HWAHAK KONGHAK Vol. 29, No. 4, August, 1991, pp. 470-480
(Journal of the Korean Institute of Chemical Engineers)

경계적분법을 이용한 2차원 영역에의 직교좌표계 구성 및 응용

강인석 · 배진찬 · 노동수

포항공과대학 화학공학과 및 첨단유체공학연구센터
(1991년 2월 21일 접수, 1991년 5월 20일 채택)

Orthogonal Grid Generation in 2-D Domains via Boundary Integral Technique and Its Applications

In Seok Kang, Jin Chan Bae and Dong Soo Noh

Department of Chemical Engineering and Advanced Fluids Engineering Research Center, Pohang Institute of Science and Technology, P.O.Box 125, Pohang, Korea
(Received 21 February 1991; accepted 20 May 1991)

요 약

임의의 2차원 영역에 직교좌표계를 구성할 수 있는 새로운 수치적 기법을 제안하였는데 많은 공학문제의 수치해석에 응용이 기대된다. 새롭게 제안된 방법에서는 반복계산을 거치지 않고 좌표계를 직접 구성할 수 있기 때문에 거의 모든 경우에 대해 성공적으로 적용될 수 있다. 이 방법은 경계적분법과 covariant Laplace equation 방법을 조합한 것으로 다음의 두 가지 경우로 나누어 직교좌표계를 구성할 수 있다: 1) Distortion function을 $f(\xi, \eta)=\Pi(\xi)\Theta(\eta)$와 같이 곱의 형태로 지정하거나, 2) 이웃하는 두 경계선에서 좌표계 격자점을 지정할 수 있다. 본 방법을 여러 형태의 문제에 적용하여 조사한 결과 성공에 대한 확실성이 매우 높다는 사실을 확인할 수 있었다.

Abstract—A new numerical scheme, which is expected to be applied for numerical analyses of various engineering problems, is proposed for the orthogonal grid generation in an arbitrary 2-D domain. The scheme is robust and non-iterative, and based on the conjunction of boundary integral technique and the covariant Laplace equation method. In the scheme, two types of problems are considered: 1) The distortion function is specified in the product form $f(\xi, \eta)=\Pi(\xi)\Theta(\eta)$, or 2) Boundary correspondence is specified on the two adjacent sides of the boundary. The scheme has also been tested for various application problems, and it has been confirmed that the scheme is very successful.

1. 서 론

인류가 자연의 현상을 이해하고 나아가서 수식으로 표현해 보고자 그동안 기울여온 노력의 결실은 몇개의 편미분 방정식으로 압축되어 나타났다고 해도 과언은 아니다. 이러한 관점에서 볼 때 화학공학을 비롯한 여러 공학분야에서는 주어진 문제에 적합한 편미분 방정식의 해를 구하는 것이 무엇보다 중요하다 하겠다. 최근 컴퓨터의 급속한 발전은 편미분 방정식의 해를 수치해석적으로 구하는 길을 열어 주었으며 이에 대한 연구가

각 분야에서 매우 활발하게 진행되고 있다. 이러한 수치해석에 있어 가장 중요한 과정 중의 하나는 효과적인 좌표계의 설정이라 할 수 있는데, 이는 수치해석의 성공여부와 정확도가 설정된 좌표계에 의해 크게 영향을 받기 때문이다.

좌표계의 설정에 있어 꼭 고려해야 할 사항은 경계면의 형태이다. 경계면이 좌표계의 특정선(또는 면)과 일치하면 경계조건 적용이 용이하지만, 일치하지 않을 경우 많은 내삽 또는 외삽을 거쳐야 하므로 수치해석이 복잡해지고 정확도가 떨어지기 때문이다. 그러나 몇개의 특수한 형태의 경계면을 제외하고는 해석적 좌표계(analytical coordinate system)가 알려져 있지 않아 문제해결에 큰 어려움이 되어 왔었다. 이러한 어려움을 해결하기 위해 제시된 방안이 컴퓨터에 의해 좌표계 자체를 구성하는 것이다.

이러한 방법의 첫 연구는 Thompson 등[1]에 의해 행해졌는데, Thompson 등은 좌표계를 Elliptic equation의 해로써 구성하고자 하였다. 그들은 Cartesian 좌표계의 x, y와 경계면 일치 좌표계(boundary-fitted coordinate)의 ξ, η간의 함수관계가 다음의 두 식을 만족하는 것으로 가정하였다.

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=P(\xi,\eta),\quad \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=Q(\xi,\eta)$$

그들은 두 개의 함수 $P(\xi,\eta)$와 $Q(\xi,\eta)$를 시행착오법에 의해 조절하면서 좌표계의 격자점간의 간격과 형태를 원하는 방향으로 구하고자 시도하였다. 이 방법의 문제점은 직교좌표계를 구성하는 제어함수 $P(\xi,\eta)$ 및 $Q(\xi,\eta)$의 발견이 어려워 얻어지는 대부분의 결과는 비직교좌표계인 문제점이 있었다. Thompson 등의 연구결과와 기타 여러 좌표계의 구성방법들은 Thompson 등이 집필한 책에 상세히 수록되어 있으므로[2] 본 논문에서는 직교좌표계 구성방법에 대해서만 다루기로 한다.

직교좌표계의 구성은 그 자체가 갖는 이론적 가치 외에도 지배방정식을 주어진 좌표계에 대해 나타내는 경우 수식이 간단해지고(mixed derivative항 등이 없어짐) 수치해석 기법의 적용에 있어 많은 잇점이 있기 때문에 그 후 여러 연구자들이 비슷한 시도를 하였으나 실패하였다[3, 4]. 직교좌표계 구성방법 중 가장 유명한 것은 등각사상(conformal mapping)법을 들 수 있으며 이에 대한 수치적 방법도 많은 연구가 되어 왔으나[5, 6], 등각사상법에 의해 좌표계를 구성하는 경우 좌표계의 격자간 간격조절이 불가능하기 때문에 등각사상법을 발전시키고자 하는 시도가 계속되어 왔다. 이러한 방향으로의 최초의 성공적인 직교좌표계 구성법은 Ryskin과 Leal에 의해 제시되었다[7]. 그들은 함수변환 $x(\xi,\eta)$와 $y(\xi,\eta)$를 다음 두 개의 covariant Laplace방정식

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(f\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(f\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)=0$$

의 해를 구함으로써 얻을 수 있는 방법을 제시하였는데, 하나의 제어함수(경계조건에 사용되는 scale factor)에 대해 영역의 모양이 결정되고 결정된 영역에 대해서 직교좌표계가 구성되는 방법이다. 이 방법은 자유계면 문제(free boundary problem)와 같이 유체역학 문제와 영역의 형태를 동시에 결정해야 하는 문제에 반복계산법으로 적용되어 좋은 결과를 많이 내었다[8-10]. 그러나 많은 공학적 문제는 영역의 형태가 고정된 fixed boundary problem들인데, Ryskin과 Leal의 방법은 그 영역에 꼭 맞는 제어함수를 찾기가 매우 어려워 fixed boundary문제에 대해서는 적용되지 못하고 있었다. 이 문제점의 해결 방안은 Kang과 Leal에 의해 제시되었는데, 이는 경계적분법(boundary integral technique)과 covariant Laplace equation방법을 병합하여 반복계산 없이 한꺼번에 임의의 2차원(또는 axisymmetric) 영역에 직교좌표계를 구성할 수 있는 방안이다[11].

