

저류층 수치해석의 효율성을 높이기 위한 새로운 방법에 대한 연구

강주명·김재현

서울대학교 공과대학 자원공학과
(1989년 5월 30일 접수, 1989년 7월 12일 채택)

An Improved Method for the Computing Efficiency in Numerical Reservoir Simulator

Joe M. Kang and Jae Hyun Kim

Department of Mineral and Petroleum Engineering, College of Engineering, Seoul National University
(Received 30 May 1989; accepted 12 July 1989)

요 약

5점 유한차분법의 1점 Upstream 방법은 불리한 이동율 또는 피스톤 형태 대체 이동과 같은 저류층에서는 격자 방향성에 의한 오차때문에 신빙성있는 수치해석을 할 수 없다. 9점 유한차분법은 이러한 격자 방향성 오차가 거의 없는 비교적 정확한 수치해석을 할 수 있으나 전산 수행시간이 많이 소요된다. 따라서 본 연구에서는 9점 유한차분법의 결점을 보완하기 위하여 새로운 방법 즉, 5점 유한차분법의 3점 Upstream 방법을 개발하였다. 새로운 방법의 효율성을 입증하기 위하여 5점 배열형태의 저류층을 사용하여 불리한 이동율 및 피스톤 형태 대체 이동 문제에 적용시킨 결과, 3점 Upstream 방법의 전산 수행시간은 9점 유한차분법 보다는 빠르고 그 정확성은 비슷하였다.

Abstract. - The single point upstream method, which is based on five point finite difference techniques, causes a problem of the grid orientation in predicting the recovery performance for severe condition like an unfavorable mobility ratio, piston type displacement. The nine point method has been developed to reduce inaccuracy caused by the grid orientation. Although this method shows noticeable improvements over the orientation effects, it requires more computational time than the five point method. Therefore to increase the computing efficiency of reservoir simulation with keeping the same degree of accuracy, the five point method using three point upstream scheme is introduced in this study.

To test the validity of the new method, the various confined five spot flood patterns such as unfavorable mobility ratio and piston type displacements have been employed. The results evaluated by three point upstream scheme are in the similar level of numerical accuracy, but take much less computational time than the nine point simulator.

1. 서 론

석유 저류층내 유체는 석유, 물, 가스 등의 다상 유체이며 그 지배 방정식은 일반적으로 비선형이고 시간

변수 함수이기 때문에 수치해석적으로 불안정한 방정식이 된다. 특히 상대 유체투과율(Relative Permeability)은 1차 미분항으로 표현되기 때문에 이의 수치적 처리를 위하여 유한차분법에서 Upstream이라는 근사

방법을 사용하기 때문에 여러 가지 수치 오차가 발생하게 되고, 저류층 수치해석에서는 특히 격자 방향성에 의한 오차(Grid Orientation Effect)가 발생된다. 이와 같은 격자 방향성에 의한 수치오차는 피스톤 형태 대체이동(Piston Type Displacement), 혼합 대체이동(Miscible Displacement) 문제에서 심각하게 나타나고 특히 불리한 이동율(Unfavorable Mobility Ratio)일 때 이런 오차는 더욱 심화된다.

이런 격자 방향성에 의한 오차를 줄이기 위하여 Todd 등[1]은 2점 Upstream(Two Point Upstream) 방법을 제안하였으나 아주 불리한 이동율, 피스톤형 대체이동(Piston Type Displacement) 문제에 적용될 때 격자 방향성에 의한 오차는 여전히 감소하지 않았다. 또한 Coats[2]에 의하여 증기주입(Stream Flooding)과 같은 아주 불리한 이동율의 문제에서는 기존의 수치해석 방법을 사용하면 격자 방향성에 의한 오차가 심각하게 발생하며 이 오차는 격자를 조밀하게 하여도 줄어들지 않는다고 밝혔다. Holloway 등[3]은 교차방향의 유동(Diagonal Flow)을 고려한 방법을 2점 Upstream 방법과 결합하여 격자 방향성 효과를 줄였다. 그러나 이 방법은 근본적으로 2점 Upstream 방법을 약간 향상시킨 것이기 때문에 가스주입(Gas Injection) 문제에서는 여전히 오차가 발생하였다. 그 밖에 Robertson과 Woo[4]에 의하여 곡선 격자(Curvilinear Grid)를 사용한 방법이 제안되기도 하였다.

