac{\partial f_n}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial m_p} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_A & \mathbf{J}_B \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서

$\mathbf{J}_A : n \times n$  행렬

$\mathbf{J}_B : n \times p$  행렬

$\mathbf{0} : p \times n$  행렬

$\mathbf{I} : p \times p$  행렬

이다.

주어진 행렬을 부분행렬로 나누어 역행렬을 구하는 공식은 다음과 같으며

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C})^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{B} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D})^{-1} \\ -(\mathbf{B} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D})\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & (\mathbf{B} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D})^{-1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

이를 이용하여 Jacobian 행렬의 역행렬을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_A & \mathbf{J}_B \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_A^{-1} & -\mathbf{J}_A^{-1}\mathbf{J}_B \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (11)$$

변수들이 수렴하여 주어진 시스템의 해를 구하였을 때 최종단계에서 사용된 역 Jacobian 행렬의 부분행렬  $-(\mathbf{J}_A^{-1}\mathbf{J}_B)^{\infty}$ 를 살펴보면 다음과 같다.

$$-(\mathbf{J}_A^{-1}\mathbf{J}_B)^{\infty} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial m_1} & \frac{\partial f_1}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial m_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial m_1} & \frac{\partial f_2}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial m_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial m_1} & \frac{\partial f_n}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial m_p} \end{bmatrix}^{\infty} \quad (12)$$

특히, 위의 행렬을 세분하여 각 열에 대해 살펴보면  $j$ 번째 열은 독립변수  $m_j$ 에 대한 종속변수  $y_i (i=1, 2, \dots, n)$ 들의 sensitivity(즉, 두 변수사이의 정상상태 이득)를 나타낸다.

$$-\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial m_j} \\ \frac{\partial f_2}{\partial m_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial m_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial m_j} \\ \frac{\partial y_2}{\partial m_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial m_j} \end{bmatrix} \quad (13)$$

또한 식 (13)은 implicit function theorem[13]을 이용하여 해에서 독립변수 ( $m$ )에 대한 종속변수 ( $y$ )의 편미분을 구하는 식과 일치한다. 이는 동시 수렴법을 사용하여 공정 설계 단계에서 설계조건을 만족하는 해를 찾는 과정에서 부산물로 변수들간의 정상상태 이득을 같이 구할 수 있음을 뜻한다. 즉 동시 수렴법을 이용한 정상상태 이득을 계산하는 방법은 일단 해를 구한 후 perturbation을 통해 반복 계산을 하여 이득을 구하는 기존의 단계적 계산방법보다 효율적임을 알 수 있다.

만일 행렬  $J(x)$ 의 역행렬을 구하지 않고 해를 풀 때는 식 (13)을

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial m_j} \\ \frac{\partial y_2}{\partial m_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial m_j} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial m_j} \\ \frac{\partial f_2}{\partial m_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial m_j} \end{bmatrix} \quad (14)$$

으로 변화시켜 역행렬을 구하지 않고 기존의 선형 대수 방정식을 푸는 방법을 사용하면 종속변수들의 sensitivity를 쉽게 구할 수 있다.

일반적으로 제어 시스템에서 종속변수의 일부가 제어 변수로 선택되며 독립변수는 조작변수와 외란변수가 된다. 따라서 주어진 공정에 대해 어떤 조작변수에 대한 제어변수의 정상상태 이득이나 어떤 외란에 대한 제어 변수의 정상상태 이득은 식 (13)을 이용하여 해를 풀 때 사용되는 역 Jacobian 행렬의 부분행렬에서 바로 구할 수 있다.

### 3. 적용결과 및 고찰

예를 들어, Table 1에 주어진 자료의 간단한 이성분

Table 1. Data for distillation column

• Flows (Flows/Column Feed Flow)
feed flow = 1.000, distillate flow = 0.5210
bottom product flow = 0.4790, boilup flow = 1.6672
reflux flow = 1.1462
total no. of tray = 21
feed tray no. (from top) = 9
relative volatility, $\alpha = 2$
• Steady-state mole fraction
$x_F = 0.500$ , $x_D = 0.9500$ , $x_B = 0.0105$

계 증류탑 (Fig. 1)을 한 성분의 농도를 다른 성분의 차로 표시하고 전 응축기 (total condenser)로 가정하면 관련 시스템 방정식은 50개, 종속변수는 46개, 독립변수는 4개이다.