본 논문에서는 Kang과 Leal에 의해 간단하게 제안되었던 아이디어를 바탕으로 직교좌표계 구성방법에 수반되는 수치해석 방법을 구체적으로 다루고자 하며 여러 가지 형태의 영역에 적용해 보고자 한다. 또한 적용시 발견되었던 몇가지 문제점에 대한 해결 방안을 찾아냄으로써 보다 발전된 직교좌표계 구성법을 제시하고자 한다.

2. 직교좌표계 구성의 일반 원리

좌표계 구성의 기본목적은 Fig. 1에서 볼 수 있는 것처럼 문제가 주어진 영역의 형태가 복잡하여, 지배방정식에 대한 독립변수를 (x, y)로 잡는 경우 수치해법이 어려워지기 때문에, 영역자체를 일대일 대응인 함수변환 $x=x(\xi,\eta)$, $y=y(\xi,\eta)$를 통해 간단한 직사각형(또는 정사각형)영역으로 변환함으로써 지배방정식의 해를 쉽게 구하고자 하는데 있다. 이 때 실제로 문제가 주어진 영역은 physical domain, 계산을 수행할 직사각형 영역은 computational domain이라 부르는데, 좌표계 구성법은 physical domain의 독립변수 x, y와 computational domain의 독립변수 ξ, η간의 일대일 대응 함수변

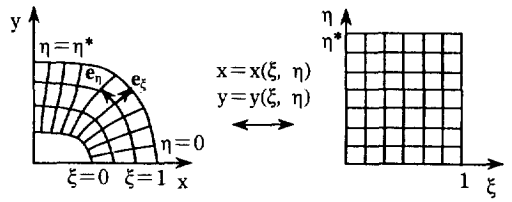


Fig. 1. Orthogonal mapping from a rectangular domain to an arbitrary simply-connected 2-D domain.

환을 찾는 것을 말한다. 이 중 경계면 일치좌표계(boundary-fitted coordinate system) 구성법은 일대일 대응 함수변환 중 physical domain의 경계변과 computational domain의 경계면을 대응시키는 방법을 말한다.

함수변환 $x=x(\xi, \eta)$와 $y=y(\xi, \eta)$가 주어져 있을 때 physical domain에 나타난 좌표계의 곡선들은 ξ 또는 η가 일정한 선들이며 Fig. 1에 나타난 covariant기본 벡터들은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\mathbf{a}_\xi=\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}=\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}\right)$$

$$\mathbf{a}_\eta=\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta}=\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta}\right) \tag{1}$$

이 때 두개의 covariant 기본 벡터 $\mathbf{a}_\xi$와 $\mathbf{a}_\eta$가 모든 격자점에서 직각을 이루면 직교좌표계라 부른다. 즉,

$$\mathbf{a}_\xi \cdot \mathbf{a}_\eta=\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}=0 \tag{2}$$

한편 covariant 기본 벡터들의 크기는 특별한 의미가 있는데, 이를 scale factor들이라 부르며 $|\mathbf{a}_\xi|=h_\xi$, $|\mathbf{a}_\eta|=h_\eta$로 나타낸다.

$$h_\xi=|\mathbf{a}_\xi|=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}$$

$$h_\eta=|\mathbf{a}_\eta|=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} \tag{3}$$

따라서 scale factor h_η는 computational domain의 η의 단위길이 변화에 해당하는 physical domain의 ξ=constant인 좌표선상의 길이변화를 뜻한다.

직교좌표계를 구성하기 위해[또는 함수변환 $x=x(\xi, \eta)$와 $y=y(\xi, \eta)$를 찾기 위해] 풀어야 할 지배방정식의 유도는 다음의 간단한 관계식으로부터 출발한다.

$$\nabla x=\mathbf{e}_x, \quad \nabla y=\mathbf{e}_y \tag{4}$$

위에서 $\mathbf{e}_x$ 및 $\mathbf{e}_y$는 x 및 y 방향으로의 단위벡터를 나타낸다. 한편 (4)식의 양변에 divergence를 취하면

$$\nabla^2 x=0, \quad \nabla^2 y=0 \tag{5}$$

를 얻을 수 있다. 위의 (5)식은 벡터 방정식이므로 모든 좌표계에서 성립하는데 일반 2차원 직교좌표계에서는

$$\nabla^2=\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\right]$$

이므로

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(f\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)=0 \tag{6a}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(f\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)=0 \tag{6b}$$

이다. 여기서 $f=h_\eta/h_\xi$는 distortion function이라고 부르는데, 그 이유는 Fig. 1로부터 쉽게 파악할 수 있다. 위의 (6)에 주어진 식들이 바로 Ryskin과 Leal의 covariant Laplace equation 방법에서 사용하는 좌표계 구성법의 지배방정식들이다. 위의 (6)식들을 자세히 살펴보면

$$f=\frac{h_\eta}{h_\xi}=\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}}$$

이므로 비선형도가 매우 높은 연립 2원 편미분방정식계임을 알 수 있다. 그러나 원칙적으로 2개의 미지수에 2개의 방정식을 갖추고 있으므로 적절한 경계조건만 주어지면 (6)의 해를 구할 수 있고, 따라서 직교좌표계 구성을 완성지을 수 있다고 생각할 수 있겠다. 그러나, 문제는 생각과 같이 간단하지 않다. 특히 비선형 편미분방정식계 (6)은 동일한 경계조건하에서도 무한히 많은 해를 갖는 경우가 있는 것으로 알려져 있다(indeterminacy[11]). 따라서 어떤 조건하에서 유일한 해(uniqueness)가 존재하는지(existence)를 밝혀내는 것이 매우 중요하다 하겠으나 이 범주는 순수 수학자들의 연구대상으로 본 논문에서는 논의하지 않기로 한다. 편미분방정식계 (6)이 갖는 특성은 지금까지도 완전히 알려진 것은 아니지만, 여러 연구자들은 무한개의 해를 갖는 경우(indeterminacy)를 피하기 위해 distortion function을 $f=f(\xi, \eta)$의 형태를 고정시키는 방법에 대해 고려하였는데, 본 논문에서도 이 경우에 한해 다루기로 한다. 위의 (6)에서 볼 수 있는 것처럼 만일 $f=f(\xi, \eta)$의 형태로 미리 주는 경우에는 식 (6)은 선형 편미분방정식계로 바뀌게 되어 여러 가지 문제해결이 용이해진다. 그러나, 문제는 $f=f(\xi, \eta)$의 형태로 주는 경우 적절한 경계조건에 대해서만 해가 존재한다는 사실이다. 따라서

주어진 f=f(ξ, η)에 합치되는 적절한 경계조건을 찾아내는 것이 매우 중요하며 이 점이 바로 본 논문의 주요내용이다. 하나의 예로 가장 간단한 형태인 f=f(ξ, η)=1을 들 수 있는데, 이 경우 (6)은

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}=0 \tag{7a}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}=0 \tag{7b}$$

와 같이 간략화되며 이는 바로 등각사상(conformal mapping)에 해당하는 식이다. 그러나 잘 알려진 바와 같이 간단한 등각사상의 경우에도 적절한 경계조건에 대해서만 해를 갖는다.