이와 같이 유한차분법에서 Upstream 방법에 의한 수치오차는 저류층 수치해석 뿐만 아니라 일반적인 물질(또는 열) 전달 및 유체 거동을 수치해석할 때도 나타나며 특히 대류가 지배적인(Convection Dominant) 문제를 해석할 때는 심각히 대두된다. 이런 수치오차를 경감시키기 위하여 유체를 다루는 거의 모든 공학 분야에서 수 많은 논문이 발표되었으며 그 중 대표적인 것이 QUICK(Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) 방법[5-7]이 있다. 그러나 이 방법은 경우에 따라 불안정하기 때문에 석유 저류층과 같이 아주 불안정하고 비선형적인 문제에는 전혀 적용할 수가 없다.

저류층 수치해석에서는 Yanosik과 McCracken[8]에 의하여 제안된 9점 유한차분법(Nine Point FDM)에 의하여 격자 방향성효과가 거의 없는 안정된 결과를 얻을 수 있었다. 이 방법은 2차원 문제에서 기존의 5개의 격자점이 아닌 9개의 격자점을 사용하는 차분법으로 그 정확성에 비하여 전산 수행시간이 기존의 방법보다

더 많이 소요되는 결점이 있다.

따라서 이러한 9점 유한차분법의 결점을 보완하고자 본 연구에서는 그 정확성은 9점 유한차분법과 비슷하고 전산 수행시간은 2점 Upstream 방법과 비슷한 새로운 방법, 즉 3점 Upstream 방법을 제안하게 되었다.

2. 격자 시스템

저류층 수치해석에서 격자 방향성에 의한 수치오차는 5점 배열형태(Five Spot Pattern)의 저류층 문제를 해석할 때 가장 잘 나타난다. 5점 배열형태란 Fig. 1과 같은 배열로서 한 쪽에서는 물, 가스, 증기 등을 주입하고 다른 쪽에서는 석유를 생산하는 2차 석유생산 방법을 말한다. 이와 같은 저류층을 수치해석할 때 5점 배열형태의 규칙성 및 대칭성에 의하여 Fig. 1에서 보듯 교차격자(Diagonal Grid)와 평행격자(Parallel Grid)의 두 가지 방법으로 유한차분법 해석이 가능하다. 그런데 기존의 5점 유한차분법에서는 Upstream 방법을 사용하기 때문에 격자선을 따라서 유체가 더욱 더 잘 이동되므로 이러한 두 격자 시스템에 의한 전산 수치 결과는 각기 전혀 다른 양상을 보일 수 있다. 즉 기존의 5점 유한차분법에서는 Upstream 방법을 사용하기 때문에 격자선을 따라서 유체가 더 잘 이동하므로 Fig. 1과 같은 등포화도 곡선(Saturation Contours)을 얻게 된다. 실제로는 포화도 분포곡선이 원단한 원형 형태가 되어야 하는 데 다이아몬드 형태가 되어 두 격자 시스템 사이의 결과는 상이한 양상을 보이게 된

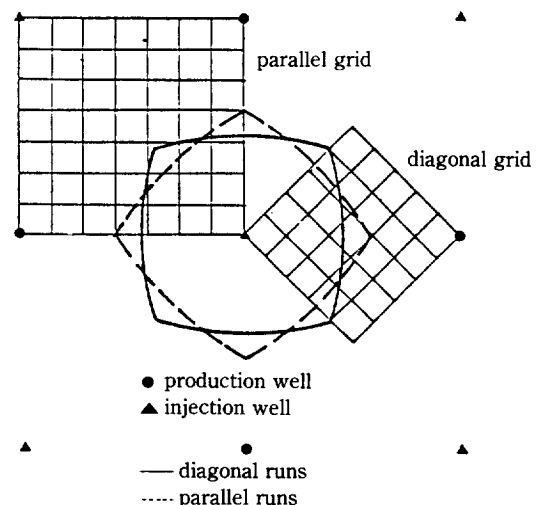


Fig. 1. Predicted displacement fronts using two grid systems.

다. 즉 격자 방향성에 의한 오차가 발생하게 된다.

본 연구에서도 Fig. 1과 같은 두 가지 격자 시스템을 사용하여 각 방법별로 분석하여 그 결과를 상호 비교하였다.

