

새로운 Interaction Measure에 의한 Loop Failure Tolerance를 갖는 비집중 제어계 설계에 관한 연구

이지태

경북대학교 화학공학과
(1991년 1월 26일 접수, 1991년 5월 15일 채택)

Design of a Decentralized Control System with Loop Failure Tolerance by New Interaction Measure

Jietae Lee

Department of Chemical Engineering, Kyungpook National University, Taegu 702-701, Korea
(Received 26 January 1991; accepted 15 May 1991)

요 약

새로운 interaction measure가 최근에 Lee 등[1]에 의해 개발되었다. 이는 generalized Gershgorin band 혹은 μ -interaction measure를 개선한다. 본 연구는 이 interaction measure를 이용하여 loop failure tolerance 특성을 갖는 비집중 제어계 설계법을 제안하고자 한다.

Abstract—Recently new interaction measure has been proposed by Lee et al. [1]. The interaction measure improves the generalized Gershgorin band and the μ -interaction measure. Here, using the interaction measure, a method to design a decentralized controller having loop failure tolerance is proposed.

1. 서 론

화학 공정의 다변수 시스템 제어에서는 상호간섭이 가장 작은 입출력 짝을 찾아(pairing), 단 변수 제어를 하는 경우가 많다. 이는 설계가 비교적 간편하고, loop failure tolerance 특성을 얻기가 쉽고, tuning과 보수가 쉽다는 등의 장점을 갖고 있다. 상호 간섭이 가장 작은 입출력 짝을 찾는 데는 Bristol[2]의 상대 이득 분석법(RGA법)과 Nyquist 행렬법이 이용되고 있다. RGA법은 공정의 정상상태 이득행렬을 분석하는 것으로 가장 간편하여, 제어 시스템 설계의 초기단계에서 많이 이용되고 있다. 그러나 정상상태 이득만을 이용하기 때문에 입출력 짝을 잘못 결정하게 되는 경우가 종종 있다(Grosdidier 등[3]). 이 RGA법을 동적 상태로 확장하

려는 시도가 여럿 있었으나(McAvoy[4], Jensen 등[5]), 이론적 근거의 미비로 잘 사용되고 있지 못하고 있다(Grosdidier와 Morari[6]). Nyquist 행렬법은 컴퓨터 그래픽을 이용, 직관적으로 상호간섭 정도를 볼 수 있어 입출력 짝을 찾는 데 이용될 뿐만 아니라, 제어기를 설계하는데까지 이용되고 있다. 이 Nyquist 행렬법에서 상호간섭의 정도는 공정 전달 함수 행렬의 대각요소의 Nyquist plot에 중첩되어 그려지는 Gershgorin 원으로 알 수 있다. Gershgorin 원의 반경이 작을수록 상호간섭이 적은 것인데, 본 연구에 이용하는 새로운 interaction measure는 Gershgorin 원처럼 Nyquist plot에 중첩되어 그려질 수 있는 것으로 상호간섭 정도를 더욱 세밀하게 예측할 수 있는 것이다.

일찍이 사용되어 오고 있는 Gershgorin 원은 입출력

scaling에 영향을 받는다(Limebeer[7]). 예를 들면

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 10^{-3} \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$$

의 경우, g_{11} 에 중첩되는 Gershgorin 원의 반경이 10^{-3} 인 반면에 g_{22} 에 중첩되는 것은 10으로 diagonal dominant 하지 않다. 그러나 $S = \text{diag}[10, 10^{-1}]$ 로 입력은 S^{-1} , 출력은 S 행렬로 scaling하면,

$$SGS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

으로 되어 diagonal dominant하게 된다. Scaling은 비 집중 제어기의 구조에 전혀 영향을 주지 않으면서, 각 대각요소의 Gershgorin 원의 반경에 큰 차이가 있을 때 이를 분배하여 전체적으로 작은 원을 만드는 역할을 한다. Diagonal dominance를 얻는데는 큰 원이 문제가 되므로 이 scaling은 중요하다. 최적의 scaling 행렬이 Mees[8]에 의해 얻어졌으며 Limebeer[7]은 이를 Nyquist 행렬법에 적용 generalized Gershgorin 원을 얻었다.

그러나 이 generalized Gershgorin 원도 어떤 경우 그 반경이 커서 잘 적용되지 않을 수 있다. 예를 들면

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{5}{(4s+1)} & \frac{2.5e^{-5s}}{(2s+1)(15s+1)} \\ \frac{-4e^{-6s}}{20s+1} & \frac{1}{3s+1} \end{bmatrix}$$

의 공정의 경우, 낮은 주파수에서 Gershgorin 원이나 generalized Gershgorin 원의 반경이 커서 큰 이득의 제어기가 곤란한 것을 보여 준다. 그러나 실제로는 큰 이득의 제어기를 붙여도 잘 동작하는 것을 볼 수 있다. 이런 낮은 주파수 혹은 특정 주파수 근처에서 diagonal dominance가 깨어지는 경우에 적용될 수 있는 방법이 Lee 등[1]에 의해 소개되었다.