3. 경계적분법을 이용한 직교좌표계 구성방법

앞의 제2절에서 보는 것과 같이 직교좌표계 구성을 위한 covariant Laplace equation 자체에 대한 이해가 완벽히 되어 있는 상태는 아니나, 적어도 distortion function이 f=Π(ξ) Θ(η)와 같이 ξ만의 함수와 η만의 함수의 곱으로 주어질 때는 적절한 경계조건을 도입하면 (6)의 유일해가 존재함을 보일 수 있다. 이 때 적절한 경계조건을 구해내는 것이 성패의 관건이 되는데, Kang과 Leal은 경계적분법을 이용해 covariant Laplace equation의 경계조건을 Dirichlet 경계조건으로 구해내는 것을 제시하였다[11]. Mobley와 Stewart[12]도 f=Π(ξ) Θ(η)의 형태를 갖는 covariant Laplace equation을 유도하여 직교좌표계를 구성하였으나 적절한 경계조건을 반복계산법에 의해 찾았기 때문에 형태가 특이한 경우에는 수렴하지 않는 경우가 발생하였다.

Kang과 Leal의 방법을 살펴보기 위해 Fig. 2를 살펴보자. 우선 그들의 방법에서는 4개의 경계선을 가진 주어진 영역에 구성될 수 있는 직교좌표계들 중 f=Π(ξ) Θ(η)의 형태로 표시되는 경우를 고려하였는데, 이 때는 Fig. 2에 나타난 것과 같이 직교좌표계 구성을 개념적으로 2단계로 표시할 수 있다. 전체적인 목표는 각 방향으로 등간격인 직교좌표계(Cartesian coordinate) (ξ, η)로부터 실제영역 (x, y)로의 함수변환을 찾는 것인데, 중간과정으로 u=u(ξ)와 v=v(η)의 함수변환을 도입하여 직각좌표계이나 분포가 균일하지 않은 좌표계를 구성한 다음 (u, v)로부터 (x, y)로는 등각사상(conformal mapping)에 의해 좌표계를 구성한다는 아이디어이다. 이 때 중간단계의 함수변환 u=u(ξ)와 v=v(η)는 매우 중요한 의미가 있는 것으로 등각사상에 의해 좌

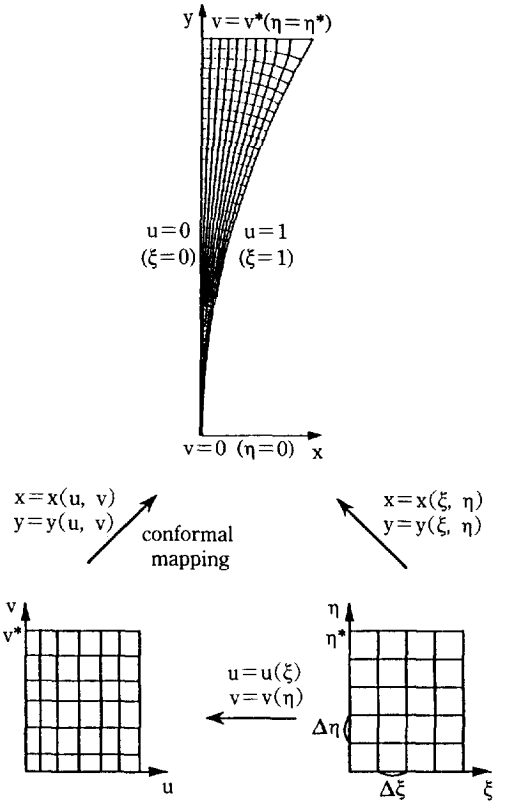


Fig. 2. Decomposition of an orthogonal mapping into conformal mapping and nonlinear stretching of conformal coordinate.

표계를 구성할 때 실제영역에 나타나는 격자점은 간격조절이 불가능한 어려움을 보완하기 위한 것으로 어느 정도 간격조절을 할 수 있는 기능을 부여한다. 이 때 distortion function은

$$f=\frac{h_\eta}{h_\xi}=\frac{h_v}{h_u}\frac{v'(\eta)}{u'(\xi)}=f_{con}\frac{v'(\eta)}{u'(\xi)}$$

로 주어지는데, 여기서 h_u와 h_v는

$$h_u=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2},$$

$$h_v=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}$$

이며 등각사상(conformal mapping)에 대해서는 $h_u=h_v$이므로 $f_{con}=1$이 되어

$$f=\frac{v'(\eta)}{u'(\xi)}=\frac{1}{u'(\xi)}\cdot v'(\eta)=\Pi(\xi)\,\Theta(\eta) \tag{8}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

위와 같이 distortion function을 $f(\xi, \eta)=\Pi(\xi)\,\Theta(\eta)$ 형태로 나타낼 수 있는 경우는 실제 응용에 있어 크게 다음의 두 단계로 나누어 생각할 수 있다.

(1) Distortion function을 $f=\Pi(\xi)\,\Theta(\eta)$ 형태로 고정하는 경우 : 이 경우는 각 경계선에서의 격자점의 위치가 자동으로 결정된다.

(2) 이웃하는 두 경계면에서의 격자점의 위치를 주는 경우 : 이 경우는 이웃하는 두 경계선에서의 격자점의 위치로부터 distortion function이 $f=\Pi(\xi)\,\Theta(\eta)$ 형태로 자동으로 결정되고 다른 두 경계선에서의 격자점의 위치가 자동으로 결정된다.

위의 두 경우는 크게 다르지 않으므로 첫번째 경우를 자세히 다루고 두번째 경우에 대해서는 차이점만을 언급하기로 한다.

3-1. $f=\Pi(\xi)\,\Theta(\eta)$ 형태로 주어지는 경우의 좌표계 구성법

앞서 제 2절에서 밝힌 것과 같이 좌표계 구성에 있어 사용하는 지배방정식은

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(f\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)=0 \tag{9a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(f\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)=0 \tag{9b}$$