종속변수 중에서 탑상의 조성 ( $x_D$ )과 탑저의 조성 ( $x_B$ )을 제어변수 ( $y_1, y_2$ )로 택하고 4개의 독립변수 중에서 원료의 양 ( $F$ )과 원료의 조성 ( $x_F$ )을 가능한 외란 ( $z_1, z_2$ )으로 잡는다면 나머지 2개의 독립변수가 2개의 조작변수가 된다.

2개의 조작변수, 2개의 제어변수 및 2개의 외란으로 이루어진 제어 시스템으로 생각하여 주어진 조건 (방정식의 해)에서 공정제어 구조 합성에 필요한 정상상태 모델을 표시하면 다음과 같다.

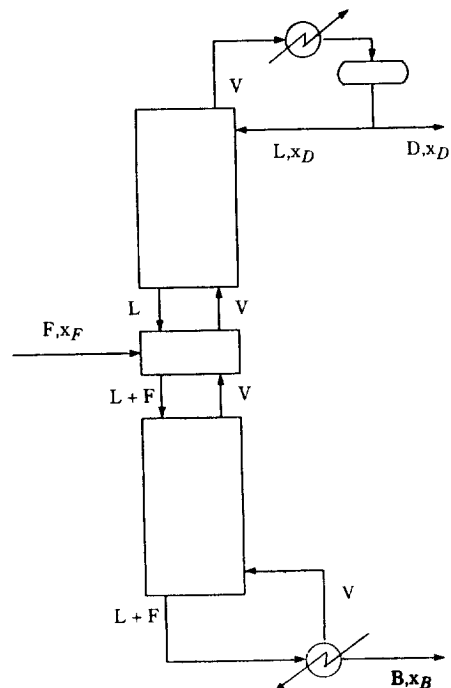


Fig. 1. A simplified binary distillation.

$$\begin{aligned}\Delta y_1 &= g_{11} \Delta m_1 + g_{12} \Delta m_2 + d_{11} \Delta z_1 + d_{12} \Delta z_2 \\ \Delta y_2 &= g_{21} \Delta m_1 + g_{22} \Delta m_2 + d_{21} \Delta z_1 + d_{22} \Delta z_2\end{aligned}\quad (15)$$

여기서

$$\begin{aligned}g_{11} &= \frac{\partial y_1}{\partial m_1}, g_{12} = \frac{\partial y_1}{\partial m_2}, g_{21} = \frac{\partial y_2}{\partial m_1}, g_{22} = \frac{\partial y_2}{\partial m_2}, \\ d_{11} &= \frac{\partial y_1}{\partial z_1}, d_{12} = \frac{\partial y_1}{\partial z_2}, d_{21} = \frac{\partial y_2}{\partial z_1}, d_{22} = \frac{\partial y_2}{\partial z_2},\end{aligned}$$

이다.

본 예에서 가능한 조작변수( $m_1, m_2$ )는 (L, V), (D, V), (D/V, V), (D, V/B), (D/V, V/B) 등이 있다. 여기서 L은 환류량, V는 재비량, D는 탑상 생성물의 양, B는 탑저 생성물의 양을 나타낸다.