3. 지배 방정식

저류층내 다상 유체 거동은 연속방정식과 수정된 Darcy 공식에 의하여 표현되며 2상 유체거동(물, Oil)이고 2차원 저류층이면 다음과 같은 6개의 지배 방정식이 유도된다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k h k_{ro} \partial \Phi_o}{\mu_o B_o \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k h k_{ro} \partial \Phi_o}{\mu_o B_o \partial y} \right) + \frac{q_o}{\Delta x \Delta y} = \phi h \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_o}{B_o} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k h k_{rw} \partial \Phi_w}{\mu_w B_w \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k h k_{rw} \partial \Phi_w}{\mu_w B_w \partial y} \right) + \frac{q_w}{\Delta x \Delta y} = \phi h \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_w}{B_w} \right) \quad (2)$$

$$P_o = P_w + P_c \quad (3)$$

$$S_o = 1 - S_w \quad (4)$$

$$k_{rw} = f(S_w) \quad (5)$$

$$k_{ro} = f(S_o) \quad (6)$$

여기서

$$\Phi_o = P_o - \gamma_o Z, \quad \Phi_w = P_w - \gamma_w Z$$

위의 식들에서 용적계수 (B_o , B_w)와 점성 (μ_o , μ_w)은 압력의 변화에 둔감하므로 수치해석시 큰 문제가 없다. 또 상대 유체투과율 (k_{ro} , k_{rw})은 식 (5), (6)에서 나타난 바와 같이 포화도 (S_w)의 함수이며 이것은 저류층 특성을 나타내는 상대 유체투과율 곡선으로부터 구할 수 있다. 그러나 상대 유체투과율은 포화도에 아주 민감하므로 전체식을 불안정하게 하는 가장 큰 원인이 된다. 또한 상대 유체투과율은 식 (1), (2)에서 1차 미분항으로 되어 대류항적인 특징을 지니고 있다. 따라서 수치해의 안정성때문에 상대 유체투과율을 Upstream 이라는 근사방법을 사용하며 이것때문에 여러 수치오차가 발생하며 그 대표적인 것이 격자 방향성에 따른 수치오차이다.

4. 3점 Upstream 방법을 이용한 5점 유한차분법(Five Point FDM Using Three Point Upstream Method)

먼저 균일한 정방형 격자 시스템을 사용하였을 때 식 (1), (2)를 9점 유한차분법에 의하여 차분식을 유도하면 아래와 같다[8].

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} (Tk_{rm})_{i+\frac{1}{2},j} (\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}) + \frac{2}{3} (Tk_{rm})_{i-\frac{1}{2},j} \\ & (\Phi_{i-1,j} - \Phi_{i,j}) + \frac{2}{3} (Tk_{rm})_{i,j+\frac{1}{2}} (\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}) \\ & + \frac{2}{3} (Tk_{rm})_{i,j-\frac{1}{2}} (\Phi_{i,j-1} - \Phi_{i,j}) + \frac{1}{6} (Tk_{rm})_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \\ & (\Phi_{i+1,j-1} - \Phi_{i,j}) + \frac{1}{6} (Tk_{rm})_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} (\Phi_{i-1,j-1} - \Phi_{i,j}) \\ & + \frac{1}{6} (Tk_{rm})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} (\Phi_{i+1,j+1} - \Phi_{i,j}) + \frac{1}{6} (Tk_{rm})_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \\ & (\Phi_{i-1,j+1} - \Phi_{i,j}) + q_m = V_p \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_m}{B_m} \right) \quad (7) \end{aligned}$$

여기서,

$$T = \frac{k h}{\mu_m B_m}, \quad V_p = \Delta x \Delta y h \phi$$

본 연구에서 제안하는 5점 유한차분식에 의한 3점 Upstream 방법은 9점 유한차분법에서 $(i+1, j+1)$, $(i+1, j-1)$, $(i-1, j+1)$, $(i-1, j-1)$ 점들을 나머지 5개점, 즉 (i, j) , $(i, j+1)$, $(i, j-1)$, $(i+1, j)$, $(i-1, j)$ 점들로 외삽시켜 유도되는 방법이다. 포텐셜에 대하여 이와 같은 방법으로 외삽시키면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1,j+1} &= \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j} \\ \Phi_{i+1,j-1} &= \Phi_{i,j-1} + \Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j} \\ \Phi_{i-1,j+1} &= \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i-1,j} - \Phi_{i,j} \\ \Phi_{i-1,j-1} &= \Phi_{i,j-1} + \Phi_{i-1,j} - \Phi_{i,j} \quad (8) \end{aligned}$$

(8)식들을 (7)식의 9점 유한차분식에 대입하여 정리하면 아래와 같은 3점 Upstream 방법의 유한차분식이 유도된다.