이다. 이 경우 distortion function이 $f=\Pi(\xi)\,\Theta(\eta)$ 형태로 주어지므로 지배방정식은 선형 편미분방정식이 된다. 따라서 주어진 $f(\xi, \eta)$에 합당한 경계조건을 도입하여 (9)의 해를 구함으로써 함수변환 $x=x(\xi, \eta)$, $y=y(\xi, \eta)$를 찾아낼 수 있다. 여기서 Kang과 Leal의 핵심 아이디어는 주어진 $f(\xi, \eta)$에 합당한 경계조건을 경계적분법을 이용하여 찾아낸다는 것이다. 지배방정식 (9)에 대한 Dirichlet type의 경계조건은 Fig. 2에서 볼 수 있는 것처럼 physical domain의 경계선에서의 격자점 위치[$x=x(\xi, \eta)$, $y=y(\xi, \eta)$]를 지정하는 것인데, $x=x(\xi, \eta)=x[u(\xi), v(\eta)]$, $y=y(\xi, \eta)=y[u(\xi), v(\eta)]$이므로 먼저 $u=u(\xi)$, $v=v(\eta)$의 관계를 찾아내야 한다. 이를 위해 Fig. 2를 다시 살펴보자. 실제 계산이 수행될 computational domain은

$$0\le\xi\le1,\ 0\le\xi\le\eta^*$$

의 직사각형으로 주어지는데, 함수 변환 $u=u(\xi)$ $v=v(\eta)$는 다음의

$$u(0)=0,\ u(1)=1 \tag{10a}$$

$$v(0)=0,\ v(\eta^*)=v^* \tag{10b}$$

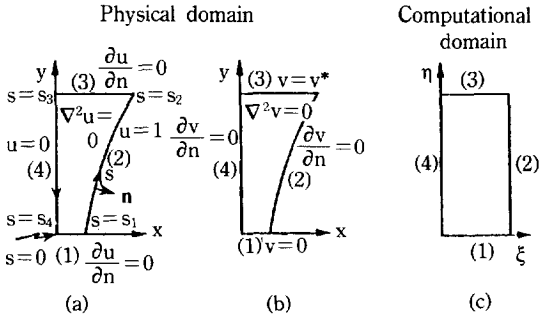


Fig. 3. Conjugate potential functions for conformal mapping.

의 관계를 만족해야 한다. 위에서 v^*는 등각사상(conformal mapping)의 원리에 의해서 자동으로 결정되고, η^* 역시 (10b)의 관계에 의해 결정된다. 이제 문제는 $f=\Pi(\xi)\,\Theta(\eta)$로 주어지고, $u(\xi)$ 및 $v(\eta)$가 (10)의 관계를 만족해야 하는 조건하에서 $u=u(\xi)$, $v=v(\eta)$의 관계를 완전히 찾아내는 일인데 이는 (8)을 두 개의 식으로 나누어 생각하여 다음의 관계를 얻음으로써 해결된다.

$$u(\xi)=\frac{\int_0^\xi \frac{ds}{\Pi(s)}}{\int_0^\xi \frac{ds}{\Pi(s)}},\quad 0\le\xi\le1 \tag{11a}$$

$$v(\eta)=\frac{\int_0^\eta \Theta(t)dt}{\int_0^1 \frac{ds}{\Pi(s)}},\quad 0\le\eta\le\eta^* \tag{11b}$$

위의 (11b)에서 $v(\eta^*)=v^*$의 관계가 성립하므로 η^*값을 찾아냄으로써 computational domain의 범위를 확정지을 수 있다. 예를 들어 $f=1$일 때 $\Pi(\xi)=1$, $\Theta(\eta)=1$로 잡으면, $u(\xi)=\xi$이고 $v(\eta)=\eta$임을 쉽게 알 수 있다.

이제 2단계로 Fig. 2를 다시 들여다 보자. 먼저 ξ방향 및 η방향의 격자수를 지정하게 되면, computational domain에서는 각 방향에 대해 grid의 간격이 일정하므로 경계선 격자점들에 대해 (ξ, η)값이 결정되고, 경계선 격자점들의 (ξ, η)값들을 알고 있으므로 (11)의 관계에 의해 경계선 격자점에 해당하는 (u, v)값을 알게 된다. 이제 결정된 (u, v)값에 대응하는 physical domain의 경계선에서의 (x, y)값을 결정하면 지배방정식 (9)에 경계조건을 Dirichlet type으로 제공하게 되는 것이다. 이 과정에서 경계적분법(boundary integral technique)이 결정적 역할을 하게 되는데 이 부분은 다음에 자세히 설명하겠다. 앞의 Fig. 2에서 보인 대로 [$x(u, v)$, $y(u,$

v)]의 함수변환은 등각사상이므로 Fig. 3에 보인 것과 같이 두 개의 켤레 퍼텐셜함수들(conjugate potential functions)을 고려하면 된다. 여기서 우리는 경계선에서의 함수변환에만 관심이 있기 때문에 내부의 퍼텐셜 함수 분포는 구할 필요가 없고, 따라서 경계적분법이 최적 방법이다. 경계적분법에 대한 자세한 설명은 다음으로 미루고 여기서는 전체적인 구성방법의 일부로서 경계선에 대한 함수변환 $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$를 구하는 과정을 설명하겠는데 이를 정리하면 다음과 같다.

(i) 경계적분법을 적용하기 위해 경계선을 따라가면서 적절히 분할하여 계산에 사용될 점들을 잡은 다음, 각 계산점까지 arclength, s를 계산한다.

(ii) 경계적분법을 적용하면 경계면 (1), (3)에서는 u, (2), (4)에 대해서는 $\partial u/\partial n$값이 구해진다.

(iii) (1)과 (3)에서의 u의 분포를 cubic spline을 이용 arclength에 대한 함수 $u=u(s)$로 나타낸다.

(iv) (iii)에서 구한 $u=u(s)$의 함수를 경계선 격자점에서의 u값에 대해 풀어 그 값에 해당하는 s값 및 좌표 (x, y)값을 결정한다. 이 과정을 거치면 computational domain의 $\eta=0$과 $\eta=\eta^*$인 경계에서의 경계조건이 Dirichlet type으로 주어진다.

(v) Fig. 3에서 다룰 켤레 퍼텐셜함수의 경계값 v^*는 경계선 (2)에 대해 Cauchy-Riemann 조건인

$$\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial n}$$

을 적용하여

$$v^*=\int_{s1}^{s2}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$$

로 부터 구한다.

(vi) 함수 v에 대해 경계적분법을 적용하면 (1), (3)의 계산점들에 대해서는 $\partial v/\partial n$, (2), (4)의 계산점들에 대해서는 v값이 결정된다.

(vii) (iv)에서와 같이 $v=v(s)$의 함수관계를 경계선 격자점에 대한 v값에 대해 풀어 그 값에 해당하는 s값 및 좌표 (x, y)값을 결정한다. 이 과정을 거치면 computational domain의 $x=0$과 $x=1$에서의 경계조건이 Dirichlet type으로 주어진다.

3-2. 이웃하는 두 경계선에 격자점이 주어지는 경우

앞에서 설명한 것과 같이 distortion function을 지정해 주는 경우도 여러 문제에 이용되지만 경우에 따라서는 이웃하는 두 경계선에 직접 격자점의 위치를 지정하는 것이 보다 편리할 수 있어 이번 절에서는 이에 대한 내용을 다루고자 한다. Fig. 4에서 볼 수 있는 것

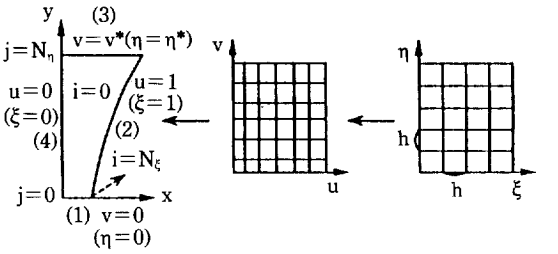


Fig. 4. Orthogonal mapping for the cases when boundary correspondences specified at two adjacent boundaries.