본 연구는 Lee 등[1]의 방법을 이용하여 비간섭 제어계를 설계하는 절차를 제시하며, 상당히 복잡하게 증명되는 이 제어계의 loop failure tolerance를 컴퓨터 그래픽을 이용하여 보이고자 한다.

2. 비집중 제어기의 안정조건

2-1. Diagonal Dominance (Rosenbrock[10])

$n \times n$ 의 전달 함수 행렬 $G(s) = \{g_{ij}(s)\}$ 를 갖는 공정에 대각 비례제어기 $K = \text{diag}\{k_i\}$ 를 설치하는 경우를 고려한다. 이 때 페루프의 전달함수 행렬은 $H(s) = (I + G(s))$

$K)^{-1}G(s)K$ 가 된다.

$N\{k, g(s)\}$ 를 $g(s)$ 의 Nyquist plot이 실수축의 k 점을 시계방향으로 감싸는 횟수로 정의한다. $N\{0, \det(G(s))\} = N\{0, \det(I + G(s)K)\}$ 이면 페루프 $H(s)$ 는 안정하다. 이는 단일 변수 시스템의 Nyquist 정리를 확장한 것으로 다변수 시스템 안정에 관한 기본 정리중 하나이다.

Gershgorin 정리에 따라 다음을 얻을 수 있다.

정리 1 만약, 모든 i 와 Nyquist contour위의 s 에 대하여

$$\left| \frac{1}{k_i} + g_{ii}(s) \right| > \sum_{j \neq i}^n |g_{ij}(s)|, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (1)$$

을 만족하고, 모든 $g_{ii}(s)$ 의 Nyquist plot이 $-1/k_i + j\omega$ 점을 시계방향으로 감싸도는 횟수의 합이 $N\{0, \det(G(s))\}$ 와 같으면, 페루프 $H(s)$ 는 안정하다.

정리 1을 만족하는 k_i 는 $g_{ii}(s)$ 의 Nyquist plot에 반경 $\sum_{j \neq i}^n |g_{ij}(s)|$ 의 Gershgorin 원들(Gershgorin band)을 첨가하여 한번에 얻을 수 있다.

2-2. Generalized Diagonal Dominance (Limebeer[7])

먼저 공정을 양의 실수 요소를 갖는 대각행렬 S 로 SGS^{-1} 처럼 scaling한다. S 가 양의 실수 요소를 갖는 대각행렬이므로 비집중 제어기의 구조를 변화시키지 않는다. 그리고 $\det(I + SGS^{-1}K) = \det(I + GK)$ 이므로 안정 조건에도 영향을 미치지 않는다. 최적의 scaling 행렬 S 가 Mees[8]에 의해 제시되었고, Limebeer[7]가 diagonal dominance조건에 이용하였다.

즉 조건 (1)은

$$\left| \frac{1}{k_i} + g_{ii}(s) \right| > p(\text{abs}(E(s))) |g_{ii}(s)| \quad (2)$$

으로 변경된다. 여기서 $p(\cdot)$ 는 행렬의 spectral norm을 의미하고 $\text{abs}(\cdot)$ 행렬의 요소별 절대값을 취한 행렬을 의미한다. $E(s) = (G(s) - \tilde{G}(s))\tilde{G}(s)^{-1}$, $\tilde{G}(s) = \text{diag}\{g_{ii}(s)\}$ 이다.

2-3. μ -Interaction Measure(Grosdidier와 Morari[6])

Grosdidier와 Morari[6]는 다음 정리로부터 μ -interaction measure를 제안하였다.

정리 2(Grosdidier와 Morari[6]) $G(s)$ 와 $\tilde{G}(s)$ 는 같은 수의 unstable pole을 갖고 $\tilde{H}(s)$ 는 안정한 대각 전달함수 행렬이라고 가정한다. 이 경우,

$$N[0, \det(I + E(s)\tilde{H}(s))] = 0 \quad (3)$$

이때 $\tilde{H}(s)$ 로부터 구한 비집중 제어기를 연결한 폐루프 $H(s)$ 는 안정하다. 여기서

$$\tilde{H}(s) = \text{diag}\{\tilde{h}_i(s)\} = (I + \tilde{G}(s)K(s))^{-1}\tilde{G}(s)K(s)$$

이다.