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{2}{3} (Tk_{rm})_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{1}{6} (Tk_{rm})_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} (Tk_{rm})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right\} \\ & (\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}) + \left\{ \frac{2}{3} (Tk_{rm})_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{1}{6} (Tk_{rm})_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{6} (Tk_{rm})_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right\} (\Phi_{i-1,j} - \Phi_{i,j}) + \left\{ \frac{2}{3} (Tk_{rm})_{i,j+\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{6} (Tk_{rm})_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} (Tk_{rm})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right\} (\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}) \\ & + \left\{ \frac{2}{3} (Tk_{rm})_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} (Tk_{rm})_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{6} (Tk_{rm})_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right\} (\Phi_{i,j-1} - \Phi_{i,j}) + q_m = V_p \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_m}{B_m} \right) \quad (9) \end{aligned}$$

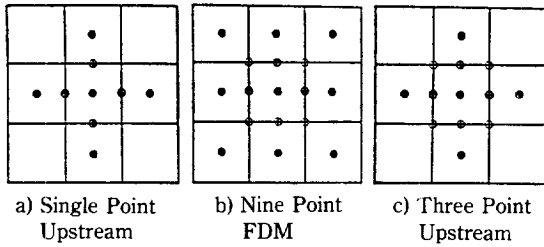


Fig. 2. Grid and grid block points for three simulators.

식 (7), (9)에서 격자 블록면에서 나타나는 상대 유체투과율($k_{ri+\frac{1}{2},j}$ 등)은 모두 유체 유동방향에 따라 Upstream에 있는 격자점의 값으로 대체한다. 한편 Fig. 2에서 나타난 바와 같이 5점 유한차분법에 의한 1점 Upstream 방법에서는 미지수가 5개의 격자점에 있고 상대 유체투과율은 4개의 격자 블록면 위에 있는 반면 9점 유한차분법에서는 미지수가 9개의 격자점에 있고 상대 유체투과율은 8개의 격자 블록면 위에 있으므로 전산 수행시간이 많이 소요된다. 그리고 본 연구에서 제안하는 5점 유한차분법에 의한 3점 Upstream 방법에서는 미지수는 5개의 격자점에 있고 상대 유체전도도는 8개의 격자 블록면에 있으므로 전산 수행시간이 9점 유한차분법보다 빠르다는 것을 알 수 있다.

5. 5점 유한차분법의 각 Upstream 방법과의 상호 비교

상대 유체투과율은 격자 블록면에서 나타나므로 격자 점에서의 값으로 환산해야 한다. 유동 방향이 $i \rightarrow i+1$ 일 때 $k_{ri+\frac{1}{2},j}$ 를 계산하는 데는 다음과 같은 방법이 있다.

(1) Mid Point 방법 :

$$k_{ri+\frac{1}{2},j} = (k_{ri,j} + k_{ri+1,j}) / 2 \quad (10)$$

(2) 1점 Upstream 방법 :

$$k_{ri+\frac{1}{2},j} = k_{ri,j} \quad (11)$$

(3) 2점 Upstream 방법 :

$$k_{ri+\frac{1}{2},j} = \frac{3}{2}k_{ri,j} - \frac{1}{2}k_{ri-1,j} \quad (12)$$

(4) QUICK Scheme :

$$k_{ri+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} (k_{ri,j} + k_{ri+1,j}) - \frac{1}{8} (k_{ri-1,j} + k_{ri+1,j} - 2k_{ri,j}) \quad (13)$$

(5) 3점 Upstream 방법 :

$$k_{ri+\frac{1}{2},j} = \frac{2}{3}k_{ri+\frac{1}{2},j} + \frac{1}{6}k_{ri+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}k_{ri+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \quad (14)$$

여기서 1점 Upstream 방법은 가장 많이 사용하고 있는 방법이며 Mid Point 방법은 아주 불안정하여 저류층 수치해석에서 전혀 사용할 수 없다. 2점 Upstream 방법은 Todd 등[1]에 의하여 제안된 방법이며 QUICK Scheme[5-7]은 그 불안정성때문에 거의 적용할 수 없다.

또한 1점 Upstream 방법에 의한 유한차분식은 부록에 수록하였으며 부록에 있는 식 (A-1)과 (9)식을 상호 비교하면 $k_{ri+\frac{1}{2},j}$ 는 3점 Upstream 방법에서는 $2/3 k_{ri+\frac{1}{2},j} + 1/6 k_{ri+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + 1/6 k_{ri+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$ 에 해당하며 각 항에 대하여 1점 Upstream을 적용한다. 이것은 결과적으로 3점 Upstream 방법은 9점 유한차분법에서 유도되었으나 5점 유한차분법에서 일종의 Upstream 방법에 속한다고 할 수 있다.

6. 저류층 모델(Reservoir Models)

규칙적인 5점 배열형태 저류층 모델에 적용하여 교차 격자와 평행격자를 사용한 수치해를 상호 비교하였으며 수치해석 기법은 비교적 안정된 저류층에서 널리 사용하고 있는 IMPES(Implicit Pressure Explicit Saturation)[9-12]를 이용하였다.

