

## 아래로부터 가열되는 수평유체층에서 열적 불안정성 해석 및 열전달 예측

최창균·이종대·황선탉\*·유재수

서울대학교 공과대학 화학공학과

\*신시내티대학교

(1989년 2월 3일 접수, 1989년 3월 31일 채택)

## The Analysis of Thermal Instability and Heat Transfer Prediction in a Horizontal Fluid Layer Heated from Below

Chang Kyun Choi, Jong Dae Lee, Sun-Tak Hwang\*, and Jae Soo Yoo

Department of Chemical Engineering, College of Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea

\*University of Cincinnati, Cincinnati, Ohio 45221, U.S.A.

(Received 3 February 1989; accepted 31 March 1989)

### 요 약

본 연구에서는 초기에 정지된 상태로 있는 수평유체층의 밑면을 등온으로 가열할 때 자연대류의 유발시점을 전파이론을 도입함으로써 해석하였다. 선형이론하에서 Prandtl 수가 매우 클 때와 작을 때의 두 극한 경우에 대하여 안정성 해석을 결정론적으로 수행하였다. 열적 불안정성에 관한 이론적인 임계조건들을 난류 열대류와 연관시킴으로써, 새로운 열전달 상관식이 Prandtl 수와 Rayleigh 수의 함수로 제의되었다. 새로운 상관식은 수은, 공기, 물, 실리콘오일 같은 실험치들과 잘 일치한다는 것을 알 수 있었다.

**Abstract**—In the present study the onset of natural convection in an initially quiescent, horizontal fluid layer heated isothermally from below has been analysed, by employing the propagation theory. The stability analysis under the linear theory has been conducted deterministically for the limiting cases of extremely small and infinite Prandtl numbers. A new heat transfer correlation connecting the theoretical critical conditions on thermal instability to turbulent thermal convection has been suggested as a function of both the Rayleigh number and the Prandtl number. It is found that the resulting new correlation agrees well with experimental data of mercury, air, water and silicon oil.

### 1. 서 론

수평면 상에 위치한 온도가 균일한 유체층을 밑면에서 가열하거나 윗면을 냉각시킬 때, 부력에 기인한 자연대류가 발생된다는 것은 잘 알려져 있다. 자연대류에 관한 연구는 열교환 및 저장, 태양열 집열기, 핵반응

기, 기체흡수 등 일반적인 공정의 해석에서 뿐만 아니라 대기의 유동, 난류의 근원 등을 밝히는 데 중요한 역할을 한다. 더욱이 결정의 성장, 전자장치의 냉각, 증착, 전기도금 등에서도 자연대류의 영향이 큰 것으로 알려져 있다. 따라서 자연대류의 유발조건을 밝히는 것은 학문적인 면에서 뿐만 아니라 실용적인 면에서도 매

우 중요하다.

초기에 대류가 없는 수평유체층에서 서서히 가열되어 기본온도분포가 선형인 계에 대하여 이론적인 임계조건들은 실험치와 잘 일치한다고 알려져 있다. 그러나 급격히 유체층을 가열하는 경우 전도에 의한 온도분포는 비선형이 되고 최종 온도분포가 선형이 되기 전에 자연대류가 발생될 것이다. 시간의존적인 비선형 온도분포를 갖는 유체층의 자연대류 발생시점은 많은 사람들에게 의해 꾸준히 연구되어 왔다. 1957년 Morton[1]이 동결시간모델을 제의하였으나 그의 해석은 약한 비선형 온도분포를 갖는 계에서만 유용하다고 알려져 있다. 이러한 난점을 극복하기 위하여 1965년 Foster[2]는 증폭이론을, 1982년 Jhaveri와 Homsy[3]는 추계모델을 제시하였다. 그들의 안정성 해석 또한 이러한 모델들이 실험치에는 접근했지만, 초기 교란의 형태와 증폭률의 임의성 때문에 명확한 해를 구할 수 없었다. 또한 Choi 등[4]은 Prandtl 수가 매우 큰 경우 온도 교란만을 열 경계층내에 국한시키는 수정동결시간모델을 도입하여 자연대류 발생시점을 이론적으로 해석하였다.

최근에 Choi 등[5]은 deep-pool 계에서 초기의 교란이 자연대류 발생시점에서 고정적인 형태가 아니라 시간의존적인 변화를 경험할 것이라는 전파이론을 제시하였다. 전파이론은 안정성 교환 원리하에 열침투깊이를 길이척도로 선택함으로써 새로운 안정성 방정식의 유도를 가능하게 한다. 일정 열속으로 가열되는 계에 대하여 Lee 등[7, 8]은 전파이론을 도입하여 안정성 해석을 한 이론적 결과가 실험치와 잘 일치한다는 것을 보고하였다.

열적 불안정성 연구로부터 얻어진 임계조건들이 난류 열전달 특성을 예측하는 데 중요한 역할을 할 것이라는 경계층 불안정성 모델이 Howard[9]와 Busse[10] 등에 의하여 제의된 바 있다. 이들의 모델을 근거로 최근 Choi 등[6, 8]은 열전달 상관관계식을 Rayleigh 수와 Prandtl 수의 함수로 얻은 바 있다.

