

Draw Resonance 이론의 재조명

현재천·오주석*·이승종*

고려대학교 공과대학 화학공학과

*서울대학교 공과대학 화학공학과

(1989년 4월 11일 접수, 1989년 8월 8일 채택)

A Refocus on the Draw Resonance Theory

Jae Chun Hyun, Joo Seok Oh*, and Seung Jong Lee*

Department of Chemical Engineering, College of Engineering, Korea University, Seoul 136-701, Korea

Department of Chemical Engineering, College of Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea

(Received 11 April 1989; accepted 8 August 1989)

요 약

본 논문의 저자 중의 하나가 발표했던 Draw Resonance 이론을 수치해석적 방법으로 다시 연구해 본 결과, 용융방사에서 생기는 불안정성인 Draw Resonance를 설명하는, 원래 제안했던, Waves의 전파시간을 기초로 한 역학적 관계식이 옳다는 것이 밝혀졌다. 또한 Draw Resonance 조건식에 두 개의 전파시간, 즉 Throughput Waves의 전파시간과 유체 입자의 전파시간[Threadline(糸線)의 속력에 근거한 시간] 이외에 주기적으로 변하는 사선의 힘과 단면적의 위상차(시간차)를 포함시켜야 함도 아울러 밝혀졌다. 간단한 Newtonian 유체를 Model로 해서, 수정된 Draw Resonance식을 풀 결과, 임계연신비 r_c 의 값이 20.21로 나와서 다른 연구자들의 결과(전파시간 개념을 쓰지 않는 단순한 수치모사 계산)와 같게 되었다.

Abstract—The draw resonance theory published by one of the present authors, has been numerically restudied to confirm the correctness of the originally proposed kinematics (based on the concept of the waves traveling times) for the onset of draw resonance instability in melt spinning. It also has been found that the draw resonance criterion should include not only the two traveling times, i.e., the throughput wave traveling time and the fluid element traveling time (based on the threadline velocity), but also the phase difference (time difference) between the fluctuations of the threadline force and the threadline cross-sectional area. Using the simple model of Newtonian fluids into the revised draw resonance criterion, we have got the value of 20.21, for r_c (critical draw ratio at the onset of draw resonance), which is the same value obtained by other researchers who employed direct numerical simulation methods without the concept of kinematics of the traveling waves.

1. 서 론

용융방사에서 생기는 대표적 불안정성인 Draw Resonance는 1960년대 초반에 Christensen[1]과 Miller[2]에 의해 발견, 명명된 이래 많은 실험 논문들

이 발표돼 왔다(예를 들면, Bergonzoni와 Dicresce [3], Han 등[4], Minoshima와 White[6] 등). 한편, 지배방정식을 이용한 이론적 연구는 아래 4그룹에 의해서 주도돼 왔다. 1) Kase와 Matsuo[7]를 시작으로 한 일본연구팀. 2) Pearson과 Matovich[8]를

시작으로 한 영국연구팀. 3) Fisher와 Denn[9]을 시작으로 한 미국 Delaware대학팀. 4) Ide와 White[10]와 Matsumoto와 Bogue[11] 등을 중심으로 한 미국 Tennessee대학팀. 위의 그룹들에 의한 연구결과 중 중요한 결론은 다음과 같다.

1. Draw Resonance는 Hydrodynamic 불안정성이고, 유체의 점탄성은 그 원인이 아니며 단지 그 결과에 영향을 줄 뿐이다.

2. 따라서, 탄성이 없는 Newtonian 유체의 방사에 서도 Draw Resonance가 생길 수 있다.

3. 여러가지 유체들(예를 들면, Newtonian 유체, power-law 유체, convected Maxwell 유체 등)에 대한 수치해석적 계산에 의해, 임계연신비 r_c 의 값을 Weissenberg Number 등과 같은 계수들의 함수로서 구할 수 있다.

4. 비등온(Non-isothermal) 방사공정에서의 Draw Resonance도 지배방정식에 에너지 수지식을 포함시켜 풀으로써, r_c 의 Stanton Number 등에 대한 함수 의존도를 계산해 낼 수 있다.