6-1. 불리한 이동율(Unfavorable Mobility Ratio)

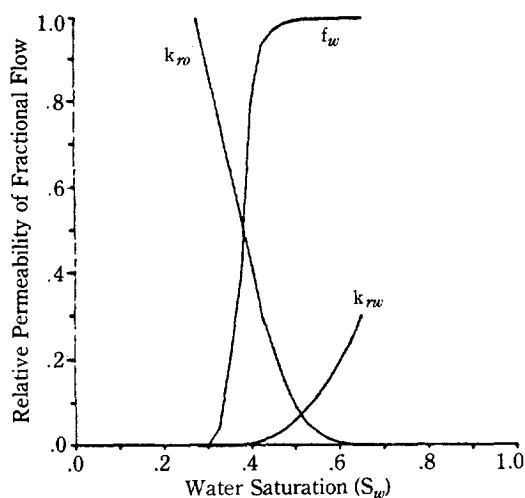
이 모델은 Fig. 3a와 Table 1에서 명시한 바와 같이 절대 유체투과율(absolute permeability)이 12.5 md이고 이동율이 100인 아주 불리한 저류층으로 가스 및 석유로 이루어진 저류층에서 볼 수 있는 모델이다. 본 연구에서는 이 모델을 비혼합 대체이동(immiscible displacement)문제, 즉 물질이동이 없다고 가정하여 수치해석하였다.

6-2. 피스톤 형태 대체이동(Piston Type Displacement)

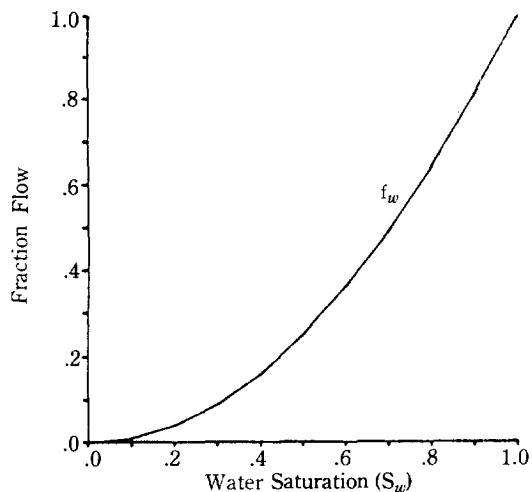
피스톤 형태 대체이동이란 피스톤처럼 물이 석유를 밀어내는 형태의 대체이동을 말하는 것으로 Fig. 3b는 이 모델의 분할 유동곡선($f_w = S_w^2$)을 나타내고 있다.

여기서 상대 유체투과율을 다음과 같은 방법으로 계산하였다.

$$k_{rw} = \frac{f_w}{\mu_o/\mu_w(1-f_w) + f_w} \quad (15)$$



(a) Relative permeability and fractional flow curves for unfavorable mobility ratio



(b) Fractional flow curves for piston type displacement

Fig. 3. Relative permeability and fractional flow curves.

Table 1. Data for five spot pattern flood simulation

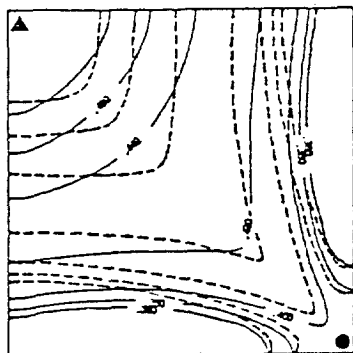
	Immiscible	Piston Type
Absolute Permeability (k, md)	12.5	12.5
Reservoir Thickness (h, ft)	20	20
Pattern Width (w, ft)	1320	1320
Porosity (ϕ)	0.200	0.08
Connate Water Saturation(S_{wc})	0.275	0.00
Viscosity of Oil (μ_o , cp)	16.7	1.00
Viscosity of Water (μ_w , cp)	0.05	1/M
Injection Rate (q_w , BPD/well)	60	60
End Point Mobility Ratio	100	M

$$k_{ro} = 1 - k_{rw} \quad (16)$$

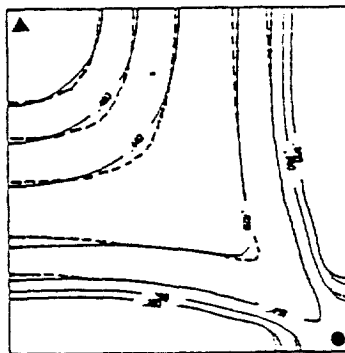
식 (15), (16)에서 알 수 있듯이 중점의 상대 유체투과율은 $k'_{rw} = k'_{ro} = 1$ 이므로 이동율은 $M = \mu_o/\mu_w$ 로 표시할 수 있다. 따라서 $\mu_o=1$ 이라 두면 $\mu_w=1/M$ 이 되며 이동율(M)을 변화시키면 상대 유체투과율 곡선도 변화하게 된다.