조건 (3)은 다시

$$|\tilde{h}_i(s)| < \mu^{-1}(E(s)) \quad (4)$$

으로 쓸 수 있다. 여기서 $\mu(E(\cdot))$ 는 $\tilde{H}(\cdot)$ 의 대각구조를 고려한 structured singular value (Doyle[9])이다. Structured singular value는 보통 다음의 상한값으로 근사하여 사용한다(Maciejowski[10]).

$$\mu(E(s)) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}} \sigma_{\max}(DE(s)D^{-1}) \leq \rho(\text{abs}(E(s)))$$

여기서 $\mathcal{D} = \{\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n), d_i \in \mathbb{R}^+\}$ 이다. 먼저 나온 근사값은 $n \leq 3$ 인 경우 등호가 성립하고, $n > 3$ 인 경우도 아주 근접하게 근사하는 것이 보고되어 있다.

조건 (4)는 다시

$$\left| -\frac{1}{g_{ii}(s)} + g_{ii}(s) \right| > \mu(E(s)) |g_{ii}(s)| \quad (5)$$

로 쓸 수 있다. 조건 (5)는 조건 (2) 보다 작은 반경의 generalized Gershgorin 원을 준다.

Grosdidier와 Morari[6]는 $\mu^{-1}(E(s))$ 를 dynamic interaction measure로 이용하고 있다. 실제 ω 에 대한 $\mu^{-1}(E(j\omega))$ 그래프를 이용 $\tilde{h}_i(s)$ 를 구하여 비집중 제어기를 얻을 수 있고, 임출력 짝도 찾을 수 있다. 즉 비집중 제어기는

$$K(s) = \text{diag}\{k_i(s)\} = \text{diag}\left\{\frac{\tilde{h}_i(s)}{g_{ii}(s)(1 - \tilde{h}_i(s))}\right\} \quad (6)$$

으로 구할 수 있다.

2-4. Lee 등[1]에 의한 안정조건

조건 (4)는 상당히 정밀한 조건이기는 하지만 $\tilde{h}_i(s)$ 의 크기만을 고려하고, 위상은 고려하지 않아 다소 conservative한 면이 있다. 여기에 Lee 등[1]은 $\tilde{h}_i(s)$ 전체크기에 대한 조건 대신에 일부는 고정되어 있고 일부만 설계한다는 생각으로 다음과 같은 안정조건을 얻었다.

정리 3 $G(s)$ 와 $\tilde{G}(s)$ 는 같은 수의 unstable pole을 가지고, $\tilde{H}(s)$ 와 $\hat{H}(s)$ 는 안정한 대각 전달함수 행렬들이라고 가정한다. 만약 $N[0, \det(I + \frac{1}{2}E(s)\tilde{H}(s))] = 0$ 이고, 모든 i 와 Nyquist contour위의 s 에 대하여

$$\left| \frac{\hat{h}_i(s)}{\tilde{h}_i(s)} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \mu^{-1}([I + \frac{1}{2}E(s)\tilde{H}(s)]^{-1} \frac{1}{2}E(s)\tilde{H}(s)), \quad (7)$$

이때, $\hat{H}(s)$ 로부터 구한 비집중 제어기를 연결한 폐루프 $H(s)$ 는 안정하다.

정리 4 $G(s)$ 와 $\tilde{G}(s)$ 는 같은 수의 unstable pole을 가지고 있고, $\tilde{H}(s)$ 는 안정하다고 가정한다. 이 경우

$$N[0, \det(I + \frac{1}{2}E(s)\tilde{H}(s))] = 0$$

이고, 모든 Nyquist contour위의 s 에 대하여

$$\mu([I + \frac{1}{2}E(s)\tilde{H}(s)]^{-1} \frac{1}{2}E(s)\tilde{H}(s)) < 1 \quad (8)$$

이때, $\tilde{H}(s)$ 로부터 구한 비집중 제어기를 연결한 폐루프 $H(s)$ 는 안정하다.

정리 5 $G(s)$ 가 안정하고 $\tilde{H}(s)$ 는 정리 4를 만족한다고 가정한다. 새로운 $\hat{H}(s)$ 가

$$\hat{h}_i(s) = \frac{\tau_2 s + 1}{\tau_1 s + 1} \tilde{h}_i(s), \quad 0 \leq \tau_2 \leq \tau_1 \quad (9)$$

이고 $\text{Re}(\hat{h}_i(j\omega)) < 1, \forall \omega \in \mathbb{R}^+$ 이면, $\hat{H}(s)$ 로부터 구한 폐루프 $H(s)$ 는 안정하고 loop failure tolerant하다(여기서 loop failure tolerant는 제어기 $\alpha k_i(s)$ 에서 α 가 0-1 어느 값을 갖더라도 안정도를 유지하는 것을 의미한다).