본 연구의 목적은 초기에 정지하고 있는 수평유체층의 밀면을 등온으로 가열할 때 전파이론을 도입하여 Prandtl 수가 매우 클 때와 작을 때의 두 극한 경우에 대하여 자연대류 발생 시점을 예측하고 이를 근거로 난류 열전달 특성을 나타내는 상관식을 도출하는데 있다.

## 2. 안정성 해석

두 무한 수평면사이에서 위치한 뉴튼유체가 시간  $t=0$

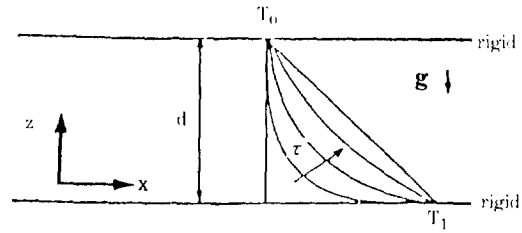


Fig. 1. Schematic diagram of system.

인 순간부터 밀면이 일정온도차( $\Delta T$ )로 가열된다. 초기에 정지상태의 유체층은 일정온도  $T_0$ 로 유지되고 경계면은 완전 열전도체라고 가정한다. Fig. 1에 도시된 바와 같이 두 고정경계면 사이의 간격은  $d$ 이고 전도에 의한 기본온도분포는 시간의 경과함에 따라 비선형을 보이다가 상부면의 온도가 일정한 정상상태에 도달하면 선형이 될 것이다.

기본온도분포가 선형일 경우는 Rayleigh 수,  $Ra$ 가 1708일 때 자연대류가 발생한다는 것이 잘 알려져 있으며,  $Ra > 1708$ 일 때는 자연대류는 전도에 의한 기본온도분포가 선형이 되기 전에 발생될 것이다. 이와 같은 계의 성질을 규명하는 중요한 매개변수인 Rayleigh 수와 Prandtl 수는 다음과 같이 정의된다.

$$Ra = \frac{g\beta\Delta T d^3}{\alpha\nu} \quad (1)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (2)$$

여기서  $g$ 는 중력가속도,  $\beta$ 는 열팽창계수,  $\alpha$ 는 열확산계수,  $\nu$ 는 동점도이며  $Ra$ 는 계를 불안정하게 하는 인자와 안정화 인자사이의 균형을 나타내며  $Pr$ 는 운동량 전달능력과 열전달능력 사이의 관계를 나타낸다.

### 2-1. 교란식

정지된 수평면 사이에 위치한 유체층에 대한 무차원 교란식을 얻기 위하여 본 연구에서는  $d$ ,  $d^2/\alpha$ ,  $\Delta T$ ,  $\alpha\nu/g\beta d^3$ ,  $\alpha/d$ 를 각각 길이, 시간, 기본온도, 교란온도, 교란속도 등을 단위로 하여 무차원화 한다. 여기서 교란온도는  $\Delta T$ 가 아닌  $Ra/\Delta T$ 를 사용하여 무차원화 시켜야 보다 타당성이 있는 안정성 조건을 구할 수 있다는 점이 특이하다. 자연대류 발생시점에서 속도, 온도, 압력 등의 교란량은 매우 미소하다. 따라서 무차원 교란방정식은 선형이론하에서 Boussinesq 가정을 도입하고 연속, 운동, 에너지방정식으로부터 수직속도 성분  $w_1$ 과 온도성분  $\theta_1$ 으로 다음과 같이 얻는다[6-8]. :

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla^2 w_1 = \nabla^2 \nabla^2 w_1 + \nabla^2 \theta_1 \quad (3)$$

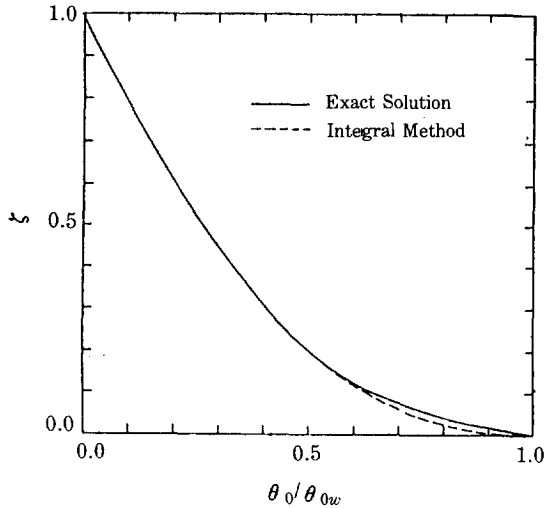


Fig. 2. Base temperature profile for deep-pool system.