조작변수를 (L, V)로 택한 경우 (Table 2)와 조작변수를 (D, V)로 택한 경우 (Table 3)에 대해 단계적 계산방법을 사용하는 정상상태 모사기를 사용하였을 때  $\Delta m$ 의 폭의 변화에 따라  $\Delta y/\Delta m$ 의 변화가 다름을 보이며, 또한 이를 이용하는 pairing 기준중 하나인 Bristol의 RGA를 사용하였을 경우  $\Delta m$ 의 작은 변화

**Table 2. Steady state gains and RGAs calculated by the sequential modular approach (L,V control structure)**

DEL(% $\frac{\Delta m}{m}$ )	$g_{11}$	$g_{12}$	$g_{21}$	$g_{22}$	RGA( $\lambda_{11}$ )
10.0	0.33428	-1.33961	1.35398	-0.05867	-0.0109
1.0	1.14563	-1.49097	0.72554	-0.29836	-0.4619
0.1	1.35411	-1.35182	0.49080	-0.48822	-279.6815
0.01	1.37000	-1.32754	0.47166	-0.51735	8.5787
0.001	1.37154	-1.32499	0.46980	-0.52039	7.8217
0.0001	1.37169	-1.32473	0.46962	-0.52069	7.7532
0.00001	1.37171	-1.32470	0.46960	-0.52072	7.7472
0.000001	1.37171	-1.32470	0.46960	-0.52073	7.7463
0.0000001	1.37171	-1.32470	0.46960	-0.52073	7.7463

**Table 3. Steady state gains and RGAs calculated by the sequential modular approach (D,V control structure)**

DEL(% $\frac{\Delta m}{m}$ )	$g_{11}$	$g_{12}$	$g_{21}$	$g_{22}$	RGA( $\lambda_{11}$ )
10.0	-1.53415	0.02947	-0.14143	-0.03206	0.92187
1.0	-1.43633	0.04464	-0.38790	-0.04855	0.80109
0.1	-1.37928	0.04676	-0.46036	-0.05086	0.76519
0.01	-1.37248	0.04698	-0.46866	-0.05110	0.76107
0.001	-1.37178	0.04700	-0.46950	-0.05113	0.76065
0.0001	-1.37171	0.04701	-0.46959	-0.05113	0.76061
0.00001	-1.37171	0.04701	-0.46960	-0.05113	0.76060
0.000001	-1.37171	0.04701	-0.46960	-0.05113	0.76060

**Table 4. Steady state gains and RGAs calculated by the simultaneous solution method (L,V control structure)**

$g_{11}$	$g_{12}$	$g_{21}$	$g_{22}$	RGA( $\lambda_{11}$ )
1.37171	-1.32470	0.46960	-0.52073	7.74633

**Table 5. Steady state gains and RGAs calculated by the simultaneous solution method (D,V control structure)**

$g_{11}$	$g_{12}$	$g_{21}$	$g_{22}$	RGA( $\lambda_{11}$ )
-1.37171	0.04701	-0.46960	-0.05113	0.76060

에 대해 커다란 차이를 보여 변수간의 pairing 하기가 곤란함을 보이고 있다.

또한 Table 2와 3에서 보는 바와 같이  $\Delta m$ 을 0에 접근해 가면서 이득값의 변화가 없을 때까지 수렴시켜 구해야 하며  $\Delta m$ 을 어느 정도 하여야 하는 것은 입력 변수와 출력변수에 따라 경우마다 다름을 보였다.

Table 2에서  $g_{11} = \Delta x_D / \Delta L$ ,  $g_{12} = \Delta x_D / \Delta V$ ,  $g_{21} = \Delta x_B / \Delta L$ ,  $g_{22} = \Delta x_B / \Delta V$ ,  $\lambda_{11} = 1 / (1 - g_{12}g_{21} / g_{11}g_{22})$ 임을 나타내며, Table 3에서  $g_{11} = \Delta x_D / \Delta D$ ,  $g_{12} = \Delta x_D / \Delta V$ ,  $g_{21} = \Delta x_B / \Delta D$ ,  $g_{22} = \Delta x_B / \Delta V$ 임을 나타낸다.

따라서 공정제어 구조 합성을 위해 정상상태 이득을 이용하는 대부분의 많은 기준 및 척도들을 사용하는 경우에는 우선 먼저 정상상태 이득을 정확히 구해야 한다.

Table 4와 5에서는 위의 두 경우에 대해 동시 수렴법을 사용하여 구한 정상상태 이득값을 나타내며, 이 값들을 Table 2와 3에서 조작변수의 변화를 0으로 수렴시켰을 때와 같은 값을 가짐을 볼 수 있다.

