

## 라그랑지안 좌표계의 유한요소법을 이용한 비뉴튼성 액체내 구형기포의 수축에 관한 연구

김 종 업

충남대학교 공과대학 고분자공학과  
(1989년 8월 14일 접수, 1989년 12월 29일 채택)

### A Study on the Collapse of Spherical Bubbles in Non-Newtonian Fluids Using a Finite Element Method in the Lagrangian Frame

Chongyup Kim

Chungnam National University, Yoosong-goo, Taejeon 302-764  
(Received 14 August 1989; accepted 29 December 1989)

#### 요 약

본 연구에서는 구형 cavitation bubble 이 upper convected Maxwell fluid 내에서 수축할 때의 현상을 이론적으로 해석하였다. 수치해법으로는 Lagrangian frame 에서 자유표면을 추적하는 완전한 explicit scheme 을 개발함으로써 수치해법상의 문제점을 해결한 방법을 이용하였다. 유체의 탄성은 Reynolds 수가 10 이하인 경우 수축 초기단계에서는 수축을 가속화하고 후기 단계에서는 감속시키지만, Reynolds 수가 10보다 큰 경우는 관성이 지배적이 되어 무시되었다. 후기 단계의 수축의 지연은 정성적으로는 cavitation damage 의 감소와 연관이 있을 것으로 예측되었다.

**Abstract**—In this research, the collapse of a spherical cavitation bubble contained in a large body of upper convected Maxwell fluid was studied theoretically. A fully explicit numerical scheme was developed which could track the bubble surface without iteration. It was observed that, when  $Re$  was less than 10, fluid elasticity accelerated the collapse in the early stage of collapse while in the later stage it retarded. When  $Re$  was larger than 10, however, fluid elasticity was no longer effective in changing the pace of collapse due to the large inertia. The retardation for  $Re < 10$  was expected to be related with the reduced cavitation damage in viscoelastic fluids.

#### 1. 서 론

기포(bubble)는 일반적으로 gas bubble 과 vapor bubble 로 나눌 수 있으며 이 중 vapor bubble 은 내부가 응축 가능한 vapor 로 구성된 것으로서 다시 cold bubble 과 hot bubble 로 나눌 수 있다. Cold bubble 은 주로 cavitation 에 의하여 생기게 되는데 일반적으로 생성 직후 shear flow field 에서 작은

daughter bubble 로 나뉘어지고 이러한 작은 기포들이 내부의 압력차이와 표면장력 등에 의하여 수축하여 결국은 소멸하게 된다. 이 때 수축하는 과정 중에 관성에 의하여 생성되는 기포 주위의 수천기압 크기의 pressure field, 또는 비대칭성에 의하여 발달되는 high speed liquid jet 는 배의 screw 나 유체기기의 impeller 같은 고체 표면에 조금씩 손상을 주어 결국은 완전히 파괴시킨다. 이러한 cavitation damage 의 원인에 관하여는

그동안 1917년 Rayleigh의 선구적 보고 이후 Newtonian fluid를 대상으로 수많은 연구가 있어 왔고 점차 그 원인이 실험적, 이론적으로 규명이 되어가고 있다.

Non-Newtonian fluid 내의 cavitation bubble의 Newtonian fluid 내의 경우와 많은 차이를 나타내며, 특히 cavitation inception과 cavitation damage가 현저히 감소되는 것으로 실험적으로 관찰되고 있다. 아주 낮은 농도의 고분자 용액, 예로서 drag reducing fluid 내에서는 cavitation 현상 자체가 현저히 감소할 뿐만 아니라 bubble의 수축 때 생기는 damage 자체도 Newtonian fluid의 경우와 비교할 때 상당히 작은 것으로 알려져 이를 효과적으로 이용하고자 하는 연구가 있어 왔다. 또한 이러한 cavitation을 화학반응속도 증가에 이용하고자 하는 연구도 시작되고 있다. 이는 초음파를 이용하여 화학반응 용액 내에 cavitation을 유도하고, 생성된 기포가 수축할 때 생기는 수축기압의 shock wave가 용액 내부에 micro scale mixing을 유도하므로서 물질전달을 용이하게 하여 화학반응속도를 증가시키고자 하는 것으로서 지대한 관심을 끌고 있다. 이 때 용액은 아주 작은 크기라도 탄성(elasticity)을 가질 수 있으므로 이 경우에도 non-Newtonian fluid 내의 cavitation bubble에 관한 연구는 cavitation 자체의 장점을 적절히 이용하거나 단점을 해결하기 위한 방법을 구하기 위하여 매우 필요하다고 할 수 있다.