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + Ra w_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = \nabla^2 \theta_1 \quad (4)$$

$$\text{여기서 } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ 이다.}$$

본 deep-pool 계에서 자연대류가 발생하기 이전에는 전도에 의해서 열이 전달된다. 이때 기본온도분포는 잘 알려진 전도식으로부터 적분법을 사용하여 다음의 해가 안정성 해석시에 매우 유용하다.

$$\theta_0 = [1 - 2\xi + 2\xi^3 - \xi^4] [1 - H_{\tau-1}] \quad (5)$$

여기서  $\xi = z/\delta$ 는 무차원 열침투깊이  $\delta = (40\tau/3)^{1/2}$ 를 근거로 하여 규격화된 수직길이이며,  $z$ ,  $\tau$ 는 각각 무차원 수직길이와 시간을 나타낸다. 또한  $H_{\tau-1}$ 은  $0 \leq \xi \leq 1$ 일 때 0,  $1 \leq \xi$ 일 때 1의 값을 갖는 계단함수이다. Fig. 2에서 비교되는 바와 같이 벽면온도  $\theta_{0w}$ 로 규격화된 근사해는  $\tau \leq 0.01$ 일 때 엄밀해[2]를 일괄성있게 잘 표현하고 있다.

교란식에서 고정경계면에 대한 경계조건들은 다음과 같이 주어진다.

$$w_1 = \frac{\partial w_1}{\partial z} = \theta_1 = 0 \quad \text{at } z=0 \text{ and } z=1 \quad (6)$$

위의 경계조건들은 no-slip 조건과 상하부면에서 교란온도가 일정하게 유지된다는 것을 의미한다.

## 2-2. 전파이론

안정성 해석에 있어서 재래의 동결시간 모델은 시간을 매개변수로 고려함으로써 교란량들의 시간의존성을 무시하게 된다. 이것은 교란식 (3)에서 나타나듯이 안

정성 판별에 대한 Prandtl 효과를 볼 수 없다는 단점이 있다. 또한 증폭이론하에서는 자연대류 임계조건은 초기조건의 설정과 증폭률 결정에 의존된다.

본 연구에서 적용된 전파이론은 교란량들의 시간의존적 성질을 적당한 길이척도  $\delta$ 을 기준으로 한 유사변수를 도입함으로써 안정성에 관한 Prandtl 효과를 예측할 수 있으며, 자연대류 발생시점을 안정성 방정식으로부터 직접 얻을 수 있다. 시간에 따른 교란량들의 변화를 고려한 전파이론은 안정성 교환원리를 포함한 재래의 선형 안정성 이론에 따른다. 본 연구에서는 수평면 상으로 무한대라고 보아 측면 영향을 무시하였으므로, 교란량들은 자연대류 발생시점에서 수평주기파수 특성을 보여줄 것이다. 무차원 파수를 도입하여 도출된 진폭함수는 다음의 관계를 사용하여 변형된다.

$$[w_1(\tau, z), \theta_1(\tau, z)] = [\delta^2 w^*(\xi), \theta^*(\xi)] \exp[i(a_x x + a_y y)] \quad (7)$$

여기서 새로운 진폭함수  $w^*$ 와  $\theta^*$ 는  $\xi$ 만의 함수가 되고,  $(a_x^2 + a_y^2)^{1/2}$ 은 무차원 파수  $a$ 로 정의되며,  $i$ 는 허수이다.

식 (7)에 의하여 규정된 진폭함수를 도입함으로써 교란식 (3)과 (4)는  $\xi$ 만의 함수인 다음과 같은 새로운 안정성 방정식을 얻게 된다.

$$[(D^2 - a^{*2})^2 + \frac{20}{3} \frac{1}{Pr} (\xi D^3 - a^{*2} \xi D + 2a^{*2})] w^* = a^{*2} \theta^* \quad (8)$$

$$(D^2 + \frac{20}{3} \xi D - a^{*2}) \theta^* = Ra^* w^* D \theta_0 \quad (9)$$

여기서  $D = d/d\xi$ ,  $a^* = a\delta$ ,  $Ra^* = Ra\delta^3$ 이다.

위 식 (8)과 (9)에서  $Ra^*$ 와  $a^*$ 는 유체층길이  $d$ 를 열침투층길이  $\delta$ 로 전환한 Rayleigh 수와 파수로서, deep-pool 계에서 실험결과에 의하면  $Ra^*$ 와  $a^*$ 는 일정하다고 보고되어 있다[3, 5, 7, 8]. 따라서 본 연구에서는 유사변수를 사용하여 안정성 방정식 (8), (9)로의 전환이 가능하게 된 것이다. 이와 같은 절차가 전파이론의 핵심으로 deep-pool 계에 대하여 본 이론의 적용이 가능한 것으로 판단된다.

## 2-3. 해 절차

Prandtl 수가 매우 큰 유체에서 대류항의 영향은 관성항의 영향보다 강해질 것이다. 따라서 식 (8)에서 관성항을 무시하고 deep-pool 계의 가정하에서 식 (9)와 결합하여 열침투층 내부와 외부로 나누어 아래와 같이 정리한다.

$$\left[ (D^2 + \frac{20}{3} \zeta D - a^{*2}) (D^2 - a^{*2})^2 - Ra^* a^{*2} (D \theta_0) \right] w_a^* = 0 \quad \text{for } 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (10)$$

$$(D^2 + \frac{20}{3} \zeta D - a^{*2}) (D^2 - a^{*2})^2 w_b^* = 0 \quad \text{for } \zeta \geq 1 \quad (11)$$

여기서 하첨자 a, b는 각각 열침투층 내부와 외부를 의미한다.