정리 3, 4 그리고 5에 대한 증명은 부록에 실었다. 정리 3으로부터 새로운 안정영역을 구할 수 있다. 즉 조건 (7)은 $-1/k_i$ 이 다음 폐곡선

$$g_{ii}(j\omega) \left[1 - \frac{1}{\tilde{h}_i(j\omega)(\frac{1}{2} + \beta e^{j\theta})} \right], \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (10)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \mu^{-1}([I + \frac{1}{2}E(j\omega)\tilde{H}(j\omega)]^{-1} \frac{1}{2}E(j\omega)\tilde{H}(j\omega))$$

바깥에 있는가 하는 것으로 된다. 폐곡선 (10)은 $\tilde{H}(s)$ 를 잘 선택하면 generalized Gershgorin 원으로부터 구할 수 있는 k_i 보다 훨씬 큰 k_i 를 준다.

정리 4를 만족하는 $\tilde{H}(s)$ 는 식 (8)이 복잡하여 간단하게는 구해지지 않는다. 다음장에서 최적화를 통해 실제적인 $\tilde{H}(s)$ 를 구하는 방법을 제시한다.

정리 5는 비집중 제어기의 대역폭을 조정하는 간편한 방법을 기술하고 있다.

3. 새로운 Interaction Measure와 비집중 제어기 구성

3-1. 새로운 Interaction Measure

먼저 $\tilde{H}(s)$ 의 후보로

$$\tilde{h}_i(s) = \frac{g_{ii}''(s)}{\left(\frac{\tau}{n_i}s + 1\right)^{n_i}} \quad (11)$$

를 잡는다. 여기서 $g_{ii}''(s)$ 는 $g_{ii}(s)$ 의 시간 지연항과 정규화된 unstable zero를 포함하는 $g_{ii}(s)$ 의 부분이고 ($g_{ii}''(0)=1$), n_i 는 $g_{ii}(s)$ 의 pole과 stable zero수 차이를 나타낸다. 이렇게 잡으면 제어기가 안정하고 미분항이 없는 것으로 된다. 위 $\tilde{H}(s)$ 를 정리 4에 적용, 정리 4를 만족하는 τ 의 최소값 τ^* 를 구한다.

$$v = \tau^* + \max_i \frac{d}{ds} g_{ii}''(0) \quad (12)$$

를 새로운 interaction measure로 정의하여 사용한다. 식 (12)에서 첫항은 상호간섭의 영향때문이고, 둘째항은 대각 전달함수 자체의 제약때문에 생긴 시간 상수이다. v 가 작을수록 빠른 제어 성능을 얻을 수 있다.

3-2. 비집중 제어기의 구성

다음 순서로 비집중 제어기를 구성한다.

(i) 입출력 짝중 다음을 만족하는 것들을 고른다.

$$\mu(E(0)) < 2$$

$$\mu\left[\left(I + \frac{1}{2}E(0)\right)^{-1} \frac{1}{2}E(0)\right] < 1$$

(ii) (i)을 통과한 것들에 대한 interaction measure (12)를 구하고 가장 작은 값을 주는 입출력 짝을 찾는다.

(iii) (ii)의 짝에 대하여 정리 5에 따라 제어 대역폭을 모사를 통해 조정한다.

이렇게 구한 비집중 제어기는 안정할 뿐만 아니라 loop failure tolerant하다. 반면에 비집중 페루프의 전달함수 $\tilde{H}(s)$ 를 기준으로 구한 제어기이기 때문에 근본적으로 pole-zero소거가 생기게 되며, 따라서 공정에 right-half-plane가까이에 pole이 있으며 load disturbance에 대한 제어 성능이 나쁠 수 있다. 이는 pole-zero소거에 근거하는 IMC제어나 H^∞ 제어기 등에서와 같이 피할 수 없는 것이다.

4. 예 제

Table 1. Comparison of interaction measure for the process of example 1

Pairing	$\mu(E(0))$	$\mu\left(\left(I + \frac{1}{2}E(0)\right)^{-1} \frac{1}{2}E(0)\right)$	v
diagonal	1.4142	1.6095	0
off-diagonal	0.7071	0.8508	10.895

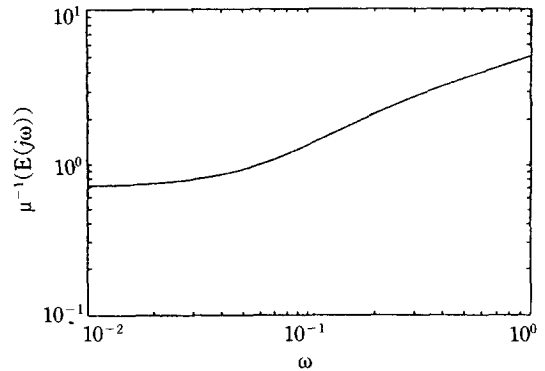


Fig. 1. $\mu^{-1}(E(j\omega))$ versus ω for the process of example 1.