그러나 non-Newtonian fluid 내의 기포의 변형에 대하여는 아직 spherical symmetry가 유지되는 경우에도 유변학적인 시스템의 해석이 충분히 되어 있지 못한 실정이다. Foggler와 Goddard[1]는 non-Newtonian fluid 내의 bubble의 수축에 관한 연구에서 가장 선구적인 연구를 하였으나 linear viscoelastic model만을 사용하여 변형이 큰 시스템 해석에서 아주 중요한 material objectivity를 만족하지 못하였다. Ting[2]은 Oldroyd의 3 constant model을 이용하여 해석을 시도하였으나, 그의 해에는 물리적 현상으로 받아들이기에 곤란한 해가 포함되어 있고, 최근 Papanastasiou, Scriven과 Makosko[3]가 K-BKZ type model을 사용하여 관성이 없는 경우에 대한 해석을 시도하였다. 여기서 Papanastasiou 등은 비교적 높은 점도를 갖는 고분자 용액의 extensional viscosity를 측정하는 Pearson과 Middleman[4], Johnson과 Middleman[5]의 실험치와 비교하여 좋은 결과를 보였으나 그들이 지적한 대로 이 경우는 관성이 무시될 수

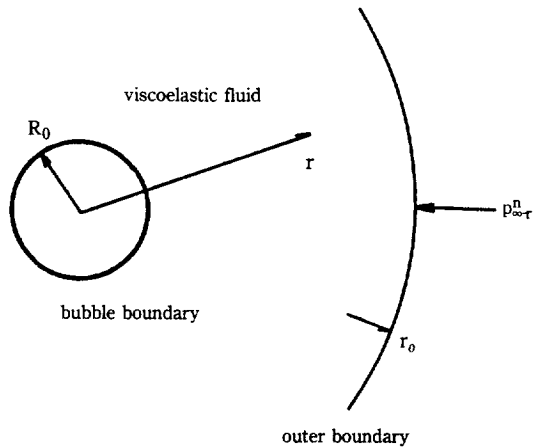


Fig. 1. The Physical process. A cavity collapses in a viscoelastic fluid under a pressure difference  $p_{\infty}$ . The outer boundary is chosen so that the motion outside the boundary is neglected and only the pressure exerts a inward radial force.

있는 경우만을 대상으로 하여 실제 관성이 매우 중요한 cavitation bubble의 운동을 묘사할 수 없다.

Inertia 항을 포함시키고 material objectivity를 만족시키는 constitutive equation을 이용하여 구형 cavitation bubble의 수축과정을 연구하기 위하여 본 연구에서는 Hassager[6]의 K-BKZ type의 유체운동에 관한 Lagrangian frame에서의 variational principle을 이용하여 유한 요소법으로 수치해법을 구하였다. 유체 model로는 K-BKZ type model의 하나인 upper convected Maxwell model을 사용하였고, 변형에 있어서 점탄성(viscoelasticity)의 역할을 중점적으로 검토하였다. 또한 Lagrangian frame에서 자연스럽게 자유표면의 추적을 행함과 동시에, 대수방정식인 연속방정식과 미분방정식인 운동방정식의 연립방정식을 반복에 의하지 않은 완전히 explicit한 방법으로 구하는 방법을 개발하여 이러한 방법이 앞으로 이 분야 연구에 매우 유용할 수 있음을 보였다.

## 2. 문제의 구성(Formulation of the problem)

본 연구에서는 Fig.1과 같이 정지된 upper convected Maxwell fluid 내에 반경  $R_0$ 의 구형 cavitation bubble을 생각하기로 한다.  $t=0$ 까지는 유체 및

기포 내의 압력을  $p_\infty$ 로 유지시키다가  $t=0$ 에서 기포 내의 압력을 0으로 하고 기포로부터 충분히 먼 곳의 압력을  $p_\infty$ 로 그대로 유지시키면  $t=0$ 부터 기포 내와 유체간의 압력차에 의하여 기포가 수축하기 시작한다. 이러한 기포의 수축현상을 해석하기 위하여 다음과 같은 가정을 도입하였다.

- 1) 중력 등의 body force 가 없다.
  - 2) 계면의 불안정 등에 의한 3차원 운동은 없으며 순수한 반경 방향의 운동만 있다.
  - 3) 열 및 물질전달의 저항이 없는 등온, 등농도계이다.
  - 4) 유체와 기포계면의 표면장력의 효과는 없으며 기포 내부는 완전히 비어있다.
  - 5) 유체는 기포표면과 기포로부터 충분히 떨어진 가상의 반경  $r_0$ 을 가진 공간 내에 국한되어 있다. 이 때 반경  $r_0$ 의 면에는 압력만이 작용한다.
- 이와 같은 가정들에 의한 문제는 기본적으로 유체의 constitutive equation을 제외하고는 Rayleigh의 이상유체 내에서의 기포의 수축문제와 동일하다.