Prandtl 수가 매우 클 경우 두 고정경계면 경계조건과 열침투층  $\zeta=1$ 에서 속도, 온도, 전단력 등이 연속이라는 것을 고려함으로써 다음과 같은 관계를 얻는다.

$$w_a^* = Dw_a^* = \theta^* = 0 \quad \text{at } \zeta = 0 \quad (12)$$

$$D^n w_a^* = D^n w_b^* : n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad \text{at } \zeta = 1 \quad (13)$$

$$w_b^* = Dw_b^* = \theta^* = 0 \quad \text{at } \zeta \rightarrow \infty \quad (14)$$

앞에서 유도한 식 (10)에서 열침투층 안의 해  $w_a^*$ 는 급격히 수렴하는 멱급수 형태로 놓고 경계조건 (12)식을 이용하여 다음과 같이 얻는다.

$$w_a^* = H_2 [f^{(2)}(\zeta) + \frac{a^{*2}}{6} f^{(4)}(\zeta)] + H_3 f^{(3)}(\zeta) + H_5 f^{(5)}(\zeta) \quad (15)$$

$$f^{(i)}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)} \zeta^n \quad (16)$$

여기서  $H_2, H_3, H_5$ 는 임의의 상수이고  $b_n^{(i)}$ 는 식 (16)을 (10)식에 대입함으로써 결정된다. 또한 열침투층 밖의 해  $w_b^*$ 는 식 (11)을 다음과 같이 두 단계로 나누어 구한다.

$$(D^2 + \frac{20}{3} \zeta D - a^{*2}) Y = 0 \quad (17)$$

$$(D^2 - a^{*2})^2 w_b^* = Y \quad (18)$$

식 (17)에서 Y는 WKB 법으로 구하고, 특이해를 쉽게 구하기 위하여  $s = \zeta - 1$ 로 놓고 (17)식을 t에 관한 미분방정식으로 변형한 후  $\zeta=1$ 에서 Y와 Y'를 초기치로 하여 (17)식의 해를 멱급수 형태로 구하고, (18)식에서 "inverse operator" 기법을 이용하여  $w_b^*$ 를 구하면 다음과 같다.

$$w_b^* = H_6 e^{-a^* s} + H_7 s e^{-a^* s} + \frac{H_8}{4a^{*2}} [e^{a^* s} g(s) + e^{-a^* s} h(s)] \quad (19)$$

여기서  $H_6, H_7, H_8$ 는 임의의 상수이며,  $g(s)$ 와  $h(s)$ 는 (18)식으로부터 쉽게 결정될 수 있다. 이렇게 구한 속도 교란식의 해 (15)식과 (19)식을  $\zeta=1$ 에서의 경계조건 (13)식을 사용하여 서로 결합시킨다.

반대로 Prandtl 수가 작아지면 유동의 안정성에 대한 관성항의 영향이 대류항보다 커질 것이다. 본 연구에서는  $Pr \rightarrow 0$ 인 극한 경우에 대하여 대류항이 극히 작을 것이라는 점을 고려하여 대류항을 무시하고 열교란량

$\theta^*$ 를 소개하면 다음과 같은 식들이 얻어진다.

$$\left[ (D^2 + \frac{20}{3} \zeta D - a^{*2}) (\zeta D^3 - a^{*2} \zeta D + 2a^{*2}) - \frac{3}{20} Pr Ra^* a^{*2} (D \theta_0) \right] w_a^* = 0 \quad \text{for } 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (20)$$

$$(D^2 + \frac{20}{3} \zeta D - a^{*2}) (\zeta D^3 - a^{*2} \zeta D + 2a^{*2}) w_b^* = 0 \quad \text{for } \zeta \geq 1 \quad (21)$$

Prandtl 수가 작을 경우에는 하부 가열면에서 slip 조건을 적용하므로 식 (14)에서  $Dw_a^*=0$ 의 조건은 제외되고, 식 (13)에서  $n=0, 1, 2, 3, 4$ 가 된다.

따라서 (21)식에서, 속도 교란량  $w_a^*$ 의 해를 Frobenius 방법과  $\zeta=0$ 에서의 경계조건을 적용하여 다음과 같이 구한다.

$$w_b^* = G_2 g_2 + G_3 g_3 + G_4 g_4 \quad (22)$$

$$g_2 = \zeta + (a^{*2} - \frac{20}{3} a^{*2} - \frac{3}{10} Pr Ra^* a^{*2}) \zeta^5 + \dots$$

$$g_3 = \zeta^2 - (Pr Ra^* a^{*2} / 4800) \zeta^6 + \dots$$

$$g_4 = \zeta^3 + (a^{*2} - \frac{10}{3}) \zeta^5 + \dots$$

위에서  $G_2, G_3, G_4$ 는 임의의 상수이다.  $\zeta \geq 1$ 인 경우  $w_b^*$ 는 Prandtl 수가 매우 큰 경우와 유사한 방법으로 식 (21)을 두 단계로 나누어 다음과 같이 구한다.

$$w_b^* = (G_5/2) [(1-a^*) \exp(-a^* \zeta) + a^{*2} \zeta^2 E_1] + G_6 (\exp(a^* s) \sum_{n=0}^{\infty} D_n s^n + \exp(-a^* s) \sum_{n=0}^{\infty} E_n s^n) \quad (23)$$

여기서  $G_5, G_6$ 는 임의의 상수이고  $E_1 [= \int_{\zeta}^{\infty} \exp(-a^* x)/x dx]$ 는 지수함수이며  $D_n$ 과  $E_n$ 은 식 (21)에 의하여 결정된다. 또한  $w_a^*$ 와  $w_b^*$ 를 결합하기 위하여  $\zeta=1$ 에서의 경계조건을 적용한다.