7. 결과 및 고찰

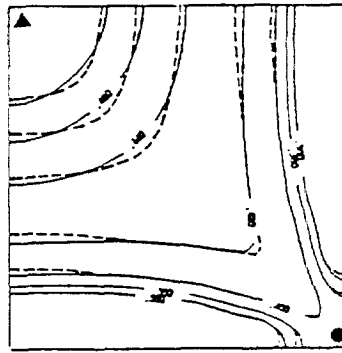
1점 Upstream 방법, 9점 유한차분법, 그리고 본 연구에서 제안된 3점 Upstream 방법들을 각 모델에 적용하여 얻은 수치해석 결과는 다음과 같다.



a) Single Point Upstream



b) Nine Point FDM



c) Three Point Upstream

Fig. 4. Predicted saturation contours for an unfavorable mobility ratio problem after 0.4834 RPV injected.

7-1. 불리한 이동율(Unfavorable Mobility Ratio)

격자수를 교차격자의 경우 20×20 평행격자의 경우 28×28 로 수치해석하였다.

Fig. 4는 0.4834 공극부피(=[주입량 혹은 회수량]/[전체 공극부피])를 주입하였을 때 나타나는 등포화도 곡선으로서 실선은 교차격자 점선은 평행격자 시스템을 사용하여 수치해석한 결과이다. 1점 Upstream 방법의 경우 두 격자 시스템 결과의 상대오차가 눈에 띄게 나타나고 있으나 9점 유한차분법과 3점 Upstream의 결과에서는 이러한 오차가 상당히 감소되어 나타난다.

석유 회수 수행곡선을 나타내고 있는 Fig. 5에서는 1점 Upstream의 경우 두 격자 시스템의 결과에서 최대 0.038 공극부피만큼의 상대오차를 보이고 있으며 9점 유한차분법과 3점 Upstream의 결과에서는 break-through가 발생하는 부분에서 최대 0.012 정도의 상대오차를 나타내고 있으며 주입량이 증가할수록 이런 오차는 점차 줄어들고 있다.

7-2. 피스톤 형태 대체이동(Piston Type Displacement)

격자수는 교차격자의 경우 15×15 , 평행격자의 경우 21×21 을 사용하여 수치해석하였다. Fig. 6은 이동율이 20일 때 0.6769 공극부피를 주입하였을 때 포화도가 0.9일 때의 등포화도 곡선을 나타낸 것이다. 1점 Upstream을 사용하면 두 격자 시스템의 결과가 심하게 불일치하고 있으며 특히 교차격자를 사용한 수치해는 오목한 형태의 등포화도 곡선이 나타난다. 이것은 수치오차의 전형적인 예이며 이와 같은 저류층에서는 1점 Upstream을 전혀 사용할 수 없다. 반면 9점 유한차분법과 3점 Upstream 방법을 사용한 결과는 격자 방향성에 의한 오차가 거의 나타나지 않는다.

Fig. 7의 석유 회수 수행곡선에서는 1점 Upstream 방법을 사용하면 최대 상대오차가 0.302 공극부피나 된다. 그러나 9점 유한차분법과 3점 Upstream 방법을 사용한 결과에서는 이와 같은 상대오차가 각각 0.028, 0.025 밖에 되지 않는다.

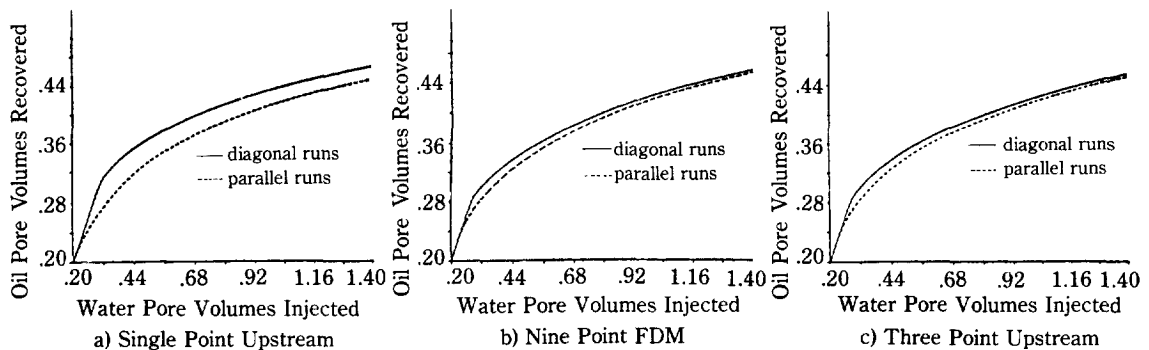


Fig. 5. Predicted oil recovery performance for an unfavorable mobility ratio problem.