Upper convected Maxwell 유체와 같이 K-BKZ형의 constitutive equation을 갖고 시간에 따라 변하는 자유표면이 존재하는 유체의 운동의 해석은 Hassager[6]의 Lagrangian frame of reference에서의 variational principle을 이용하면 편리하다. 즉 자유표면의 추적은 Lagrangian frame에서 material point의 추적으로 자연스럽게 이루어지며, 기포로부터 멀리 떨어진 material point는 연속방정식이 성립되도록 거의 정지상태에 있으므로 material point의 추적은 기포 주위에만 국한되어 수치해법을 이용하는 경우에 mesh 재분할 등의 문제점이 없고, variational principle은 쉽게 유한 요소법을 적용할 수 있기 때문이다.

이러한 점을 고려하여 Hassager의 variational principle을 구면 좌표계에서 반경방향만의 함수로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} J^* = & \int_{-\infty}^{t^*} \int_{V^*(t^*)} \frac{\eta}{\lambda^2} e^{-(t^*-t^*)} W dV^* dt^* \\ & + \int_{V_0^*} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r^{*2}}{\partial t^{*2}} - p^*(a_0 - 1) \right\} dV_0^* \\ & + \int_{S_0} \Phi_s^* dS_0^* \end{aligned} \quad (1)$$

$W$ 는 deformation gradient

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r^*}{\partial r^{*}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^*}{r^{*}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^*}{r^{*}} \end{pmatrix} \quad (2)$$

만의 함수이며 upper convected Maxwell fluid의 경우

$$W = \frac{1}{2} \Sigma \Sigma E_{mn} E_{mn} \quad (3)$$

로 주어지고,

$$a_0 = \det(\mathbf{E}_{mn}) \quad (4)$$

로서 비압축성 유체의 경우  $a_0=1$ 이 성립된다. 식 (1)에서 2중 적분으로 표시된 항은 material point의 deformation history,  $r^*$ 에 대한 2차 미분항은 관성,  $\Phi_s$ 는 surface potential을 나타내며, 압력  $p$ 는 미정의 Lagrangian multiplier로서 비압축성 유체에 대하여  $a_0=1$ 을 만족하도록 한다. Surface integral 항내의  $\Phi_s$ 는 기포표면에서는 stress가 없는 상태이므로 0이고, 반경  $r_0$ 의 면에서는 반경방향의 압력만이 작용하므로  $p_\infty r_0$ 의 값을 가진다. 유체의 변형은 material point  $r$ 과 압력  $p$ 의 변화에 대하여  $J^*$ 가 변하지 않도록(stationary) 이루어져야 하므로  $J^*$ 를  $r^*$ 과  $p^*$ 에 대하여 미분하여 0이 되도록 하면 각각 운동방정식과 연속방정식을 얻는다.

식 (1)의  $J^*$ 를 체계적으로 해석하기 위하여는 적절한 시간 및 길이의 scale을 이용하여 무차원화하여야 한다. 거리에 대하여는  $R_0$ 가 가장 적합하며, 시간에 대하여는  $T = (\rho/p_\infty)^{1/2} R_0$ 를 scale로 선택할 수 있다. 이는 ideal fluid의 경우 약 0.914682T에서 수축이 완료되기 때문에 유체의 viscoelasticity의 역할을 검토하기에 적합하기 때문이다.

이러한 reference scale을 이용하여  $J^*$ 를 무차원화하고 무차원변수로서  $*$ 를 없앴한 동일기호를 사용하여 정리하면

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{\text{ReDe}^2} \int_{-\infty}^t \int_{V(t)} e^{-(t-t')} W dV' dt' \\ & + \int_{V_0} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r^2}{\partial t^2} - p(a_0 - 1) \right\} dV_0 + \int_{S_0} r_0 dS_0 \end{aligned} \quad (5)$$

가 되는데, 여기서 Re와 De는 각각 Reynolds number와 Deborah number로서 다음과 같이 정의된다.

$$\text{Re} = R_0 (\rho p_\infty)^{1/2} / \eta \quad (6)$$

$$\text{De} = \lambda / T \quad (7)$$

### 3. 유한 요소법

J를 유체 내의 material point의 위치 및 압력변화에 대하여 변화가 없도록 하여 구한 운동 및 연속방정식은 해석적인 해는 불가능하지만 유한 요소법을 이용하면 비교적 수치해를 구할 수 있다. 특히 기포 주위의 유체는 변형이 크기 때문에 mesh의 크기 조절이 가능한 유한 요소법은 다른 방법보다 큰 장점을 가지고 있다.