4-1. 예제 1

Grosdidier와 Morari[6]에 있는 다음 공정을 고려한다.

$$G = \begin{bmatrix} \frac{5}{(4s+1)} & \frac{2.5e^{-5s}}{(2s+1)(15s+1)} \\ \frac{-4e^{-5s}}{20s+1} & \frac{1}{3s+1} \end{bmatrix}$$

Interaction measure를 구하면, 표 1과 같이 얻어진다. 작은 interaction measure값을 주는 diagonal 짝에 대하여는 $v = \tau^* = 0$ 이 됨을 알 수 있다. 즉 정리 5에 따르면 어떠한 양의 τ_1, τ_2 를 취하여

$$\tilde{H}(s) = \text{diag}\left\{\frac{1}{\tau_1 s + 1}, \frac{1}{\tau_2 s + 1}\right\}$$

를 잡아도, 여기로부터 얻어진 페루프는 안정함을 알 수 있다. 즉 제어기

$$K(s) = \text{diag}\left\{\frac{4s+1}{5\tau_1 s}, \frac{3s+1}{\tau_2 s}\right\}$$

는 시스템을 안정하게 제어한다.

이 시스템의 ω 에 대한 $\mu^{-1}(E(j\omega))$ 의 그래프는 Fig. 1과 같은데, 낮은 주파수에서 상호간섭이 심한 것을 볼 수 있다. Fig. 2와 3에 diagonal 짝에 대한 Gershgorin 원, generalized Gershgorin 원 그리고 식(10)의 곡선($\tilde{h}_i(s)=1$)을 그렸다. 식 (10)의 폐곡선은 그 영역은 크

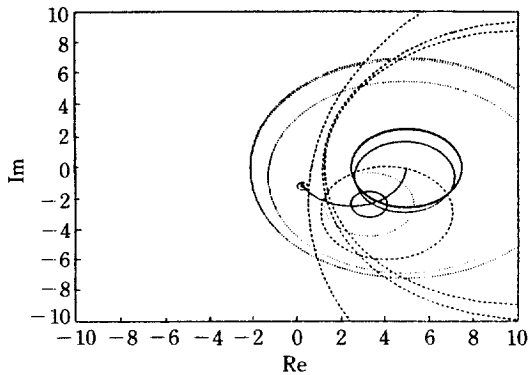


Fig. 2. Nyquist plot of $g_{11}(s)$ for the process of example 1 (Solid circle-Gershgorin circle, dotted circle-generalized Gershgorin circle, dashed circle-new interaction measure with $\tilde{H}(s)=I$).

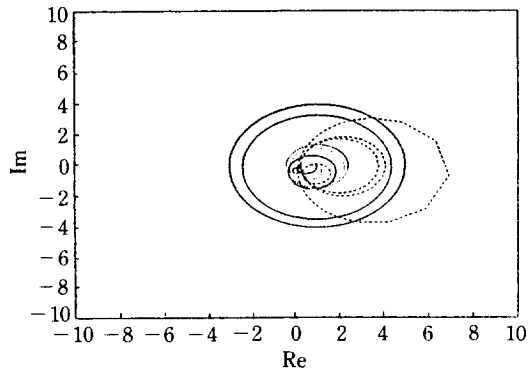


Fig. 3. Nyquist plot of $g_{22}(s)$ for the process of example 1 (Solid circle-Gershgorin circle, dotted circle-generalized Gershgorin circle, dashed circle-new interaction measure with $\tilde{H}(s)=I$).

지만 중요한 음의 실수 축을 끼고 돌지 않아 어떠한 양의 비례제어기를 달더라도 시스템이 안정한 것을 보여 주고 있다. 반면에 Gershgorin 원은 비례제어기 이득 k_2 가 대략 0.3보다 작아야 하고, generalized Gershgorin 원은 k_1 이 0.5보다 작아야 시스템이 안정된다고 예측한다. 이 시스템에 대한 Nyquist plot으로부터 비례제어기 $K = \text{diag}\{k_1, k_2\}$ 의 안정영역을 찾아본다. 여기서는 $\det(I + G(s)K)$ 의 Nyquist plot대신에 2×2 시스템에 적용되는 Grosdidier와 Morari[6]가 제안한

$$N\{1, Z(s)\} = 0$$

$$Z(s) = \frac{k_1 k_2 g_{12}(s) g_{21}(s)}{(1 + k_1 g_{11}(s))(1 + k_2 g_{22}(s))}$$