그러나, 위의 결과들은 모두 비선형방정식을 단순히 수치계산으로 풀어서 나온 것으로, Draw Resonance가 왜 생기는가의 근본적 문제는 밝혀내지 못했다.

그 후 Hyun[12]이 Draw Resonance가 일어나는 근본원인은 두 개의 Waves의 전파시간(spinneret에서 take-up까지의 Traveling time)의 상관관계에 기인한 것임을 밝히고, Draw Resonance가 생기는 원인식을 2개의 Throughput Waves의 전파시간과 유체입자 전파시간이 같게 되는 식으로 유도했다(즉, 한 개의 Positive throughput wave와 또 한 개의 Negative throughput wave가 유체입자의 전파시간 내에 전파될 수 있으면 Draw Resonance 불안정성이 생긴다). Newtonian 유체의 경우 위의 조건식을 풀면 r_c 가 19.744가 되어 수치계산에 의한 값 20.21과 비슷하게 나왔고, power-law 유체나 Maxwell 유체의 경우도 거의 비슷한 결과가 나왔다.

위의 결과들에 대하여 Denn[13]이 몇 가지 의문점을 제시했다.

1. Throughput Wave의 속력을 구하는 식에 나오는 $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_A$ 항의 계산을 위해선 (x, t) 좌표계에서 $[x, A(x, t)]$ 좌표계로의 변환이 필요한데, Jacobian, $\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_x$ 이 영(零)이 될 수 있으므로 불가하다.

2. Newtonian 유체의 경우, 임계연신비, r_c 의 값이 20.21이 되어야 한다.

3. Throughput Wave의 속력이 x 의 함수이다.

본 논문에서는 위 의문점들에 대한 정확한 답을 얻기 위해서, (x, t) 좌표계에서 Ishihara와 Kase[14]의 방법과 비슷한, 그러나 더 세밀한 수치계산을 해 본 결과를 간단히 설명하고, 자세한 수치계산의 내용 등은 따로 보고할 예정이다.

2. 결과 및 토론

다른 유체의 경우도 마찬가지이므로, 여기에서는 간단한 Newtonian 유체 Model을 써서 Draw Resonance를 설명하기로 한다. 지배방정식과 Throughput Wave의 속력식 등을 이미 발표된 논문들에서 설명없이 옮겨 쓰기로 한다(Hyun[12, 15]를 참고).

Continuity Equation :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial(AV)}{\partial x}\right)_t = 0 \quad (1)$$

Equation of Motion :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\mu A \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \right]_t = 0 \quad (2)$$

(1)식에서 다음 식이 유도된다.

$$\left[\frac{\partial(AV)}{\partial t} \right]_t + U \left[\frac{\partial(AV)}{\partial x} \right]_t = 0 \quad (3)$$

여기서 U 는 Throughput Wave의 속력으로 다음과 같이 정의된다.

$$U \equiv \left[\frac{\partial(AV)}{\partial A} \right]_x = - \frac{A \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_A}{\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_{AV}} \quad (4)$$

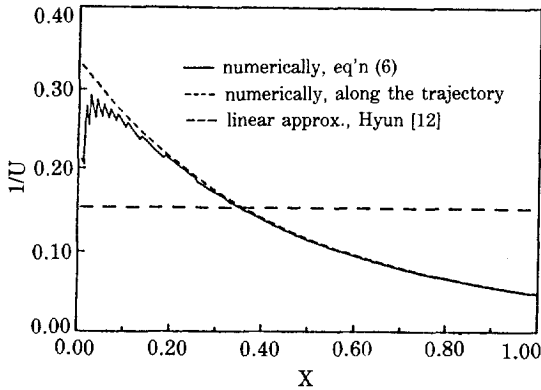
Newtonian 유체의 경우는 다음과 같이 된다.

$$U = \left(\frac{L}{\ln r} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_A \quad (5)$$

이제 이 U 를 구하기 위해서, $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_A$ 를 (x, t) 좌표계의 편미분항들로 전개하면 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_A &= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_t + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_x \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_A \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_t - \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_x \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_x \end{aligned} \quad (6)$$

Denn이 지적한대로 위 식 (6)은 $\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_x$ 가 영(零)이 되면 불가능하지만, 실제 수치계산에서는 아래와 같은 이유로 아무런 문제가 없고 따라서, $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_A$ 와 U 의

Fig. 1. Calculation of t_L .