먼저 유체가 반경방향의 1차원 공간에서 기포로부터 충분히 먼곳, 예를들어 초기 기포반경의 10배 되는 곳까지를 outer boundary(OB)로 하여 해석의 대상으로 하고, 기포의 표면(bubble boundary: BB)과 OB 사이에 N개의 node를 정하여 L=N-1개의 element를 구성한다. Material point에 대하여는 선형 보간 함수  $\phi_i$ 를, 압력에 대하여는 1차 낮은 gate function  $\psi_j$ 를 보간함수로 하면, r과 p는 각각 다음과 같이 표시되는데

$$r = \sum_{i=1}^N r_i \phi_i(\xi) \quad (8)$$

$$p = \sum_{j=1}^L p_j \psi_j(\xi) \quad (9)$$

여기서  $r_i$ 는 node의 위치,  $p_j$ 는 j번째 element에서의 압력,  $\xi$ 는 element coordinate를 나타낸다. Material point의 운동은 element node  $r_i$ 와 element pressure  $p_j$ 의 변화에 따라 J가 stationary 하된다. 즉

$$\frac{\partial J}{\partial r_i} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial J}{\partial p_j} = 0 \quad (11)$$

이어야 한다.

Deformation gradient는 여기서는 diagonal tensor로서  $\partial r / \partial r'$ 과  $r / r'$ 만 구하면 된다. 연쇄법칙을 적용하면

$$\frac{\partial r}{\partial r'} = \sum a_i r_i, \quad a_i = \frac{d\phi_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dr'} \quad (12)$$

로서,  $d\xi/dr'$ 은 Jacobian

$$J = \frac{dr'}{d\xi} = \sum r'_i \frac{d\phi_i}{d\xi} \quad (13)$$

의 역으로부터 구할 수 있다.

식 (8), (9) 및 (12)를 이용하여 variational integral J를 합성한 후 식 (10), (11)을 적용하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial J}{\partial r_k} &= \frac{1}{\text{ReDe}} \sum_{i=1}^N e^{-t/\text{De}} a_{ik}^0 r_i \\ &+ \frac{1}{\text{ReDe}^2} e^{-t/\text{De}} \sum_{i=1}^N r_i \int_0^t e^{t'/\text{De}} a_{ik}(t') dt' \\ &+ \sum_{i=1}^N \frac{d^2 r_i}{dt^2} \phi_{ik} \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{j=1}^L (\omega_{ikimj} + 2\omega_{imkj}) r_i r_m p_j \\ &+ r_0^2 \delta_{k0} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial J}{\partial p_i} = h_i = \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \omega_{likl} r_l r_m r_k - \frac{V_i}{4\pi} = 0 \quad (15)$$

$$a_{ik} = \sum_{l=1}^N (a_l a_k + \frac{2\phi_l \phi_k}{r'^2}) r'^2 J d\xi,$$

$$a_{ik}^0 = a_{ik}(t'=0),$$

$$\phi_{ik} = \sum_{l=1}^N \phi_l \phi_k r'^2 J d\xi,$$

$$\omega_{likl} = \sum_{l=1}^N a_l \frac{\phi_l \phi_k}{r'^2} r'^2 J d\xi, \quad l^{\text{th}} \text{ element}$$

이 된다. 식 (14)와 (15)의 수치해를 위하여는 2차 미분방정식인 식 (14)를 Lagrangian velocity  $v_i$ 를 정의하여

$$\frac{dr_i}{dt} = v_i \quad (16)$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{d^2 r_i}{dt^2} = B_i + \sum C_{ij} p_j \quad (17)$$

로 나누어 연립방정식으로 표시하여 쓸 수 있다. 식 (17)이 압력  $p_j$ 에 대하여 1차식임을 고려하면 압력  $p_j$ 는 대수방정식 (15)를 이용하여 반복에 의하지 않고 구할 수 있다. 즉 식 (15)는 연속방정식으로서 시간에 무관하게 성립하므로

$$\frac{dh_i}{dt} = \sum \frac{\partial h_i}{\partial r_i} \frac{dr_i}{dt} = 0 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h_i}{dt^2} &= \sum \sum \frac{\partial^2 h_i}{\partial r_i \partial r_j} \frac{dr_i}{dt} \frac{dr_j}{dt} + \sum \frac{\partial h_i}{\partial r_i} \frac{d^2 r_i}{dt^2} \\ &= Q_i + \sum G_{ij} \frac{d^2 r_j}{dt^2} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