정확히 구해진 정상상태 이득은 시스템의 제어 구조 선정에 사용하게 되며 아울러 제어변수에 대한 제어 범위내에서 제어변수와 조작변수의 이득을 추가로 구해 봄으로써 다루는 공정 시스템의 비선형성의 정도를 제어 구조 선정에 참조하여야 한다. 편의상 주어진 운전 조건에서 구해진 이득과 제어 범위 경계에서 구해진 이득이 크게 차이를 보일 때는 그 제어 구조의 선정을 피하는 것이 좋다.

### 3-1. 단성분 제어계

탑상 생성물( $x_D$ )만을 제어하고자 하는 단성분 제어에 대한 조작변수 선택은 가능한 조작변수의 이득들

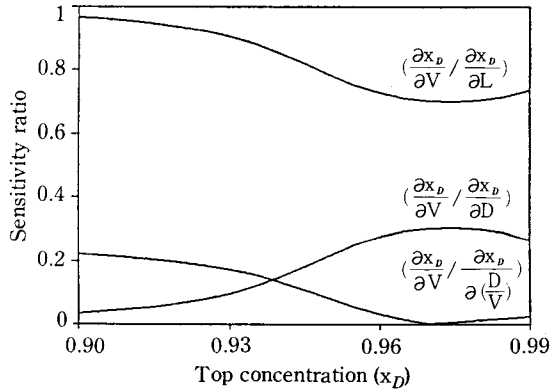


Fig. 2. Sensitivity ratios versus top concentration ( $V/F = 1.5$ ).

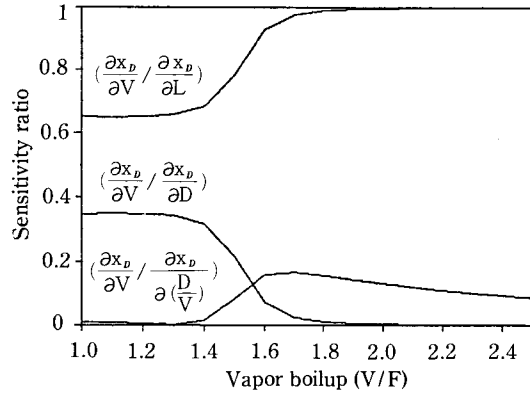


Fig. 3. Sensitivity ratios versus top concentration ( $x_D = 0.95$ ).

을 비교함으로써 가능하다. 중요한 외란으로 작용하는 재비량( $V$ )의 영향이 탑상 생성물에 대한 조작변수의 영향에 비해 극히 작아야 한다. 즉  $[(\frac{\partial x_D}{\partial V}) / (\frac{\partial x_D}{\partial m})]$  값이 0에 가까운 조작변수를 택해야 한다.

1. 공정모사를 이용하여  $V/F=1.5$ 로 고정시키고 탑상 생성물을 변화시키면서 정상상태 운전조건을 구하였다. 구해진 운전조건에서 가능한 조작변수  $L$ ,  $D$ ,  $D/V$ 에 대한  $x_D$ 의 이득과 외란변수  $V$ 에 대한  $x_D$ 의 이득을 구하여  $[(\frac{\partial x_D}{\partial V}) / (\frac{\partial x_D}{\partial m})]$ 을 비교하여 보았다. 그 결과  $x_D=0.9$  근처에서 조작변수로  $D$ 를 취하는 것이  $V$ 의 영향을 적게 받았으며  $x_D=0.99$  근처에서는  $D/V$ 로 조작하는 것이 바람직함을 알 수 있었다(Fig. 2).

2. 공정모사를 통하여  $x_D=0.95$ 로 고정시키고  $V/F$ 를 변화시키면서 운전조건을 구하였다. 구해진 각각의 운전조건에서 세 조작변수에 대해  $[(\frac{\partial x_D}{\partial V}) / (\frac{\partial x_D}{\partial m})]$ 을 비교한 결과  $V/F$ 가 작은 경우에는  $x_D$ 에 대한 조작변수를  $D/V$ 로 잡는 것이  $V$ 의 변화에 대한 영향을 작게 받았으며  $V/F$ 가 큰 경우에는  $x_D$ 를  $D$ 로 조작하는 것이 바람직함을 알 수 있었다(Fig. 3).