값을 쉽게 구할 수 있다.

1) 수치계산에서는 $(\frac{\partial A}{\partial t})_x = 0$ 이 되는 점들을 A(x, t)곡선에서 제거할 수 있고, 따라서 A 곡선의 piecewise continuity를 유지할 수 있다. 2) 더 중요한 점은, 우리가 얻고자 하는 값이 Throughput Wave의 전파시간, 즉 $t_L \equiv \int_0^L \frac{dx}{U}$ 이고 U 자체의 값이 아니기 때문에, $(\frac{\partial A}{\partial t})_x = 0$ 이 되는 점들은 U를 무한대로 만들고 t_L 값에는 아무런 기여를 하지 않는다.

따라서 Denn의 첫번째 의문점이 해소되고, 실제 수치계산에서 식 (6)을 써서 U와 t_L 을 구할 수 있다. Fig. 1에서 보는 바와 같이 t_L 은 $1/U$ 곡선 밑의 면적이 된다.

(x, t)좌표계에서의 t_L 계산은 Fig. 2에서와 같이 $AV = \text{constant} = 1.0$ 의 궤적을 (Throughput Wave의 trajectory) 측정해서도 쉽게 구할 수 있다.

Denn이 지적한 세번째 문제는 (즉, U가 x에 대해서 상수가 아니라는 점) Fig. 1에서 보듯이 Denn이 옳고, 단지 Hyun[12]이 사용한 근사치인 U가

$$U \equiv \frac{V_0(r-1)}{\ln r} \quad (7)$$

왜 r_c 계산에 작은 오차를 낼 수 있는가는, $1/U$ 밑의 면적과 (7)식에 의한 직선 $1/U$ 밑의 면적이 거의 같은 것으로 설명될 수 있다.

Denn의 두번째 문제에 대해서 다음과 같은 새로운 Draw Resonance 조건식이 성립한다는 것을 본 수치계산의 결과 알게 되었다. 즉 임계연신비, r_c ,를 계산하는 식이 다음과 같게 된다.

$$2t_L + (\Delta t) = \tau_L \quad (8)$$

여기서 $t_L \equiv$ Throughput 전파시간 (traveling time)

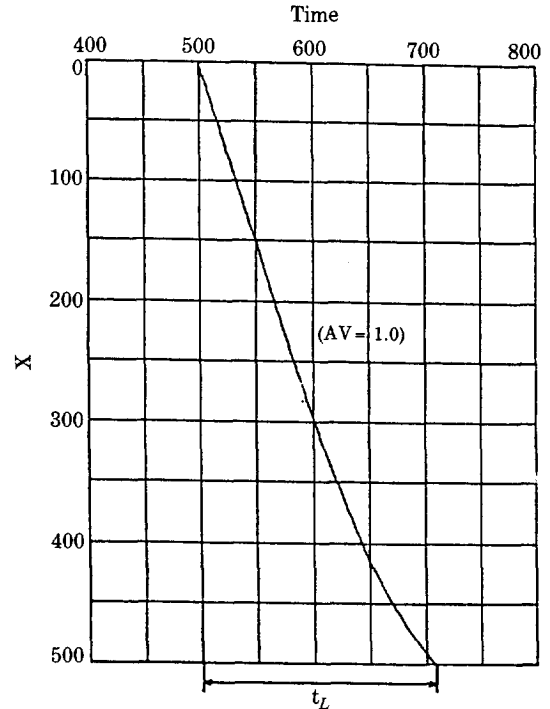


Fig. 2. A constant throughput trajectory.

$$\equiv \int_0^L \frac{1}{U} dx \quad (9)$$

$\tau_L \equiv$ 유체전파시간 (fluid element traveling time)

$$\equiv \int_0^L \frac{1}{V} dx$$

$\Delta t =$ 사선 (Threadline)의 힘과 take-up에서의 단면적 사이의 위상차 (시간차)

Draw Resonance 조건식 (8)에 과거에 보고한 식 (Hyun[12])과 달리 (Δt) 항이 들어가는 것이 본 논문의 가장 중요한 점으로, 다음과 같은 설명이 필요하다.