이어야 한다. 식 (17)의  $d^2 r_i / dt^2$ 를 식 (19)에 대입하여  $p_j$ 에 대하여 풀면

$$p_i = -(\sum G_{ij} C_{ij})^{-1} (Q_i + \sum G_{ij} B_i) \quad (20)$$

가 되어 반복계산에 의하지 않고 압력을 구할 수 있다. 이러한 방법은 많은 경우에 연속방정식을 만족하도록 반복법을 써야 하는 단점을 해결한 것으로서 계산의 정확도와 계산시간의 절약에 있어 중요한 의미를 갖는다. 초기조건으로는 기포가 정지상태로부터 수축함을 고려하면

$$r_i = r_{i0}, \text{ (initial nodal point)} \quad (21)$$

$$v_i = 0 \quad (22)$$

이 된다.

본 연구에서는 식 (16), (17)과 (20)을 수치해법으로 풀기 위하여 Gear[7]의 error control을 행하는 4차 Runge-Kutta 방법을 사용하고, material point의 변형 history에 관한 적분은 사다리꼴 공식을 이용하였고, 여러 가지 mesh-즉 element 수와 node의 위치에서 계산결과를 검토하였다. 이 때 기포의 수축속도가 mesh 분할방법에 따라 서로 다른 것을 볼 수 있었으므로 이러한 문제점을 극복하기 위하여 다음과 같은 방법을 사용하였다. 먼저 Rayleigh problem의 FEM code에 의한 해가 해석적인 해와 같도록 시행착오에 의하여 mesh를 조절하면, 이 mesh를 이용하여 Newtonian fluid의 여러 Reynolds number에서의 수치해를 구할 때 Reynolds number에 관계없이 Hammit[8]의 해와 정확히 일치함을 볼 수 있었다. 따라서 non-Newtonian fluid 내에서의 경우에도 동일한 mesh를 이용할 때 pace의 문제는 없을 것으로 가정하고 수치해를 구하였다. Table 1에는 본 연구에서 사용한 FEM에서의 node의 위치를 표시하였다. 수치해를 위한 computer program은 Fortran 77로 작성하고 compiler는 Microsoft Fortran ver. 4.1을 이용하였고, IBM PS/2 model 80 (i80386, i80387, clock

Table 1. Nodal positions used in FEM

Node number	Nodal position
1	1.000
2	1.005
3	1.025
4	1.1
5	1.2
6	1.5
7	2.0
8	3.0
9	5.0
10	7.8

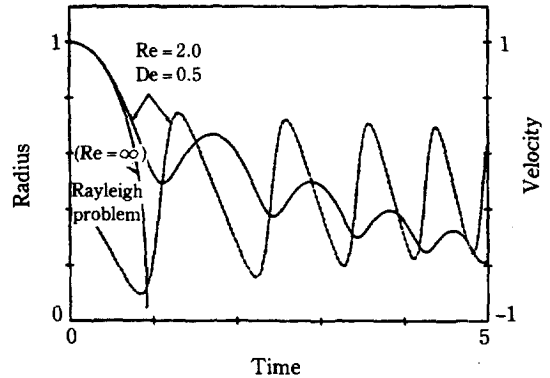


Fig. 2. A typical bubble collapse curve ( $Re=2$  and  $De=0.5$ ). The Rayleigh solution is also shown for comparison. Solid line: radius. Dashed line: velocity.

speed 16 MHz)에서 계산하였다. 계산시간은 9 element를 사용할 때 30초 내지 1분 소요되었다.

#### 4. 결과 및 검토

본 연구에 관계된 무차원 수는 무차원 반경  $R$ , 무차원 시간  $t$ , 무차원수  $Re$ 와  $De$ 로서, 기포 수축과정을 해석하기 위하여 시간에 따른 기포반경의 변화를  $Re$ 와  $De$ 를 매개변수로 하여  $R(t)$ 를 추적하였다. 수치해의 결과는 유체의 탄성이 기포 수축속도에 미치는 영향과 rebound 현상에 주안점을 두고 해석하였다.