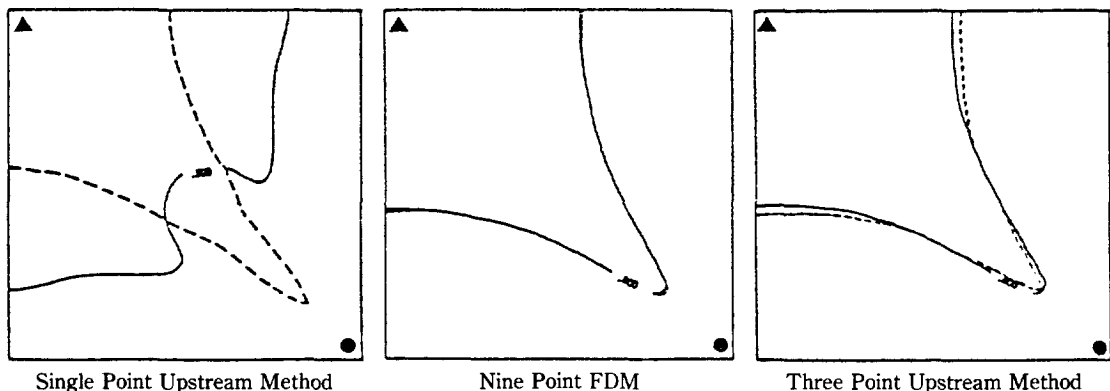


Fig. 6. Predicted displacement fronts ($S_w = 0.9$) for an $M=20$ piston type displacement problem.

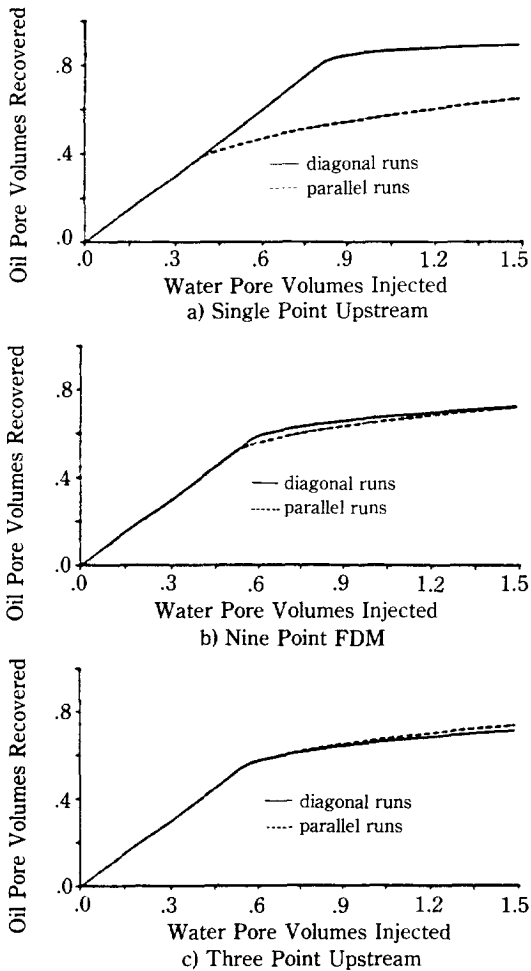


Fig. 7. Predicted oil recovery performance for an $M=20$ piston type displacement problem.

8. 결 론

이상의 결과에서 아래와 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 3점 Upstream 방법의 전산 수행시간은 1점 Upstream 방법보다는 늦고 9점 유한차분법보다는 빠르며 그 정확도는 9점 유한차분법과 비슷하다.

2. 피스톤 형태 대체이동(piston type displacement) 문제에서 이동율이 증가할수록 1점 Upstream 방법의 수치오차는 급격하게 증가하며 3점 Upstream 혹은 9점 유한차분법의 수치오차는 상대적으로 작게 나타났다. 따라서 유리한 이동율의 문제에서는 1점 Upstream 방법을 불리한 이동율일 경우는 3점

Upstream 방법을 사용하는 것이 효율적이다.

감 사

본 연구는 한국과학재단의 연구비지원에 의하여 수행된 연구의 결과이다. 연구비를 지원해준 당 재단에 심심한 감사를 표하는 바이다.