처럼 편의상 경계선 (1)과 (4)에서 격자점들을 지정하였다고 하자. 따라서 ξ 및 η 방향으로의 grid의 숫자는 주어졌으며 computational domain에서도 $\Delta\xi=\Delta\eta=h$로 같다고 가정하자.

이 경우에 경계선 (2)와 (4)의 대응하는 격자점에서 v값은 같고, (1)과 (3)의 대응격자점에서 u값이 같다는 사실을 이용하면 원리는 매우 간단하다. 이 내용을 바탕으로 전체적인 구성방법을 정리하면 다음과 같다.

(i) u에 대한 경계적분법을 수행하여 경계선 (1)의 격자점에서의 u값을 구한다.

(ii) 경계선 (3)에서의 $u=u(s)$의 관계로부터 경계선 (1)의 격자점에 대응하는 격자점들의 좌표 (x, y)를 구한다.

(iii) Cauchy-Riemann 조건으로부터 v^*를 구한다.

(iv) v에 대한 경계적분법을 수행하여 (4)의 격자점에서의 v값을 구한다.

(v) 경계선 (2)의 $v=v(s)$의 관계로부터 경계선 (4)의 격자점에 대응하는 격자점들의 좌표 (x, y)를 구한다.

위의 단계들에 의해 좌표계 구성의 지배방정식 (9)에 대한 경계조건은 모두 구해진 셈이다. 이제 남은 것은 distortion function, f를 구하는 일인데 이는 매우 간단한다. 식 (8)로부터

$$f(\xi,\ \eta)=\frac{v'(\eta)}{u'(\xi)} \tag{8}$$

이고, 경계선 (1)의 격자점들은 ξ가 $h=\Delta\xi$ 씩 증가하는 격자점이고 경계적분법에 의해 격자점에서의 u값을 알고 있다. 같은 방법으로 경계선 (4)에서는 $h=\Delta\eta$ 증가에 따른 v값의 변화를 알 수 있으며

$$u'(\xi_i)=\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}+O(h^2) \qquad \text{boundary} \qquad (1)$$

$$v'(\eta_j)=\frac{v_{j+1}-v_{j-1}}{2h}+O(h^2) \qquad \text{boundary} \qquad (2)$$

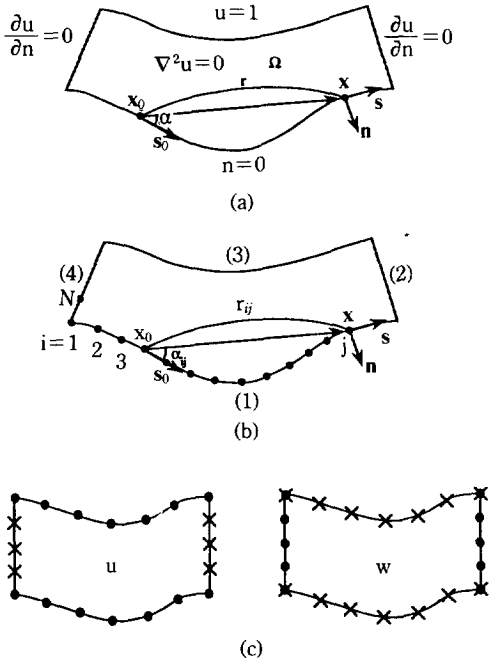


Fig. 5. Notations for the boundary integral technique; (a) notations for integral equation, (b) discretization along the boundary, (c) knowns and unknowns in the boundary integral technique(• : knowns, × : unknowns).

이므로

$$f(\xi_i,\ \eta_j)\cong\frac{v'(\eta_j)|\text{boundary (2)}}{u'(\xi_i)|\text{boundary (1)}} \tag{12}$$

에 의해서 계산한다. 이제 지배방정식에 대해 distortion function, 경계조건 모두가 구해졌으므로 수치해석에 의해 편미분방정식 (9)를 풀기만 하면 된다.

3-3. 경계적분법

앞에서 살펴본 바와 같이 경계적분법은 2차원 직교좌표계 구성에 있어 결정적인 역할을 하므로 자세히 살펴보기로 한다. 본 논문에서는 2차원 영역에 대한 경계적분법에 대해서만 다루기로 한다. 먼저 Fig. 5와 같이 영역 내부에 대해서는 Laplace 방정식이 주어지고 4개의 경계선에 대해서 경계조건이 주어진 경우를 고려해 보자. 편의상 영역 내부를 Ω, 경계선을 $\partial\Omega$라 표시하고 경계선을 따라가면서의 arclength를 s라 하면 경계면에서의 u 및 $\partial u/\partial n$값들은 Green의 정리에 의해

$$\beta\, u(\mathbf{x}_0)=\int_{\partial\Omega}G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds-\int_{\partial\Omega}u\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)ds \tag{13}$$

의 관계를 갖는데, (13)에서 β는 각이 없는 곡선상에서는 $\beta=\pi$로 주어지나 각이 진 모서리에서는 모서리의 내각이 θ라면 $\beta=\theta$이다. 한편 (13)의 적분에서 G, $\partial G/\partial n$, u, $\partial u/\partial n$의 모든 값들은 점 $\mathbf{x}$에서의 값들로 점 $\mathbf{x}_0$가 고정되어 있을 때 점 $\mathbf{x}$가 경계면을 따라가면서 적분하는 것으로 생각할 수 있다.

잘 알려진 바와 같이 2차원 영역에 대한 Green 함수는

$$G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=-\log|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|=-\log\ r \tag{14}$$

로 주어지며 이 때

$$\frac{\partial G}{\partial n}=-\frac{d\alpha}{ds} \tag{15}$$

의 관계가 있음을 쉽게 보일 수 있는데 (15)에서 각도 α는 점 $\mathbf{x}_0$에서의 cut으로부터 s가 증가하는 방향으로의 접선방향 단위벡터 $\mathbf{s}_0$와 벡터 $(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$가 이루는 각이다. 식 (14)와 (15)를 (13)에 대입하여 정리하고, $w=(\partial u/\partial n)$으로 정의하면

$$p\int_{\partial\Omega}\alpha\ du+\int_{\partial\Omega}w\log\ r\ ds=0 \tag{16}$$

와 같이 간단히 나타낼 수 있다. 경계적분법은 적분방정식 (16)에 대해 수치해석을 이용하여 각점에서의 u 또는 $w=(\partial u/\partial n)$값을 구하는 방법이다. Fig. 5b에 보인 것과 같이 경계선을 N개의 점에 의해 표시하고 (16)을 수치적으로 표현하면 다음과 같이 벡터 방정식 형태로 표현된다.

$$\mathbf{Au}+\mathbf{Bw}=0 \tag{17}$$

여기서 **A**, **B**, **u**, **w**를 경계면에 주어진 경계조건에 따라 분류하기 위하여 다음과 같이 분할한다.