Fig. 2에는 전형적인 기포 수축과정을 기포반경 및 기포표면의 수축속도와 시간과의 관계로서 도시하였다. 관성과 탄성이 모두 중요한 Fig. 2의 경우 기포가 수축하면서 초기단계에 ( $t < 0.4$ ) 일부 압력에너지가 운동에너지로 전환되기까지는 Rayleigh가 해석한 ideal fluid 내의 경우와 거의 동일한 수축과정을 나타낸다. 즉 이 경우에는 유체의 rheology는 역할이 전혀 없는 것으로 보인다. 수축이 계속되면서 유체가 운동량을 충분히 갖고 유체 element의 extension이 커지면 유체의 rheology가 중요해지면서 수축속도가 감소되고, 유체 내에 탄성에너지로 저장되었던 에너지에 의하여  $t=0.8$  부근에서 수축과정이 중단되고 다시 기포가 성장하는 rebound 현상이 나타난다. 이 경우의 rebound는 기포내부에 존재하는 vapor 또는 gas의 열역학적인 압력에너지에 의하여 생기는 rebound와는 전혀 다른 현상이다. Rebound에 의하여 커지던 기포는 다시 수축-성장과정을 계속하는데, 점성에 의하여 운동에너지

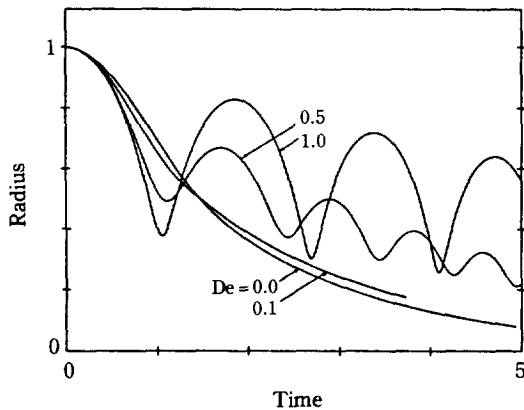


Fig. 3. The effect of Deborah number on the bubble collapse when  $Re=2$ .

지가 감소되면서 진폭과 주기가 점점 감소하여 결국은 소멸하게 된다.

Fig. 3과 4에는 유체의 탄성의 역할을 검토하기 위하여 정해진 Reynolds number에 대하여 Deborah number가 기포의 수축에 미치는 영향을 도식하였다. 먼저 Fig. 3에서  $Re=2$ 인 경우에  $De$ 가 0.0인 Newtonian 유체와 비교하여 보면  $De$ 가 커질수록 기포의 rebound가 있기 전까지의 수축속도는 점점 빨라진다. 즉 유체의 탄성은 수축을 가속화한다. 따라서 앞에서 언급된  $Re=2$ ,  $De=0.5$ 의 경우 초기단계에 유체의 rheology에 무관하다는 것은 외형적으로 ideal fluid에 접근하였다는 의미로서 실제적으로는 초기단계부터 유체의 점탄성이 크게 작용하였음을 알 수 있다. 기포의 rebound가 생기지 않는  $De=0.1$ 인 경우를 보면  $De$ 가 큰 경우와 마찬가지로 초기단계에는 탄성이 수축을 가속화하지만 후기에는 수축을 지연시킨다.  $De$ 가 큰 경우도 초기단계에는 가속화되고 후기에는 rebound에 의하여 완전 수축이 지연된다. Fig. 4에서  $Re=10$ 인 경우에는 관성이 커서 rebound 전까지의 과정에서는 ideal fluid의 경우와 거의 같은 양상으로 수축된다. 물론  $Re=10$ 인 경우에도  $De=0$ 인 경우와 0.5인 경우를 비교할 때 탄성이 수축을 가속화하는 것을 볼 수 있다. Fig. 5에는  $Re$ 가 50인 경우의 기포 수축 과정을 도식하였다.  $Re$ 가 10보다 큰 경우에는 관성이 충분히 커서  $De$ 에 관계없이 점탄성의 역할이 무시되는 것을 알 수 있다.

탄성이 초기단계에서 수축을 가속화한다는 본 연구의 결과는 Pearson과 Middleman[4], Johnson과 Middleman[5]의 실험결과와 일치한다는 것이다. Fogler와 Goddard[1]의 경우 유체의 점탄성은 수축

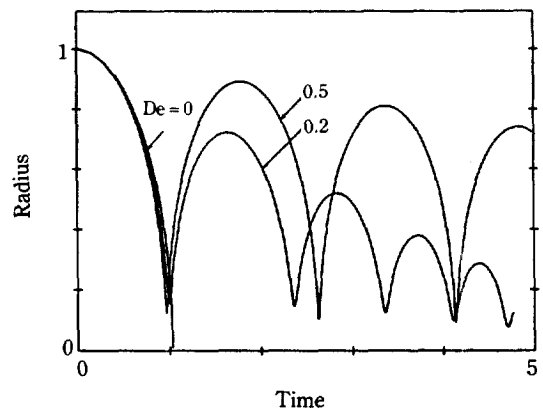


Fig. 4. The effect of Deborah number on the bubble collapse when  $Re=10$ .