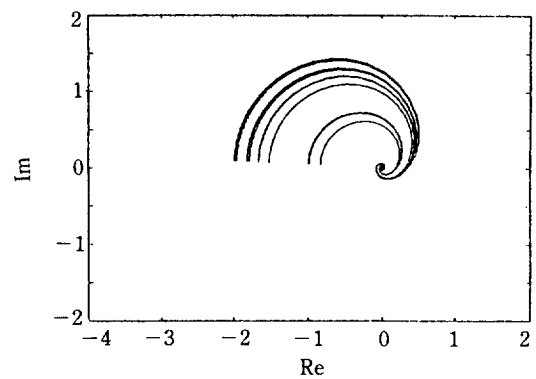


Fig. 4. Nyquist plot of $Z(s) = \frac{k_1 k_2 g_{12}(s) g_{21}(s)}{(1 + k_1 g_{11}(s))(1 + k_2 g_{22}(s))}$ for the process of example 1 where $k_1, k_2 \in \{1, 10, 100, 1000, 10000\}$.

을 이용한다. k_1 과 k_2 가 각각 $\{1, 10, 100, 1000, 10000\}$ 의 값을 갖는 25쌍에 대한 $Z(s)$ 의 Nyquist plot을 Fig. 4에 보였다. $1 + j\omega$ 를 상당히 멀게 벗어나서 돌아가는 것을 볼 수 있다. k_1 과 k_2 가 아주 크더라도 안정한 것을 알 수 있다.

RGA는

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

로 off-diagonal 짝을 추천하고 있다.

$\tilde{H}(s) = \text{diag}\left\{\frac{1}{s+1}, \frac{1}{s+1}\right\}$ 로 잡으면 $K(s) = \text{diag}\left\{\frac{4}{5}\left(1 + \frac{1}{4s}\right), 3\left(1 + \frac{1}{3s}\right)\right\}$ 의 PI제어기를 얻는다. 이 제어기의 이득이 감소하는 loop failure에 대한 안정도를 검사해 본다. 즉

$$\hat{K}(s) = \text{diag}\left\{\frac{4\alpha_1}{5}\left(1 + \frac{1}{4s}\right), 3\alpha_2\left(1 + \frac{1}{3s}\right)\right\}$$

에서 α_1, α_2 가 각각 0과 1사이의 값을 가질 때의 안정도를 Nyquist plot를 그려 조사한다. 이 경우 $\det(I + G(s)\hat{K}(s))$ 의 Nyquist plot은 $\hat{K}(s)$ 의 적분항 때문에 분석하기 복잡하다. 대신에 앞에서와 같이

$$Z(s) = \frac{\hat{k}_1(s)\hat{k}_2(s)g_{12}(s)g_{21}(s)}{(1 + \hat{k}_1(s)g_{11}(s))(1 + \hat{k}_2(s)g_{22}(s))}$$

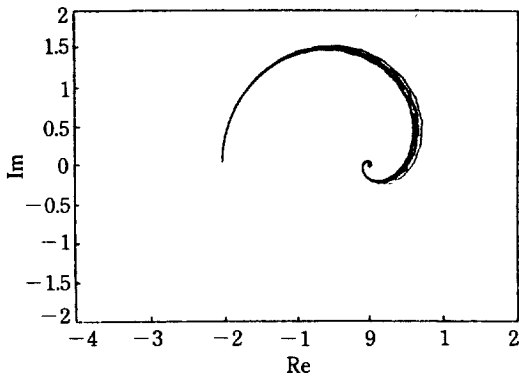


Fig. 5. Nyquist plot of $Z(s) = \frac{\hat{k}_1(s)\hat{k}_2(s)g_{12}(s)g_{21}(s)}{(1+\hat{k}_1(s)g_{11}(s))(1+\hat{k}_2(s)g_{22}(s))}$ for the process of example 1 where $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$.

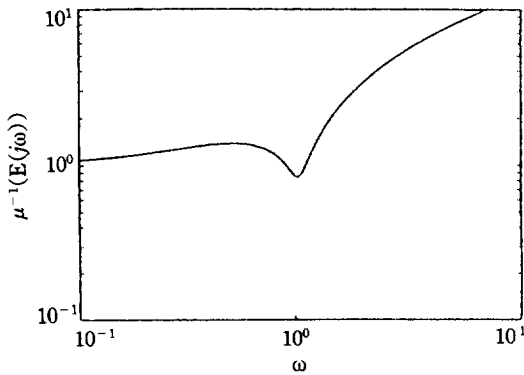


Fig. 6. $\mu^{-1}(E(j\omega))$ versus ω for the process of example 2.