$$\mathbf{A}=[\mathbf{A}^1:\mathbf{A}^2:\mathbf{A}^3:\mathbf{A}^4]$$
$$\mathbf{B}=[\mathbf{B}^1:\mathbf{B}^2:\mathbf{B}^3:\mathbf{B}^4]$$

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{u}}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \tilde{\mathbf{u}}_3\\ \mathbf{u}_4\end{bmatrix}\qquad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}\mathbf{w}_1\\ \tilde{\mathbf{w}}_2\\ \mathbf{w}_3\\ \tilde{\mathbf{w}}_4\end{bmatrix}$$

여기서 상첨자 또는 하첨자는 경계면의 번호를 나타내며 tilde가 들어간 변수벡터는 각 경계선에서 값이 알려진 변수의 벡터를 나타내는데 Fig. 5c에 보인 것처럼 • 표로 표시된 부분은 값이 알려진 격자점이며 x 표로 표시된 부분은 값을 구해야 하는 격자점을 나타낸다. 이 때 유의해야 할 사항은 모서리점에서의 w값은 경계선 (2)

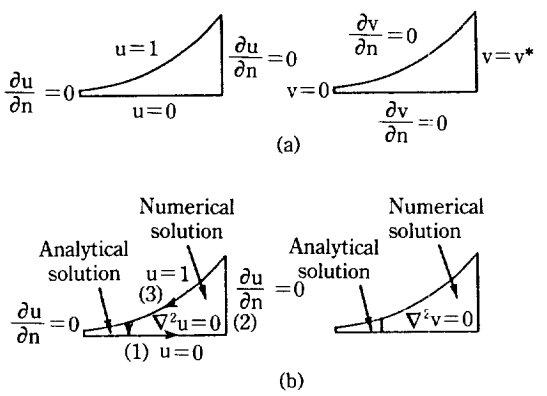


Fig. 6. Boundary integral technique for a domain with almost singular region; (a) an example of almost singular region, (b) composition of analytical and numerical solutions.

와 (4)에 대한 적분에 대해서는 알려진 값이고 (1), (3)에서의 적분에서는 미지수로 잡아야 하는데 이는 w=(∂u/∂n)가 모서리점에서는 불연속이기 때문이다. 위의 식 (17)을 정리하면

$$\mathbf{M}\,\mathbf{x}=\mathbf{N}\,\mathbf{x} \tag{18}$$

와 같이 나타낼 수 있는데, 여기서

$$\mathbf{M}=[\mathbf{B}^1:\mathbf{A}^2:\mathbf{B}^3:\mathbf{A}^4]$$
$$\mathbf{N}=[-\mathbf{A}^1:-\mathbf{B}^2:-\mathbf{A}^3:-\mathbf{B}^4]$$

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ u_2 \\ \vdots \\ w_3 \\ \vdots \\ u_4 \end{bmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{w}_2 \\ \vdots \\ \tilde{u}_3 \\ \vdots \\ \tilde{w}_4 \end{bmatrix}$$

이다. 위의 (18)에서 **M**은 (N×N)이고, **N**은 N×(N+4)인데 이는 미지수 벡터 **x**는 N개의 성분을, 기지수 벡터 $\tilde{\mathbf{x}}$는 (N+4)의 성분을 가지기 때문이다. 따라서 구하고자 하는 변수들은

$$\mathbf{x}=\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{N}\tilde{\mathbf{x}}) \tag{19}$$

에 의해 간단히 구할 수 있다.

3-4. 특이영역에서의 문제점 및 해결방안

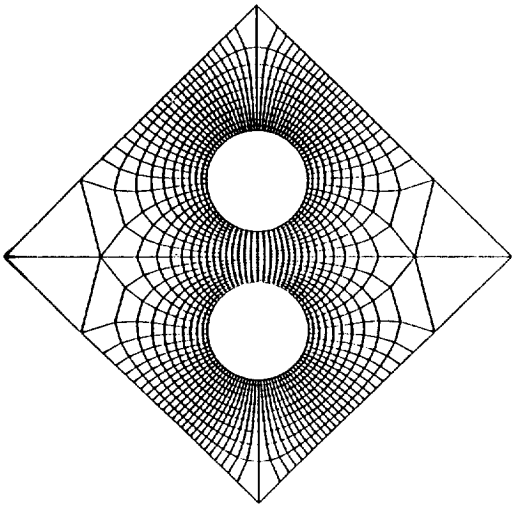
앞에서 제시한 직교좌표계 구성방법은 경계적분법의 정확도와 반복계산없이 직접 좌표계를 구성할 수 있다는 장점때문에 다음절의 응용예에서 볼 수 있는 것처럼 거의 모든 임의의 2차원 영역에 성공적으로 적용될 것으로 기대된다. 그러나, 본 좌표계 구성방법도 수치해석에 의존하기 때문에 수치해석에 내재된 약점으로 인해 Fig. 6에서 보인 것과 같은 특이영역(singular region)의 특이 경계선 주위에서는 상당한 오차를 발생시킴을 구성방법의 실제 적용 과정에서 알 수 있었다. 여기서 특이영역이라 함은 어느 한 경계선의 길이가 다른 경계선의 길이에 비해 매우 작은 경우를 지칭하는데 그 비율이 약 100 : 1 또는 그 이상되는 경우이며 특이경계선은 매우 짧은 쪽의 경계선을 말한다(비율의 order가 10 : 1 정도는 매우 정확한 결과를 준다). 특이경계선 주위에서 수치해석 오차가 커지는 이유는 그 곳에서의 u 및 v의 구배가 매우 커서 경계적분법에 의한 계산에서 오차가 증폭되기 때문이다. 이와 같은 특이경계선 주위에서 오차가 발생하는 경우의 보완은 아주 간단하다. 특이경계선 주위에 대해 섭동론(perturbation theory)을 적용하여 퍼텐셜함수 u와 v의 분포를 해석적으로 구한 다음 경계적분법의 (16)식 적분에서 그 부분에 대해서는 이미 구한 해석해를 사용함으로써 미지수에서 제외하면 된다(Fig. 6b참조). 이와 같은 개선방안을 적용하여 twin drum 공정에서 twin roll 사이의 영역에 대해 성공적으로 좌표계를 구성한 예를 다음 절에 보이겠다.

4. 직교좌표계 구성법의 응용예

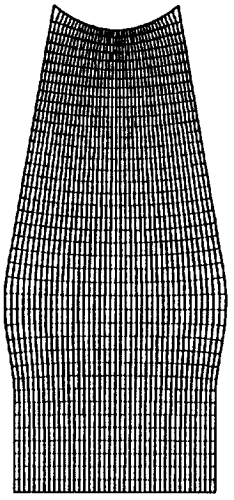
4-1. 좌표계 구성의 예

앞에서 밝힌 바대로 본 논문에서 제시한 직교좌표계 구성법은 여러 형태의 2차원 영역에 대해 성공적으로 적용되었는데 그 첫 예로서 distortion function이 $f=\Pi(\xi)\,\Theta(\eta)$의 형태로 표시되는 경우가 Fig. 7에 나타나 있다. Fig. 7a에는 distortion function을 $f=1-0.8\xi$로 고정하여 고분자 용액의 물성조사 시험에 널리 사용되는 two-roll mill에 대해 좌표계를 구성한 것이며(1/4 영역에 대하여 구성한 다음 대칭성을 이용하였음), Fig. 7b에는 $f=\text{const}\neq 1$로 고정하여 제철소의 용광로(blast furnace)에 대해 좌표계를 구성한 예가 나타나 있다. 이와 같은 직교좌표계를 이용하는 경우 지배방정식을 일반 직교좌표계에 대한 식으로 표현하여 수치해석을 하게 되므로 실제로 주어진 영역(physical domain)에 관계없이 직사각형의 computational domain(또는 physical domain이 회전체이면 원주형의 computational domain)에서 모든 계산을 용이하게 할 수 있다.