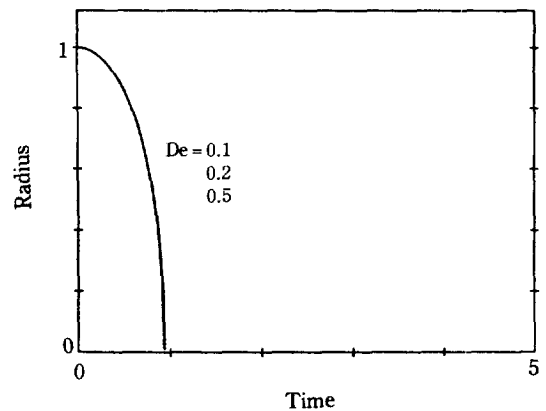


Fig. 5. The effect of Deborah number on the bubble collapse when  $Re=50$ . No difference observed among different curves for  $De=0.1, 0.2$  and  $0.5$ .

을 지연시키는 것으로 보고하였으나 이러한 문제가 사용된 유체 model만의 문제인지 혹은 material objectivity나 기타 수치해의 문제인지는 분명하지 않다. 여기서 주의할 것은 Fogler와 Goddard의 경우 rebound시에 주진동 사이에 작은 부진동이 있는 것을 볼 수 있지만 이는 수치해의 문제인 것으로 생각된다. Ting[2]도 수축 후기단계에서 ripple형의 진동을 관찰하였으나 이를 수치해의 부정확으로 간주한 바 있다. 실제로 수치해의 문제가 없는 본 연구의 경우 이러한 진동의 문제는 어떤  $Re$  및  $De$ 쌍에서도 관찰되지 않았다.

한편 Papanastasiou 등[3]은 수축 초기단계에서 본 연구 및 다른 문헌에서 보고된 바 없는 진동 및 수렴의 문제가 있었던 것으로 보고하고 있으나, 이는 유체

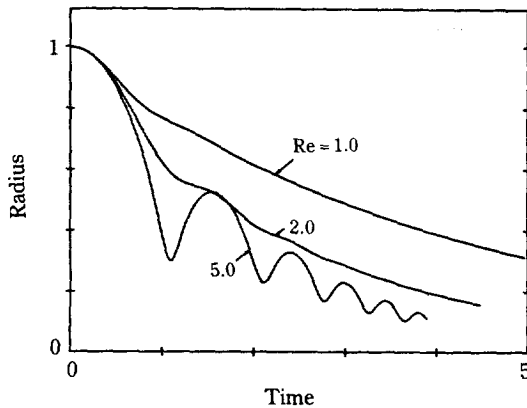


Fig. 6. The effect of Reynolds number on the bubble collapse when  $De=0.2$ .

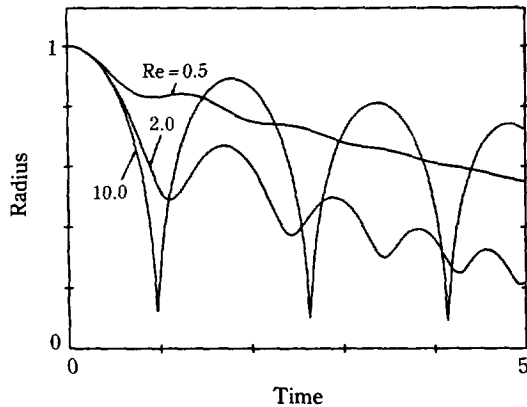


Fig. 7. The effect of Deborah number on the bubble collapse when  $De=0.5$ .

model에 의하여 생기는 문제이거나 관심을 무시한 데서 생긴 문제로 생각된다. 후기단계의 경우는 아직 실험적으로나 이론적으로 해석된 결과가 없어 다른 문헌과의 비교는 불가능하다. 본 연구에서 후기단계까지 계산을 할 수 있었던 것은 반복에 의하지 않은 explicit method에 의한 압력계산과 자연스러운 기포표면의 추적이 가능했기 때문으로 앞으로 본 연구의 방법이 이 분야에 연구에 매우 유용할 것으로 생각된다.