Prandtl 수가 클 경우 안정성 해석은  $6 \times 6$  행렬의 고유치 문제이며, 고유치는  $a^*$ 와  $Ra^*$ 로 구성되는데 주어진  $a^*$ 에 대하여  $Ra^*$ 를 구한다. 이러한 결과들로부터 한계안정성 곡선을 작성하여 최소의  $Ra^*$ 와  $a^*$ 를 구하면 이 값이 자연대류 발생시점을 나타내는 임계조건이 된다. Prandtl 수가 작을 경우는  $5 \times 5$  행렬의 고유치 문제이며 고유치는  $a^*$ 와  $PrRa^*$ 로 구성된다. 이와 같은 해 절차는 Lee 등[7, 8]의 논문에 잘 서술되어 있다.

## 2-4. 결과 및 검토

정지된 수평유체층에서 밀면을 등온으로 가열할 때, 자연대류 발생시점을 나타내는 임계값들을  $Pr \rightarrow \infty$ 와

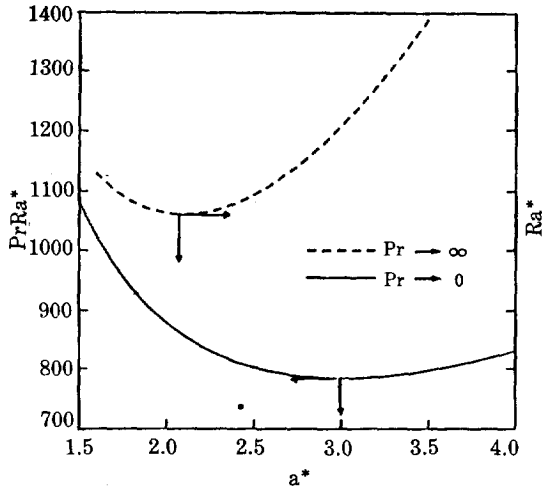


Fig. 3. Marginal stability curve for limiting cases.

$Pr \rightarrow 0$ 의 두 극한치에 대하여 구하였다. 관련된 한계 안정성 곡선이 Fig. 3에 제시되어 있다. 한계 안정성 곡선에서 나타난 임계값은  $Pr \rightarrow 0$ 인 경우  $a_c^* = 3.00$ ,  $PrRa_c^* = 784$ 이며  $Pr \rightarrow \infty$ 인 경우는  $a_c^* = 2.10$ ,  $Ra_c^* = 1061$ 이다. 전파이론을 적용하여 결정론적인 방법으로 구한 이 임계값들은 열침투층깊이  $\delta$ 에 근거를 두었으므로, 이것을 무차원시간과의 관계를 사용하여 요약하면 안정성 판별기준은 다음과 같다.

$$Ra_c = 21.8 \tau_c^{-\frac{1}{2}} \text{ and } a_c = 0.206 Ra_c^{\frac{1}{2}} \text{ for } Pr \rightarrow \infty \quad (24)$$

$$Ra_c = 16.1 \tau_c^{\frac{1}{2}} Pr^{-1} \text{ and } a_c = 0.325 (Pr Ra_c)^{\frac{1}{3}} \text{ for } Pr \rightarrow 0 \quad (25)$$

위의 (24)와 (25)식을 근거로 Prandtl 수 전 범위에 대하여 관계식을 구성하면 다음과 같다.

$$\tau_c = A [(1 + 0.739/Pr)/Ra_c]^{\frac{2}{3}} \quad (26)$$

$$a_c = 0.325 [(1/Pr + 3.93)/Ra_c]^{\frac{1}{3}} \quad (27)$$

여기서 A 값은 7.80이다. 위 두 식들로부터 Rayleigh 수가 커질수록 임계시간은 작아지고 임계파수는 더 커진다는 것을 알 수 있다. 또한 일정한 Rayleigh 수에 대하여, Prandtl 수가 감소할수록 임계시간  $\tau_c$ 는 증가한다. 이로부터 관성항은 계를 안정하게 하고, 대류항은 계를 불안정하게 한다는 것을 알 수 있다.  $Pr > 10$  일 경우 임계조건들에 대한 Prandtl 효과는 매우 약하다. 이러한 경향은 많은 연구[7, 8, 11]에서 보고되었으며 Fig. 4는 이를 매우 잘 설명하고 있다.