위의 두 결과는 여러 정상상태 운전조건에 대한 탑상 생성물의 농도의 변화를 나타낸 graph로부터 합당한 조작변수를 유추한 다른 연구[14] 결과와 일치하고 있다.

### 3-2. 이성분 제어계

#### 3-2-1. Relative gain array(RGA)

제어변수와 조작변수가 2개 이상 존재하는 시스템에서 어떤 제어변수에 대해 선택된 조작변수의 영향과 남은 다른 조작변수들에 대한 영향을 비교하는 기준으로

Bristol[6]은 relative gain array를 제시하였다.

다른 조작변수들을 고정시키고 선택된 조작변수의 변화에 대한 선택된 제어변수의 변화를 open loop 이득이라 하고, 다른 제어변수들을 고정시키고 선택된 조작변수의 변화에 대한 선택된 제어변수의 변화를 closed loop 이득이라 한다. Relative gain는 open loop 이득과 closed loop 이득의 비를 나타내며 다음과 같이 정의한다.

$$\lambda_{ij} = \frac{(\partial y_i / \partial m_j)_m}{(\partial y_i / \partial m_j)_y} \quad (16)$$

다변수계에서 조작변수  $m_j$ 와 제어변수  $y_i$ 의  $\lambda_{ij}$ 가 1에

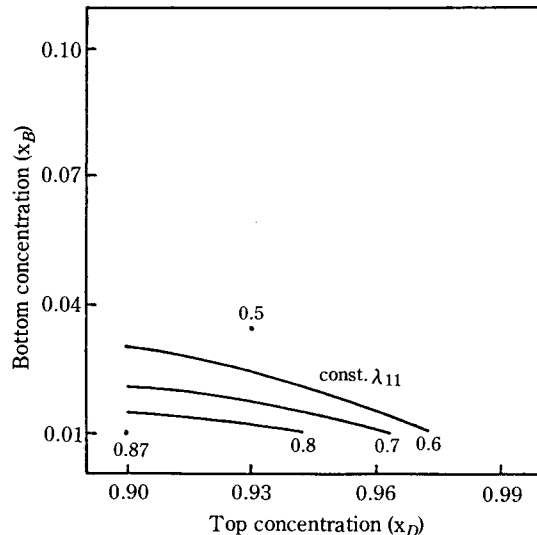


Fig. 4. Profile of  $RGA(\lambda_{11})$  for (D,V) control structure.

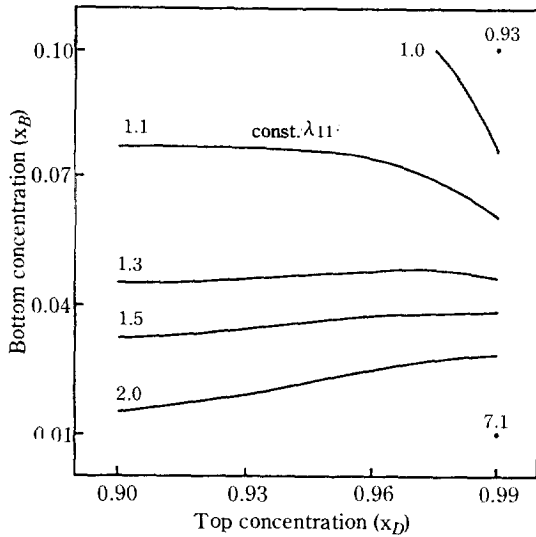


Fig. 5. Profile of  $RGA(\lambda_{11})$  for (D/V,V) control structure.

가깝게 나타난다는 것은 이 두 변수 사이의 상관관계가 대단히 높아  $m_j$ 와  $y_i$ 를 SISO 제어계로 연결하였을 때 다른 변수들의 변화에 의해 영향을 받지 않음을 의미하며, 0인 경우는  $m_j$ 로  $y_i$ 를 제어할 수 없음을 나타낸다. 또한  $2 \times 2$  시스템에서  $\lambda_{11} = 0.5$ 이면 변수간의 상호작용이 똑같이 SISO pairing이 불가능함을 나타낸다.