Draw Resonance가 생기는 kinematics는 근본적으로 두 개의 Throughput Waves (한 개의 Positive Wave와 한 개의 Negative Wave)가 하나의 유체전파시간 (즉 τ_L)내에 전파될 수 있으면 되는 데, 실제로 Positive Wave와 Negative Wave 사이에 Δt 만큼의 시간차가 존재하므로 식 (8)이 성립하게 된다. Hyun[12]은 이 점을 간과해서 Draw Resonance 조건식으로

$$2t_L = \tau_L \quad (10)$$

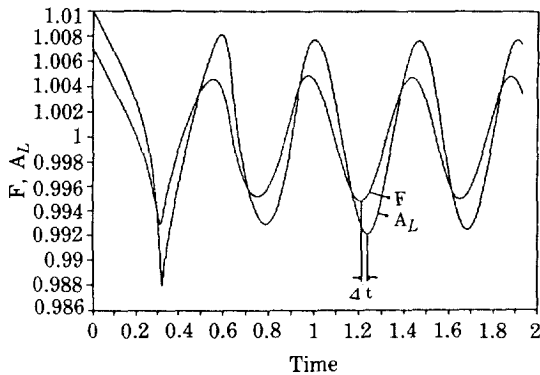


Fig. 3. Oscillations of threadline force and of threadline cross-sectional area at $x=L$ (take-up).

를 유도했었다.

하나의 Throughput Wave가 다른 부호의 Throughput Wave를 유발하는 과정은

Throughput Wave → Threadline의 힘변화 → 다른 부호의 Throughput Wave → Threadline 힘변화 →

으로 되는 데 식 (2)에서 유도되는 식

$$F = \mu A \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad (11)$$

에서 보는 바와 같이 A 와 F 는 이론적으로 in-phase가 될 수 없고, 반드시 위상차(시간차)가 A 와 F 사이에 존재하게 되고, 따라서 Positive Wave(Disturbance)와 Negative Wave(Disturbance) 사이에도 같은 시간차가 존재하게 된다. 이때 시간차(Δt)는 수치계산으로 구할 수 있고, Fig. 3에서 그 한 예를 볼 수 있다. 실제로 Fisher와 Denn[16]도 이 위상차를 발견했지만, 수치계산상의 오차로 잘못 판단했었다.

임계연신비, r_c ,를 식 (8)로 계산하면 정확히 20.21로 되어서 본 논문의 이론이 맞다는 것이 증명된다. Fig. 4(a)는 식 (10)을 사용한 Hyun[12]의 근사치($r_c=19.744$)를 보여주고 있고, Fig. 4(b)는 식 (8)을 사용한 정확한 값($r_c=20.21$)을 보여주고 있다.

3. 결 론

Throughput Waves의 전파시간과 유체전파시간과의 관계식으로 설명되는 Hyun[12]의 Draw Resonance 이론의 정당성을, (x, t)좌표계에서 Newtonian 유체를 Model로 수치계산에 의해 증명했다. Draw