부 록

1. 1점 Upstream 방법을 사용한 5점 유한차분법 (Five Point FDM Using Single Point Upstream Method)

이 방법은 일반적으로 가장 많이 사용되는 수치해석 방법으로 식 (1), (2)를 1점 Upstream 방법으로 차분식을 유도하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} & (Tk_{rm})_{i+\frac{1}{2},j}(\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}) + (Tk_{rm})_{i-\frac{1}{2},j}(\Phi_{i-1,j} - \Phi_{i,j}) \\ & + (Tk_{rm})_{i,j+\frac{1}{2}}(\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}) + (Tk_{rm})_{i,j-\frac{1}{2}}(\Phi_{i,j-1} - \Phi_{i,j}) \\ & + q_m = V_p \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_m}{B_m} \right) \end{aligned} \quad (A-1)$$

여기서 격자 불력면에서 나타나는 상대 유체투과율은 다음과 같이 유동방향에 따라 Upstream 방향의 격자점으로 환산한다.

$$\begin{aligned} k_{r i+\frac{1}{2},j} &= k_{i,j} \quad (\text{유동방향 } i \rightarrow i+1) \\ &= k_{i+1,j} \quad (\text{유동방향 } i+1 \rightarrow i) \end{aligned}$$

NOMENCLATURE

- B : formation volume factor, rb/STB
- rb : reservoir barrel
- STB: stock tank barrel
- c : compressibility, psi^{-1}
- f : fractional flow
- h : reservoir thickness, ft
- k : absolute permeability, md
- k_r : relative permeability, fraction
- M : mobility ratio
- p : pressure, psi
- γ : specific weight psi/ft
- q : production or injection rate
- S : saturation
- t : time, day
- V_p : pore volume in control volume, ft^3
- $\Delta x, \Delta y$: distance between grid points, ft
- μ : viscosity, cp

Φ : potential, psi
 ϕ : porosity

Subscripts

m : phase index
 i : grid block index in the x-direction
 j : grid block index in the y-direction
 o : oil
 w : water
 c : capillary pressure

REFERENCES

1. Todd, M.R., O'Dell, P.M., and Hirasaki, G.J.: "Methods for Increased Accuracy in Numerical Reservoir Simulator", *Soc. Pet. Eng. J.*, Dec., 515-30 (1972).
2. Coats, K.H.: "Simulation of Steamflooding with Distillation and Solution Gas", *Soc. Pet. Eng. J.*, **5**, 36 (1976).
3. Holloway, C.C., Thomas, L.K., and Pierson, R.G.: "Reduction of Grid Orientation Effects in Reservoir Simulation", SPE 5522, 50th Annual Fall Meeting, Dallas, 1974.
4. Robertson, G.E. and Woo, P.T.: "Grid Orientation Effects and the Use of Orthogonal Curvilinear Coordinate in Reservoir Simulation", SPE 6100, 51st Annual Fall Meeting, New Orleans, 1976.
5. Leonard, B.P.: "A Stable and Accurate Convective Modeling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, **19**, 59 (1979).
6. Han, T., Humprey, J.A.C., and Launder, B.E.: "A Comparison of Hybrid and Quadratic-Upstream Differencing in High Reynolds Number Elliptic Flows", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, **29**, 81 (1981).
7. Pollard, A. and Siu, A.L.W.: "The Calculation of Some Laninar Flows Using Various Discretation Schemes", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, **35**, 293 (1982).
8. Yanosik, J.L. and McCracken, T.A.: "A Nine-Point, Finite Difference Reservoir Simulator for Realistic Prediction of Adverse Mobility Ratio Displacement", *Soc. Pet. Eng. J.*, Aug., 253-62 (1979).
9. Sheldon, J.W., Harris, C.D., and Bavly, D.: "A Method for General Reservoir Behavior Simulation on Digital Computers", SPE 1521-G, 35th Annual Meeting, Denver, 1960.
10. Stone, H.L. and Garder, A.O. Jr.: "Analysis of Gas-Cap or Dissolved-Gas Drive Reservoirs", *Soc. Pet. Eng. J.*, June, 92-104 (1961); Trans., AIME, 237.
11. Fagin, R.G. and Stewart, C.H. Jr.: "A New Approach to the Two Dimensional Multiphase Reservoir Simulator", *Soc. Pet. Eng. J.*, June, 175-82 (1966); Trans., AIME, 222.
12. Coats, K.H.: "Reservoir Simulation: A General Model Formulation and Associated Physical/Numerical Source of Instability", Boundary and Interior Layers-Computational and Asymptotic Methods, Miller, J.J.H. (ed.), Boole Press, Dublin, 62-76 (1980).