탐상 생성물( $x_D$ )과 탐저 생성물( $x_B$ )을 동시에 다루

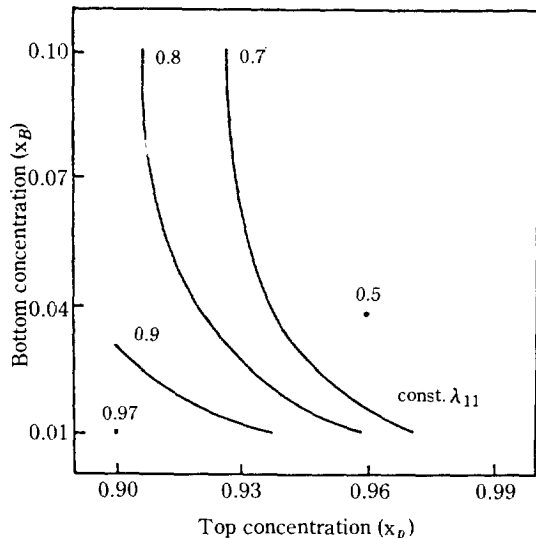


Fig. 6. Profile of  $RGA(\lambda_{11})$  for (D,V/B) control structure.

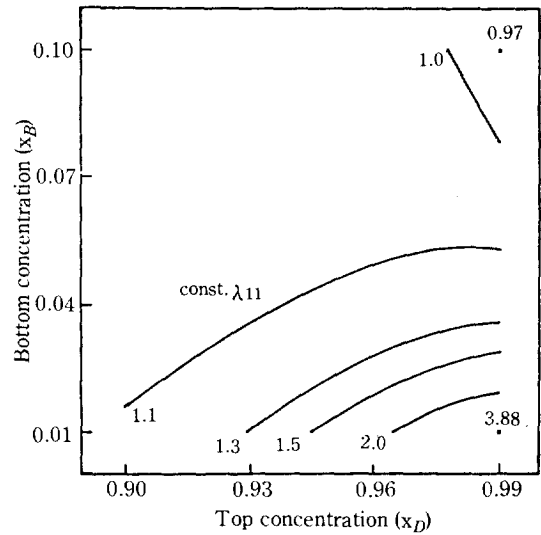


Fig. 7. Profile of  $RGA(\lambda_{11})$  for (D/V,V/B) control structure.

는 이성분 제어계의 SISO 구조 선정을 위해  $0.9 \leq x_D \leq 0.99$ ,  $0.01 \leq x_B \leq 0.1$  범위에서 가능한 제어 구조에 대한  $RGA(\lambda_{11})$ 를 계산하여 비교하였다. 이를 위해 주어진 정상상태 운전조건에서 제어변수( $x_D$ ,  $x_B$ )에 대한 조작변수( $m_1$ ,  $m_2$ )의 정상상태 이득을 구한 후 이를 이용하여  $\lambda_{11} = [(\partial x_D / \partial m_1) m_2 / (\partial x_B / \partial m_1) x_B]$ 를 계산하였다. 같은 방법으로 정상상태 운전조건을 변화시켜 가면서  $x_D$ 와  $x_B$ 의 변화에 따른  $\lambda_{11}$ 을 구한 후 같은  $\lambda_{11}$ 값을 곡선으로 연결시켰다(Fig. 4-7). 그렇게 함으로써 주어진 조작변수( $m_1$ ,  $m_2$ )에 대해 SISO pairing을 할 수 있는 제어변수( $x_D$ ,  $x_B$ )의 영역을 도출할 수 있다. Fig. 4-7에서 ( $m_1$ ,  $m_2$ ) 제어 구조는 탐상 생성물을  $m_1$ 으로 조작하고 탐저 생성물은  $m_2$ 으로 조작함을 의미한다.