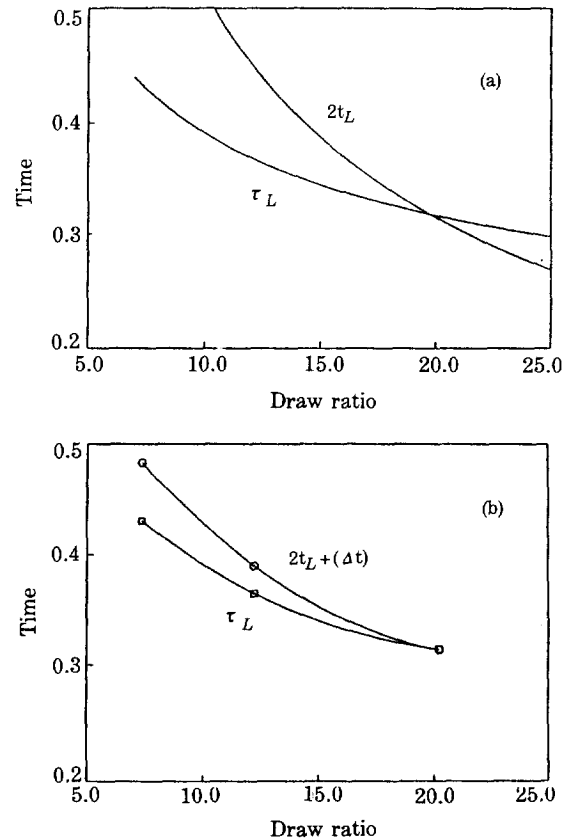


Fig. 4. Calculation of r_c (a) the approximate draw resonance criterion, $2t_L = \tau_L$, and (b) the exact draw resonance criterion, $2t_L + \Delta t = \tau_L$.

Resonance 조건식에 Threadline의 힘(F)과 take-up에서의 단면적(A_L) 사이의 위상차(시간차)를 포함시킴으로써 임계연신비, r_c ,의 값이 다른 연구자들의 단순수치계산(Waves를 기초로 한 Kinematics의 개념이 없는)에 의한 값과 똑같은 20.21이 되는 것을 보였다. 이로서 Draw Resonance 이론이 완전히 정립되었고, 다른 유체들의 경우도 마찬가지로의 결과가 나오게 된다. 본 연구의 자세한 수치계산의 결과는 따로 보고할 예정이다.

NOMENCLATURE

- A : threadline cross-section
- A_L : threadline cross-section at the take-up
- F : threadline force
- L : distance from spinneret to take-up
- r : draw-down ratio

- r_c : critical draw-down ratio
 t : time
 t_L : traveling time of throughput wave from spinneret to take-up
 U : velocity of throughput wave
 V : velocity of threadline
 x : distance from spinneret
 μ : viscosity of Newtonian fluids
 τ_L : traveling time of fluid element from spinneret to take-up

REFERENCES

1. Christensen, R.E.: *SPE J.*, **18**, 751 (1962).
2. Miller, J.C.: *SPE Trans.*, **3**, 134 (1963).
3. Bergonzoni, A. and Dicresce, A.J.: *Poly. Eng. Sci.*, **6**, 45 (1966).
4. Han, C.D., et al.: *J. Appl. Poly. Sci.*, **19**, 3291 (1972).
5. Donnelly, G.J. and Weinberger, C.B.: *Ind. Eng. Chem. Fundamentals*, **14**, 334 (1975).
6. Minoshima, W. and White, J.L.: *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **19**, 275 (1986).
7. Kase, S. and Matsuo, T.: *J. Poly. Sci., Part A*, **3**, 2541 (1965).
8. Pearson, J.R.A. and Matovich, M.A.: *Ind. Eng. Chem. Fundamentals*, **8**, 605 (1969).
9. Fisher, R.J. and Denn, M.M.: *AIChE J.*, **22**, 236 (1976).
10. Ide, Y. and White, J.L.: *Appl. Poly. Symposium No. 27*, 61 (1975).
11. Matsumoto, T. and Bogue, D.C.: *Poly. Eng. Sci.*, **18**, 564 (1978).
12. Hyun, J.C.: *AIChE J.*, **24**, 418 (1978).
13. Denn, M.M.: *AIChE J.*, **26**, 292 (1980).
14. Ishihara, H. and Kase, S.: *J. Appl. Poly. Sci.*, **19**, 557 (1975).
15. Hyun, J.C.: *Polymer(Korea)*, **12**, 772 (1988).
16. Fisher, R.J. and Denn, M.M.: *Chem. Eng. Sci.*, **20**, 1129 (1975).