의 Nyquist plot이 $1+j0$ 를 감싸지 않으면 안정도가 보장된다는 것을 이용한다. α_1, α_2 가 각각 $\{0.25, 0.5, 0.75, 1.0\}$ 의 값을 갖는 16쌍에 대한 $Z(s)$ 의 Nyquist plot을 Fig. 5에 보였다. 모두 $1+j0$ 를 감싸지 않으므로 안정도가 유지되는 것을 볼 수 있다.

4-2. 예제 2

다음 공정을 고려한다.

$$G = \begin{bmatrix} \frac{(s+4)}{(s+1)(s+5)} & \frac{1}{5s+1} \\ \frac{0.3}{s^2+0.2s+1} & \frac{2}{2s+5} \end{bmatrix}$$

이 시스템의 ω 에 대한 $\mu^{-1}(E(j\omega))$ 그래프는 Fig. 6과 같다. ω 가 1근처에서 상호간섭이 심해 Gershgorin 원

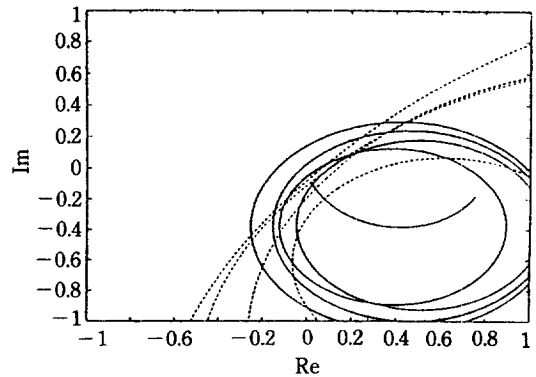


Fig. 7. Nyquist plot of $g_{11}(s)$ for the process of example 2 (Solid circle-generalized Gershgorin circle, dashed circle-new interaction measure with $\tilde{H}(s)=I$).

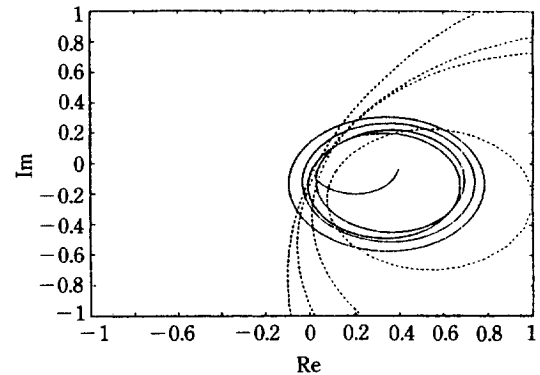


Fig. 8. Nyquist plot of $g_{22}(s)$ for the process of example 2 (Solid circle-generalized Gershgorin circle, dashed circle-new interaction measure with $\tilde{H}(s)=I$).

이나 generalized Gershgorin 원이 커지게 된다. Fig. 7과 8에 generalized Gershgorin 원과 식 (10)의 곡선 ($\tilde{h}_i(s)=1$)을 보였다. 이 경우도 generalized Gershgorin 원은 음의 실수 축을 통과하지만, 식 (10)의 곡선은 음의 실수 축을 통과하지 않는 것을 볼 수 있다.

이 공정에서도 diagonal 짝에 대한 v 는 0이었다. 즉 $\tilde{H}(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\tau_1 s + 1}, \frac{1}{\tau_2 s + 1} \right\}$ 에서 양의 어떠한 τ_1, τ_2 도 안정한 제어를 준다.

5. 결 론

Lee 등[1]이 제시한 새로운 interaction measure가 기존의 generalized Gershgorin 원이나 μ -interaction measure보다 더욱 세밀하게 상호간섭 정도를 예측하는

것을 보였다. 이 새로운 interaction measure에 근거한 제어기는 loop failure tolerance특성도 갖고 있는 것을 보였다. 따라서 본 연구에서 제시한 비집중 제어기 설계법은 한층 더 확실하게 우수한 입출력 짝을 찾고, 우수한 제어기 성능을 구현할 수 있게 하여 줄 것이다.

완전한 비집중 제어기로는 만족할 만한 제어 성능을 얻을 수 없는 공정의 경우, block diagonal의 비집중 제어기를 고려해야 하는데, 여기에 관한 본 연구의 확장은 중요하며 앞으로의 연구과제로 생각된다.

감 사

본 연구는 Univesity of Texas at Austin에서 post doc. 과정중 연구된 것으로 이를 위해 재정적인 도움을 준 연암 문화재단에 깊은 감사를 드립니다.