(D, V, Fig. 4), (D/V, V, Fig. 5), (D, V/B, Fig. 6), (D/V, V/B, Fig. 7) 제어 구조 중에서 (D/V, V/B) 제어 구조가 본 예제 시스템에 대해 SISO pairing을 하였을 경우 넓은 범위에서 적용 가능함을 알 수 있었다(Fig. 7). 또한  $x_D = 0.9$ ,  $x_B = 0.01$  부근에서 제어하고자 하는 경우에는 (D, V/B) 제어구조를 선정하는 것이 바람직함을 알 수 있었다(Fig. 6).

#### 4. 결 론

1. 동시 수렴을 이용하여 정상상태 이득을 구하는 방법이 합리적임을 알 수 있었다.

2. 공정 설계조건을 만족하는 해를 구한 후, 해를 구하는 과정에서 계산된 역 Jacobian 행렬의 부분 행렬로부터 정확한 정상상태 이득을 구할 수 있었으며, 이를 이용한 방법이 많은 반복 계산을 통하여 정상상태 이득을 구하는 기존의 단계적 계산방법보다 효율적임을 알 수 있었다.

3. 본 연구에서 제시한 방법으로 구해진 정상상태 이득을 Table 1에서 보인 증류탑의 이성분 제어계의 SISO 제어 구조 선정에 응용한 결과 (D/V, V/B) 제어 구조가 최적구조임을 알 수 있었다.

일반적으로 대상 unit 자체만을 다루어 정상상태 이득을 구하나 이렇게 구한 이득은 recycle을 고려하여 구한 대상 unit의 정상상태 이득과는 값이 다르다. 따라서 recycle이 포함된 공정의 정상상태 이득을 구하는 합리적 방법에 대한 연구가 필요하다.

## 감 사

본 연구를 지원해 준 한국과학기술원 화학공정연구실 및 송형근 박사께 심심한 감사를 드립니다.

## NOMENCLATURE

$d_j$  : steady state gain for disturbance  
 $D$  : distillate flow rate  
 $f$  : system equation  
 $F$  : feed flow  
 $J$  : Jacobian matrix  
 $g_j$  : steady state gain  
 $L$  : reflux flow rate  
 $m$  : manipulated variable  
 $V$  : boilup flow rate  
 $m$  : independent variable or manipulated variable  
 $x_b$  : bottom concentration

$x_b$  : top concentration  
 $x_F$  : feed concentration  
 $y$  : dependent variable or controlled variable  
 $z$  : disturbance

## Greek Letter

$\lambda_{ij}$  : relative gain

## REFERENCES

1. Lee, W.Y. and Weekmen, V.W.: *AIChE J.*, **22**, 27 (1976).
2. Nishida, N., Stephanopoulos, G., and Westerberg, A.W.: *AIChE J.*, **27**, 321 (1981).
3. Stephanopoulos, G.: *Comput. and Chem. Eng.*, **7**, 331 (1983).
4. Govind, R. and Powers, G.J.: *AIChE J.*, **28**, 60 (1982).
5. Morari, M. and Stephanopoulos, G.: *AIChE J.*, **26**, 232 (1980).
6. Bristol, E.: *IEEE Trans. Auto. Contr.*, AC-11, 133 (1966).
7. Rijnsdorp, J.E.: *Automatica*, **1**, 29 (1965).
8. Lan, H.J. and Jensen, K.H.: *AIChE J.*, **31**, 427 (1985).
9. Mijares, G., et al.: *AIChE J.*, **32**, 1439 (1986).
10. Manousiouthankis, V., Savage, R., and Arkun, Y.: *AIChE J.*, **32**, 991 (1986).
11. 고재욱 : 87 한국자동제어학술회의 논문집, 643 (1987).
12. Luyben, W.L.: *Ind. Eng. Chem. Res.*, **26**, 2076 (1987).
13. Avriel, M.: "Nonlinear Programming Analysis and Methods", Prantice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1976).
14. 이원홍 등 : "증류공정의 소비에너지 최소화 방안 개발", 제 2차 보고서, 한국과학재단 (1988).