황산구리용액에서 구리이온이 전기도금되는 계에서 Patrick과 Wrang[12]는 식 (26)에서의 A 값이 32.5

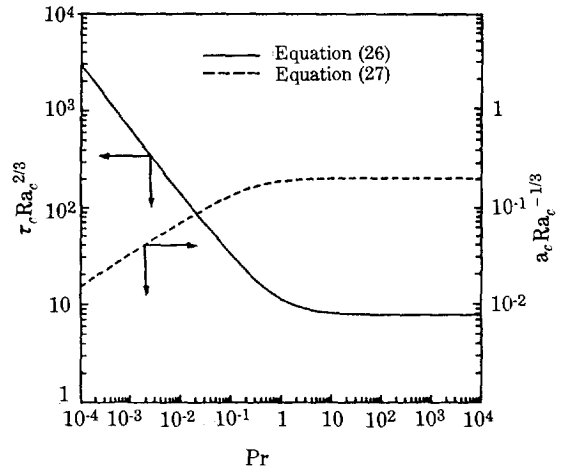


Fig. 4. Effect of Prandtl numbers on critical conditions.

가 된다는 실험적인 결과를 보고하였다. 그들은 Prandtl 수가 2000보다 큰 범위에서 실험을 했으며, 그들의 임계시간은 본 연구에서 얻은 임계시간보다 약 4배만큼 컸다. 또한 같은 계에 대한 Kim 등[13]의 실험에서 A 값은 36.9이었으며, Inoue 등[14]은 A = 39.5의 값을 얻었다. 이와 같은 실험결과들은 모두 가시대류가  $4\tau_c$  이상에서 감지됨을 보이고 있다.

임계시간에 있어서 4배정도의 차이는 Choi 등[7, 8, 15]이 이미 보고한 바와 같이 초기에 발생된 자연대류가 측정될 수 있을만큼 성장하는 데 필요한 시간을 나타내는 것으로 추측된다. 이와 같은 경향은 일정 열속으로 가열되는 계[7], 일정비율로 냉각되는 계[15], 수평다공성 매질계[16]에서도 명백히 나타난다. 또한 Patrick과 Wrang[12]의 실험에서도 자연대류가 그들의 임계시간 이전에 발생된다는 것을 확인한 바 있다. 따라서 본 연구에서는 임계시간  $\tau_c$ 의 4배가 되었을 때를 가시대류라고 보았다.

본 연구에서 구한 진폭함수를 자연대류 발생시점에서 도시하여 보면 Fig. 5와 같다. 속도 및 온도 교란에 대한 진폭함수들은 각각의 최대값으로 규격화한다. Prandtl 수가 작아짐에 따라 속도 및 온도 교란량의 최대치가 하부 가열면쪽으로 접근한다는 것을 알 수 있다. 또한 속도 교란량은 Prandtl 수가 클 때 열침투층 밖에도 상당량 존재한다는 것을 보여주고 있다. 이러한 사실로부터 온도 교란만의 bottling 효과를 가정한 Choi 등[4]의 수정동결시간 모델이 어느 정도 합리적인 방법임이 증명된다.

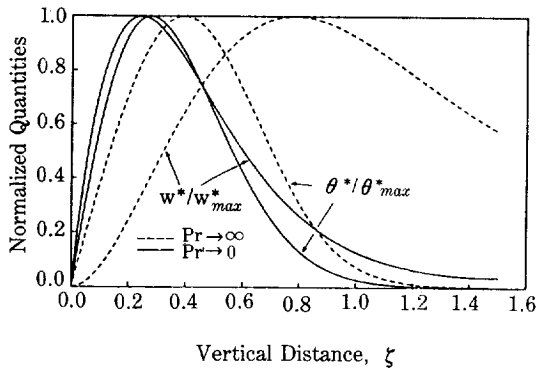


Fig. 5. Distribution of normalized amplitude functions at critical conditions.

### 3. 열전달 상관 관계식

Rayleigh 수가 매우 클 때 자연대류의 발생시점이 난류 열대류와 상호연관이 있을 것이라는 경계층 불안정성 모델이 Howard[9]와 Busse[10] 등에 의하여 제의되었다. 이러한 개념을 적용하여 최근에 Choi 등[6]과 Lee 등[8]은 열전달 상관 관계식을 Prandtl과 Rayleigh 수의 함수로서 얻은 바 있다.

경계층 불안정성 모델에 의하면 내부의 난류중심은 강한 에디 때문에 등온이 되고 무차원 열전도층 두께  $\delta^*$ 가 열전달을 결정하는 데 지배적인 역할을 한다[10]. 이에 의거 본 연구에서는 Rayleigh 수가 매우 클 때 완전히 발달된 난류상태에서의 Nusselt 수를 다음과 같이 정의한다.

$$Nu = \frac{Q_{actual}}{Q_{conduction}} = \frac{\Delta T^*}{\Delta T} \frac{1}{\delta^*} \quad (28)$$

여기서  $Q_{actual}$ 은 실제적으로 열이 전달된 양이고  $Q_{conduction}$ 은 전도에 의하여 열이 전달된 양을 의미하며  $\Delta T^* = \Delta T/2$ 의 관계가 된다.

따라서 Nusselt 수는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$Nu = \frac{1}{2} \left( \frac{Ra}{2Ra^*} \right)^{1/3} \quad \text{for } Ra \rightarrow \infty \quad (29)$$

여기서  $Ra^*$ 는  $\delta^*$ 를 기준으로 한 Rayleigh 수이며, 위의 식 (29)에 본 연구에서 구한 임계조건  $Ra_c^*$ 를 도입하면  $\delta^* = (1/2)^{1/3} \delta_c$ 의 관계가 된다.