Fig. 8에는 distortion function을 $f=\Pi(\xi)\,\Theta(\eta)$ 형태로 주지 않고, 대신 이웃하는 두 경계면에서의 격자점의 위치를 지정한 경우의 예가 나타나 있다. 금속 용융액을 twin roll 사이로 뽑으면서 냉각 및 응고시켜 얇은 strip으로 주조하는 twin drum 공정을 전산 모사하기 위하여 2개의 큰 twin roll 사이의 영역에 직교좌표계를 구성한



(a)



(b)

Fig. 7. Examples of orthogonal mapping for specified f(ξ, η)=Π(ξ)Θ(η); (a) grid system for a two-roll mill (f=1−0.8ξ), (b) gird system for a blast furnace (f=constant≠1).

것인데 이 경우 아래쪽의 매우 짧은 경계선과 중심선 상의 격자점의 위치를 지정하여 (41×11) 격자를 만든 다음 대칭성을 이용해 그림을 그렸다. 다음 절에서는 구성된 직교좌표계의 응용예로서 금속 용융액의 유동에 대한 해석을 소개하겠다. 한편 이 좌표계는 한 경계선이 극도로 짧은 특이영역을 포함하는 문제로서 특이경계선 주위에 대해서는 앞서 밝힌 해석해 보완법을 사용하여 구한 것이며 특이경계선 주위의 좌표계 상황을 보이기 위해 확대하여 나타냈다. 위의 세 예에서 보인 것처럼

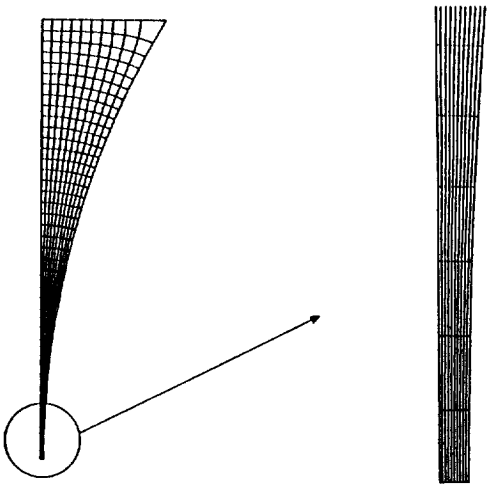


Fig. 8. Example of orthogonal mapping for the specified boundary correspondences at two adjacent boundaries; the region between the twin rolls of twin drum process.

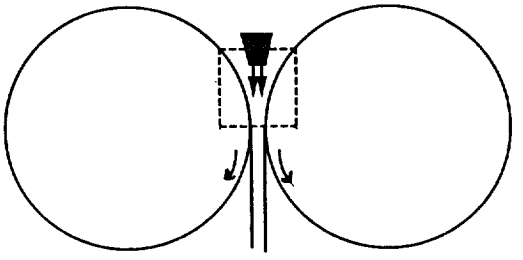


Fig. 9. Schematic diagram for the twin drum process.

몇개의 꼭지점을 제외한 모든 격자점에서 직교성은 매우 뛰어남을 알 수 있다. 단, 꼭지점이 원래 주어진 기하학적 형태에 의해 직각이 아닌 경우에는 그 꼭지점에서의 비직교성은 어떠한 방법으로도 피할 수 없다. 실제의 많은 문제들에 있어서 몇개의 꼭지점에서의 비직교성은 전체 수치해의 정확도에 미치는 영향이 매우 작으므로 크게 문제가 되지 않는다. 그러나 보다 엄밀한 해석을 원할 때에는 비직교 꼭지점을 포함한 요소(element)에 대해서는 특별한 처리를 하여 정확도를 올릴 수 있을 것이다.

4-2. 구성된 직교 좌표계의 응용예

여기에서는 직교좌표계 구성법이 실제 수치해석에 어떻게 응용되는가를 예를 들어 설명하고자 한다. 예로서 위에서 언급한 바와 같이 구성된 직교좌표계(Fig. 8)를 이용하여 Fig. 9에 보인 twin drum 공정에서의 용융액의 거동을 해석해 보았다. 여기서 보일 내용은 그 첫번째

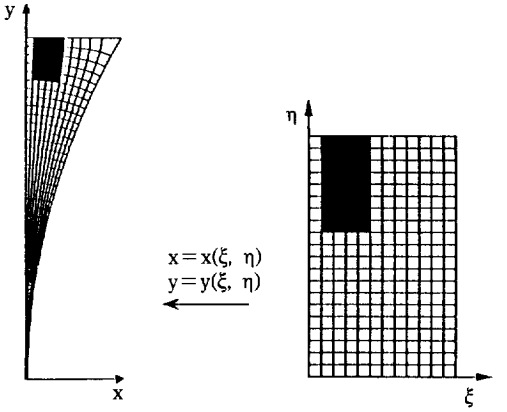


Fig. 10. Physical and computational domains for numerical analysis for twin drum process.

단계로 응고가 일어나지 않은 상태에서 용융액을 뉴튼 유체(Newtonian fluid)라 보고 해석한 것이다. 이 문제에 대한 실제영역(physical domain)과 계산영역(computational domain)간의 관계가 Fig. 10에 나타나 있다. 이 경우 유체유동에 대한 지배방정식은

$$\nabla^2\omega = \mathrm{Re}(\mathbf{u}\cdot\nabla\omega - \omega\cdot\nabla\mathbf{u}) \tag{20a}$$

$$\nabla^2\psi = \omega\,;\ \omega = (0,\ 0,\ \omega) \tag{20b}$$

인데 ω와 ψ는 vorticity와 stream function이고 $\mathbf{u}$는 속도벡터이다. 이 지배방정식을 (ξ, η) 좌표계에 대해서 나타내면

$$\mathrm{Re}\left(\frac{u_\xi}{h_\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\xi} + \frac{u_\eta}{h_\eta}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right) = \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(f\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)\right\} \tag{21a}$$

$$\frac{\partial}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(f\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\right\} = \omega \tag{21b}$$