Fig. 6과 7에는 관심의 역할을 검토하기 위하여 정해진 Deborah number에 대하여 Reynolds number가 기포의 수축에 미치는 영향을 도시하였다. 그림들에서  $De=0.2$  및  $0.5$ 인 경우  $Re$ 가 클수록 rebound가 현저하게 나타난다. 주어진 크기의 기포에 대하여는  $Re$ 가 클수록, 즉 점성이 작을수록 viscous dissipation이 작아 탄성에너지로의 전환되는 비율이 커져 rebound가 커지게 됨은 분명하다. 한편  $Re$ 가 크면

주어진 유체에 대하여 초기 반경이 큰 것을 뜻하므로 초기 반경이 큰 기포일수록 rebound가 심한 것을 알 수 있다. 이는 cavitation damage에서 큰 영향을 주는 큰 기포의 수축이 지연되고 파국적인 소멸이 억제되므로써 탄성을 가진 유체 내에서 cavitation damage가 감소될 수 있음을 암시한다고 하겠다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 구형 cavitation bubble이 upper convected Maxwell fluid 내에서 수축할 때의 현상을 이론적으로 검토하였다. Reynolds number가 10 이하인 경우 유체의 탄성은 초기단계에서는 수축을 가속화하지만 후기에는 수축을 지연시키므로써 파국적인 소멸을 억제하고, 따라서 부분적으로 cavitation damage의 감소에 기여할 것으로 예측된다. 반면 Reynolds number가 10 이상으로 커지면 관심의 역할이 증대되어 점탄성의 역할을 기대할 수는 없었다.

여기서는 1차원 변형만을 해석하고, 실제 cavitation condition에서 생기는 고체면 부근에서의 기포 수축 등 보다 복잡하고 실제적인 문제에는 접근하지 못하였으나, 본 연구의 수치해법은 이 분야연구에 매우 유용할 것으로 판단된다. 즉 2차원적인 변형에 대하여도 본 연구의 방법은 비교적 쉽게 FEM code로서 응용될 수 있으므로, 자유표면을 쉽게 추적하므로써 비대칭 변형, 특히 liquid jet 형성에 관한 연구에 이용하여 cavitation damage의 메커니즘을 밝힐 수 있는 이론적 배경을 제공할 수 있을 것이다.

## 감 사

본 연구를 지원하여 주신 한국과학재단에 감사드립니다 (관리번호 : 891-1001-014-2).

## NOMENCLATURE

- De : Deborah number
- E : deformation gradient
- J : variational integral
- J : Jacobian
- L : number of element
- N : number of node
- p : pressure
- r : r coordinate
- $R_0$  : initial radius of the bubble

$Re$  : Reynolds number  
 $S$  : surface of the control volume  
 $T$  : time scale  
 $t$  : time  
 $v$  : velocity  
 $V$  : volume of the control volume

### Greek Letters

$\delta$  : Kronecker delta  
 $\eta$  : viscosity  
 $\lambda$  : material time  
 $\rho$  : density  
 $\xi$  : coordinate in the element  
 $\phi$  : shape function of  $r$   
 $\psi$  : shape function of  $p$

### Superscripts

$\cdot$  : old time  
 $*$  : variable with dimensions

### REFERENCES

1. Foggler, H.S. and Goddard, J.D.: "Collapse of Spherical Cavities in Viscoelastic Liquids", *Phys. Fluids*, **13**, 1135 (1970).
2. Ting, R.Y.: "Viscoelastic Effect of Polymers on Single Bubble Dynamics", *AIChE J.*, **21**, 810 (1975).
3. Papanastasiou, A.C., Scriven and Macosko, C.W.: "Bubble Growth and Collapse in Viscoelastic Liquids and Analyzed", *J. non-Newt. Fl. Mech.*, **16**, 53 (1984).
4. Pearson, G. and Middleman, S.: "Elongational Flow Behavior of Viscoelastic Liquids: Part I. Modeling of Bubble Collapse; Part II. Definition and Measurement of Apparent Elongational Viscosity", *AIChE J.*, **23**, 714 (1977).
5. Johnson, E.D. and Middleman, S.: "Elongational Flow of Polymer Melts", *Polym. Eng. Sci.*, **18**, 963 (1978).
6. Hassager, O.: "Variational Principle for the KBKZ Rheological Equation of State with Potential Function", *J. non-Newt. Fl. Mech.*, **321**, (1981).
7. Gear, C.W.: "Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations", Prentice Hall, Englewood Cliffs (1971).
8. Hammit, F.G.: "Cavitation and Multiphase Flow Phenomena", McGraw Hill, New York, (1980).