$\tau_c$ 에서 발생된 초기 교란량들은  $4\tau_c$  이후에 명백한 대류현상을 보인다는 것이 이미 전파이론으로 구한 임계값과 기존의 실험결과를 비교함으로써 도출된 바 있다. 따라서 가시대류가 일어나는 점에서 Nusselt 수는 식 (5)를 사용하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$Nu|_{\tau=\tau_c} = Nu_c/2 \quad (30)$$

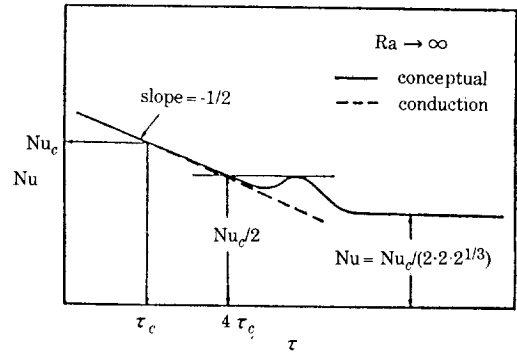


Fig. 6. Conceptual diagram of heat transport.

여기서  $Nu_c = 2/\delta_c$ 이고  $\delta_c$ 는 Fig. 6에서 보이듯이 임계점에서의 열침투층 두께이다.

따라서 식 (28)로부터 정의된 Nusselt 수는 위의 관계를 사용하여 다음과 같이 얻는다.

$$Nu = \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2^{1/3}} \right) Nu_c \quad (31)$$

즉  $\tau_c$ 에서 발생된 자연대류는  $4\tau_c$ 가 될 때까지 성장하여,  $4\tau_c$  이후에는 Nusselt 수는 전도식으로부터 명백히 벗어나고 궁극적으로 식 (31)과 같은 상태로 된다. Fig. 6에서는 이와 같은 열전달을 개념적으로 나타내고 있다.

Rayleigh 수가 매우 클 때 전파이론에서 구한 (26) 식을 (31)식에 대입하면 Nusselt 수는 다음과 같이 된다.

$$Nu = \frac{0.0389 Ra^{1/3}}{(1 + 0.739/Pr)^{1/3}} \quad (32)$$

$Ra \rightarrow 1708$ 일 때 Gough 등[17]은 roll에 대하여 다음의 관계를 제시하였다.

$$Nu = 1 + (Ra/1708 - 1)/0.692 \quad \text{for } Ra \rightarrow 1708 \quad (33)$$

식 (32)와 (33)을 Choi 등[6]과 Long[18]의 열전달 상관 관계식을 기초로 하여 통합하면 새로운 상관 관계식을 다음과 같이 얻는다.

$$Nu = 1 + \frac{0.0389 (Ra^{1/3} - 1708^{1/3})}{B^{1/3} [1 - 1.86 (1 - 0.187/B^{1/4}) (NuRa)^{-1/12}]^{4/3}} \quad (34)$$

여기서  $B = 1 + 0.739/Pr$ 이며, Nusselt 수는 식 (34)에서 보는 바와 같이 Prandtl 수와 Rayleigh 수의 함수이다.

난류 열전달에 대한 새로운 상관식 (34)식을 Prandtl 변화에 따른 많은 실험결과들[19-22]과 비교하여 보았다. Fig. 7에서 실선으로 나타난 새로운 열전달 상관식은 Prandtl 수에 따른 실험값들의 실제적인 난류 열전달을 잘 묘사하고 있다.

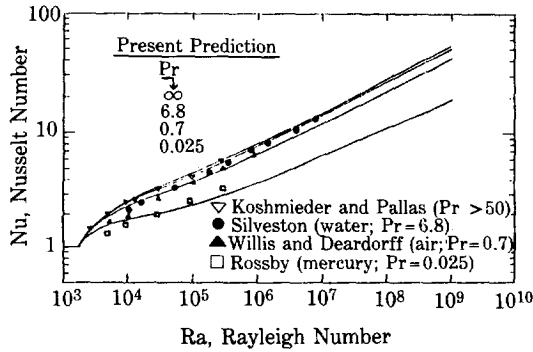


Fig. 7. Comparison of Nu vs. Ra between experiments and present predictions.

#### 4. 결 론

일정한도로 밀면이 가열되는 정지된 수평유체층에서 자연대류 발생시점을 전파이론을 도입함으로써 해석하였다. 자연대류 발생시점을 나타내는 안정성 판별기준을 Prandtl 수와 Rayleigh 수의 함수로서 결정론적으로 얻었다. 이러한 안정성 판별기준을 사용하여 난류 열전달특성을 예측할 수 있는 상관식을 얻었고 이 열전달 상관식은 Prandtl 수 변화에 따른 실험치들과 잘 일치하였다. 따라서 본 연구는 전파이론을 적용시켜 얻은 임계조건들이 난류 열대류를 이해하는데 합리적인 기초를 제공한다는 것과 새로운 상관식이 Rayleigh와 Prandtl 수의 함수로서 열전달특성을 일괄성있게 예측할 수 있다는 것을 보여주고 있다.