APPENDIX

정리 3의 증명:

$\hat{H}(s) = \hat{H}_B(s)(I + \hat{H}_M(s))$ 로 분리한다. 그러면 $I + E(s)\hat{H}(s) = (I + E(s)\hat{H}_B(s))(I + (I + E(s)\hat{H}_B(s))^{-1}E(s)\hat{H}_B(s)\hat{H}_M(s))$ 이 되고, 다변수 Nyquist 정리로부터 (Maciejowski, 1989)

$N[0, \det(I + E(s)\hat{H}(s))] = N[0, \det(I + E(s)\hat{H}_B(s))] + N[0, \det(I + (I + E(s)\hat{H}_B(s))^{-1}E(s)\hat{H}_B(s)\hat{H}_M(s))]$ 를 얻을 수 있다. 즉,

$$N[0, \det(I + E(s)\hat{H}_B(s))] = 0 \quad (A1)$$

이고

$$N[0, \det(I + (I + E(s)\hat{H}_B(s))^{-1}E(s)\hat{H}_B(s)\hat{H}_M(s))] = 0 \quad (A2)$$

이면 정리 2에 따라 안정성이 보장된다.

$\hat{H}_B(s) = \frac{1}{2}\hat{H}(s)$ 로 $\hat{H}_M(s) = 2\hat{H}(s)^{-1}\hat{H}(s) - I$ 로 잡으면, 식 (7)의 조건은 식 (A1)과 (A2)를 의미한다. 즉 $\hat{H}(s) = \hat{H}_B(s)(I + \hat{H}_M(s))$ 로부터 구성된 제어 시스템의 안정도가 보장된다.

정리 4의 증명:

정리 3에서 $\hat{h}_i(s)/\hat{h}_i(s) = 1$ 인 경우로 바로 식 (8)의 조건이 얻어진다.

정리 5의 증명:

$\hat{H}(s)$ 의 안정도는 정리 3과 4로부터 바로 유도된다. Loop failure tolerance는 다소 복잡한 증명과정이 필

요한데 Lee 등[1]에 상술되어 있다.

NOMENCLATURE

abs(E)	: matrix with absolute value of its element
diag(·)	: diagonal matrix
E(s)	: $(G(s) - \tilde{G}(s))\tilde{G}(s)^{-1}$
G, G(s)	: open-loop transfer function matrix
$\tilde{G}(s)$: $\text{diag}(g_{ii}(s))$
$g_{ii}^n(s)$: part of time delay and normalized unstable in $g_{ii}(s)$
$g_{ij}(s)$: elements of G(s)
H(s)	: closed-loop transfer function matrix
$\hat{H}(s), \hat{H}(s)$: decentralized closed-loop transfer function matrix
$\hat{H}_B(s), \hat{H}_M(s)$: parts of $\hat{H}(s)$
$\hat{h}_i(s), h_i(s)$: diagonal element of $\hat{H}(s)$ or $\hat{H}(s)$
j	: imaginary number ($\sqrt{-1}$)
K, K(s), $\hat{K}(s)$: diagonal controller transfer function matrix
$k_i(s), \hat{k}_i(s)$: elements of K(s) or $\hat{K}(s)$
$N\{k, g(s)\}$: net number of clockwise encirclements of the point $k + jo$ by the image of the Nyquist contour under a scalar transfer function g(s)
n	: number of inputs or outputs
n_i	: difference between numbers of poles and stable zeros in $g_{ii}(s)$
R+	: set of positive real numbers
Re(·)	: real part
S	: real positive diagonal scaling matrix
α, β	: constants
$\mu(\cdot)$: structured singular value
v	: interaction measure
$\sigma(\cdot)$: spectral norm
$\sigma_{max}(\cdot)$: largest absolute singular value
τ	: time constant
ω	: angular frequency

REFERENCES

1. Lee, J., Cho, W., and Edgar, T. F.: submitted to Automatic Control Conference(1991).
2. Bristol, E. H.: *IEEE Trans. Automatic Control.*, AC-11, 133(1966).
3. Grosdidier, P., Morari, M. and Holt, B. R.: *Ind. Eng. Chem. Fund.*, 24, 221(1985).

4. McAvoy, T. J.: *AIChE J.*, **27**, 613(1981).
5. Jensen, N., Fisher, D. G. and Shah, S. L.: *AIChE J.*, **32**, 959(1986).
6. Grosdidier, P. and Morari, M.: *Automatica*, **22**, 309 (1986).
7. Limebeer, D. J. N.: *Int. J. Control*, **36**, 185(1982).
8. Mees, A. I.: *System and Control Letters*, **1**, 155(1981).
9. Doyle, J.: *IEE Proc.*, **129**, 242(1982).
10. Maciejowski, J. M.: "Multivariable Feedback Design", Addison Wesley, NY(1989).