이고 $u_\xi = -(1/h_\eta)(\partial\psi/\partial\xi)$, $u_\eta = (1/h_\xi)(\partial\psi/\partial\xi)$이고 $f = h_\eta/h_\xi$이다. 위에서 볼 수 있는 것처럼 직교좌표계를 구성했을 때의 (ξ, η) 좌표계에서의 지배방정식은 직각좌표계(Cartesian coordinate)에 비해 과히 복잡하지 않고 mixed derivative항이 전혀 나타나지 않는다. 한편 좌표계 구성으로부터 scale factor들에 대한 정보 h_ξ, h_η가 모두 구해져 있고 (21)을 유한차분법(또는 유한요소법)에 의해 산술방정식으로 나타냈을 때 결과식이 간단할 뿐만 아니라 수치해석상 안정성이 뛰어나므로 쉽게 수치해를 구할 수 있다. Fig. 11에는 (21)을 유한차분법에 의해 구한 수치해의 stream function분포가

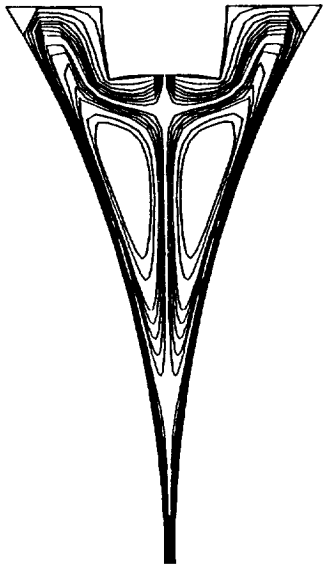


Fig. 11. Contours of stream functions for the melt flow in the region between twin rolls of twin drum process.

나타나 있는데, physical domain이 직사각형 영역인 경우에 비해 거의 같은 정도의 수렴성을 유지함을 알 수 있었다. 참고로 비직교좌표계를 사용하는 경우에는 계산량이 많아질 뿐 아니라 수렴성 자체도 유지되지 못하므로 여러 어려움이 따른다는 것은 이미 잘 알려진 사실이다.

5. 검 토

본 논문에서 제시한 직교좌표계구성법을 요약하면 distortion function의 형태가 $f = \Pi(\xi)\,\Theta(\eta)$형으로 표시될 수 있는 경우로 좌표계구성에 사용되는 지배방정식은 x 및 y에 대한 covariant Laplace equation들이고 직교좌표계를 구성하는데 있어 합당한 경계조건을 찾기 위해 경계적분법을 사용한다는 것이다. 경계적분법은 영역의 형태에 관계없이 적용할 수 있고 경계적분법에 의해 결정된 경계조건을 이용하여 지배방정식을 직사각형의 computational domain에서 풀기 때문에 임의의 2차원 영역 문제에 적용할 수 있다. 또한 본 방법은 반복계산법에 의한 기존의 방법과는 달리 모든 것이 반복계산 없이 해결되기 때문에 성공의 확실성은 거의 100 %이다. 다만 특이영역 문제에 대해서는 특이경계선 주위에서 수치해석 오차가 발생하는 경우가 있는데 이 경우에도 섭동이론에 의한 해석해와 조합하면 쉽게 해결된다.

그러므로 반복계산을 수행하지 않고 임의의 2차원 영역에 직교좌표계를 구성하는 방법으로는 본 방법이 가장 확실한 방법중 하나라 생각된다. 단지 성공의 확실성을 보장받기 위해서 grid의 간격조절이 아주 자유스러운 것은 아니고 이웃하는 두 개의 경계선에 격자점을 지정할 수 있는 정도의 자유도에 그친다. 만일 grid간격 조절능력을 극대화할 수 있도록 모든 경계선(4개의 경계선)에서의 격자점을 지정하기를 원하면 지배방정식 (6)에 대한 경계조건이 완전히 주어진 상태이므로 직교좌표계 구성에 알맞는 distortion function, f를 반복계산에 의해 찾아야 한다(이 경우 지배방정식은 비선형이다). 그러나, 이러한 반복계산방법에 의해 임의의 2차원 영역에 직교좌표계를 구성할 수 있는지의 가능성여부 자체도 아직까지 수학적으로 증명된 바가 없다. 따라서 위의 경우는 이론적으로 매우 흥미있는 연구대상이나 문제 자체가 비선형이어서 성공할 가능성이 있다하더라도 많은 반복계산을 거쳐야 하기 때문에 현실적인 면에서는 크게 가치가 없다 하겠다. 그렇다면 반복계산 없이 grid 간격 조절능력을 극대화하는 것이 중요한데, 이에 대해서는 4개의 경계선 중 3개의 경계선에 대해서 격자점을 임의로 지정할 수 있는 방법이 개발되어 있으나 지면관계상 추후 발표하기로 한다.

끝으로 여기에 소개된 직교좌표계 구성법이 여러 화학공정의 해석에 응용되길 바라면서 이 논문을 맺는다.

감 사

본 논문은 한국과학재단의 일반연구과제로 채택되어 수행 중인 연구로부터 얻은 결과의 일부를 발표한 것입니다. 연구비를 지원해 주신 한국과학재단에 깊은 감사를 드립니다.

NOMENCLATURE

A, B, M, N	: matrices in the boundary integral technique
$\mathbf{a}_\xi$, $\mathbf{a}_\eta$	: covariant base vectors
$\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$	: unit vectors
$f(\xi, \eta)$, $\tilde{f}(\xi, \eta)$	: distortion function defined as $f = h_\eta / h_\xi$
$\mathbf{G}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_o)$	: Green's function in the boundary integral technique
h_ξ, h_η, h_u, h_v	: scale factors appropriately defined
$P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$	: control functions in Thompson's method
r	: distance $\lvert\mathbf{x}-\mathbf{x}_o\rvert$
x, y	: coordinates for the physical domain
$u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$	: coordinates for the intermediate domain
u, v, w	: vectors in the boundary integral technique
u	: velocity vector

Greek Letters

α, β	: angles defined in the boundary integral technique
ξ, η	: coordinates for the computational domain
$\Pi(\xi)$, $\Theta(\eta)$	: functions in the distortion function, $f(\xi, \eta)$
ψ	: stream function
ω	: vorticity

REFERENCES

1. Thompson, J. F., et al.: *J. Comput. Phys.*, **15**, 299 (1974).
2. Thompson, J. F., et al.: "Numerical Grid Generation", North-Holland, NY(1985).
3. Pope, S. B.: *J. Comput. Phys.*, **26**, 197(1978).
4. Haussling, H. J. and Coleman, R. M.: *J. Comput. Phys.*, **43**, 373(1981).
5. Fornberg, B.: *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **1**, 386 (1980).
6. Meiron, D. I., et al.: *J. Comput. Phys.*, **40**, 345(1981).
7. Ryskin, G. and Leal, L. G.: *J. Comput. Phys.*, **50**, 71(1983).
8. Ryskin, G. and Leal, L. G.: *J. Fluid Mech.*, **148**, 19 (1984).
9. Ryskin, G. and Leal, L. G.: *J. Fluid Mech.*, **148**, 37 (1984).
10. Kang, I. S. and Leal, L. G.: *Phys. Fluids*, **30**, 1929 (1987).
11. Kang, I. S. and Leal, L. G.: *J. Comput. Phys.*, accepted(1990).
12. Mobley, C. D. and Stewart, R. J.: *J. Comput. Phys.*, **34**, 124(1980).