#### 감 사

본 연구를 지원해 준 한국과학재단에 감사드리며 본 논문의 요지가 1987년 국제유체역학회의(Int. Conf. Fluid Mechanics, Beijing)에서 발표되었음을 밝히둔다.

#### NOMENCLATURE

- $a$  : dimensionless wave number,  $(a_x^2 + a_y^2)^{1/2}$
- $a^*$  : modified wave number,  $a \delta$
- $d$  : fluid layer thickness, m
- $G_i$  : arbitrary constant defined by equation (22)
- $g$  : gravitational acceleration,  $m/s^2$
- $H_i$  : arbitrary constant defined by equation (15)
- $Nu$  : Nusselt number,  $hd/k$
- $Pr$  : Prandtl number,  $\alpha/\nu$

- $Q$  : heat flux,  $J/m^2s$
- $Ra$  : Rayleigh number,  $g\beta\Delta Td^3/\alpha\nu$
- $Ra^*$  : modified Rayleigh number,  $Ra\delta^3$
- $s$  :  $\zeta - 1$
- $t$  : time, s
- $W$  : vertical velocity, m/s
- $w$  : dimensionless vertical velocity,  $\alpha W/d$
- $w^*$  : amplitude of velocity disturbances defined by equation (7)
- $x, y$  : dimensionless horizontal coordinates
- $Z$  : vertical distance, m
- $z$  : dimensionless vertical distance,  $Z/d$

#### Greek Letters

- $\alpha$  : thermal diffusivity,  $m^2/s$
- $\beta$  : coefficient of thermal expansion,  $K^{-1}$
- $\delta$  : thermal penetration depth
- $\delta^*$  : conduction layer thickness
- $\zeta$  : similarity variable,  $z/\delta$
- $\theta$  : dimensionless temperature
- $\tau$  : dimensionless time,  $ta/d^2$
- $\nu$  : kinematic viscosity,  $m^2/s$

#### Subscripts

- $a$  : refers to the disturbance within the thermal boundary layer
- $b$  : refers to the disturbance outside the thermal boundary layer
- $c$  : refers to the critical state
- $x, y$  : refers to the horizontal coordinates
- $0$  : refers to the unperturbed state
- $1$  : refers to the perturbed state

#### REFERENCES

1. Morton, B.R.: *J. Mech. Appl. Math.*, **10**, 433 (1957).
2. Foster, T.D.: *Phys. Fluid*, **8**, 1249 (1965).
3. Jhaveri, S.B. and Homsy, M.G.: *J. Fluid Mech.*, **114**, 251 (1982).
4. Choi, C.K., Kim, J.J., and Hwang, S.T.: *Korean J. of Chem. Eng.*, **2**, 17 (1985).
5. Choi, C.K., Shin, C.B., and Hwang, S.T.: Proc. 8th Int. Heat Transfer Conf., pp. 1389-1394, San Francisco (Aug. 17-22, 1986).
6. Choi, C.K., Lee, C.S., and Kwon, D.H.: Proc. PACHEC '83, 2, pp. 19-24 (1983).
7. Lee, J.D., Choi, C.K., and Shin, C.B.: *Hwahak, Konghak*, **26**(3), 330 (1988).
8. Lee, J.D., Choi, C.K., and Yoon, D.Y.: The First

- KSME-JSME Thermal and Fluids Eng., Conf., 2, pp. 342-347, Seoul (Nov. 1-3, 1988).
9. Howard, L.N.: Proc. 11th Int. Cong. Applied Mech., pp. 1109-1115, Munich (1964).
10. Busse, F.H.: *J. Math. Phys.*, **46**(2), 140 (1967).
11. Ahn, D.J. and Choi, C.K.: *Korean J. of Chem. Eng.*, **5**(2), 170 (1988).
12. Patrick, M.A. and Wragg, A.A.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **18**, 1397 (1975).
13. Kim, L.H., Park, I.J., Choi, C.K., and Lee, J.D.: *Hwahak, Konghak*, **26**(5), 453 (1988).
14. Inoue, Y., Akutagawa, S., Saeki, S., and Ito, R.: *Kagaku Kagaku Rhobunshu*, **9**, 359 (1983).
15. Yoo, J.S. and Choi, C.K.: *Korean J. of Chem. Eng.*, **4**(2), 128 (1987).
16. Yoon, D.Y., Choi, C.K., and Yoo, J.S.: *Hwahak Konghak*, **26**(6), 607 (1988).
17. Gough, D.O., Spiegel, E.A., and Toomre, J.: *J. Fluid Mech.*, **68**, 695 (1975).
18. Long, R.R.: *J. Fluid Mech.*, **73**, 445 (1971).
19. Koschmieder, E.L. and Pallas, S.G.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **17**, 991 (1974).
20. Silveston, P.L.: *Forsh. Geb. Ingen.*, **24**, 59 (1958).
21. Willis, G.E. and Deardorff, J.W.: *Phys. Fluids*, **10**, 1861 (1967).
22. Rossby, H.T.: *J. Fluid Mech.*, **36**, 309 (1969).