HWAHAK KONGHAK Vol. 29, No. 5, October, 1991, pp. 622-629
(Journal of the Korean Institute of Chemical Engineers)

하부면이 일정열속으로 가열되는 수평 다공질 유체층의 자연대류 유발에 관한 해석

윤도영 · 최창균

서울대학교 공과대학 화학공학과
(1991년 5월 10일 접수, 1991년 7월 15일 채택)

The Analysis on the Onset of Natural Convection in a Horizontal Porous Layer Uniformly Heated from Below

Do Young Yoon and Chang Kyun Choi

Department of Chemical Engineering, College of Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea
(Received 10 May 1991; accepted 15 July 1991)

요 약

유체로 포화되어 있는 초기 정지상태의 수평 다공질 유체층의 하부면이 일정열속으로 가열될 때, 시간의존성의 비선형 온도분포하에서 자연대류 임계시점을 이론적으로 예측하였다. 안정성해석은 선형이론과 안정성교환의 원리하에서 열침투깊이가 길이척도인자로 사용되는 전파이론에 근거하였다. 교란의 시간의존성 변화를 고려하기 위하여 유사변환을 통한 교란방정식의 해를 수치적으로 구하여, 정규적인 세포 형태의 교란이 발생될 임계시점을 Rayleigh 수, Prandtl 수 그리고 Darcy 수의 함수로 구성되는 상관식을 유도하였다. Prandtl 수, Darcy 수가 작아질수록 같은 가열조건에 대하여 자연대류는 늦게 발생되는 것으로 보여진다.

Abstract—When an initially quiescent, horizontal porous layer saturated with fluid experiences uniform heating from below, the time of the onset of natural convection in time-dependent, nonlinear temperature fields is predicted theoretically. The stability analysis is conducted on the basis of the propagation theory in which the thermal penetration depth is used as a length scaling factor under linear theory with the principle of exchange of stabilities. The solution for disturbance equations of similar transform considering time-dependent variations of disturbances is obtained numerically. The resulting correlations of the critical time to mark the onset of regular cells are derived as a function of the Rayleigh number, Prandtl number, and Darcy number. It is seen that natural convection sets in later as the Prandtl number and the Darcy number become smaller.

1. 서 론

수평 다공질 유체층에서 발생하는 자연대류는 Benard-Rayleigh 대류 문제의 일환으로 최근 주목받고 있는 연구대상 중의 하나이다. 지열의 이용, 곡물저장, 석유의 채취, 함수물의 건조, 원자로 또는 대형전산기의 냉각 등에 있어서 자연대류의 영향이 심각히 거론되고 있는데, 이는 관련된 공정에서 자연대류의 효과적인 활용 및 제어를 필요로 하기 때문일 것이다.

다공질 유체층에서의 자연대류 문제는 Horton과 Ro-

gers[1], Lapwood[2]에 의하여 1940년대에 제기되었다. 초창기의 연구는 기존의 균질유체층에 대한 응용예로서, Darcy의 법칙을 만족하는 다공질 유체층에 촛점이 집중되었다. Darcy의 법칙에서는 벌크유속과 압력차가 선형인 간단한 유동방정식이 주어지나, 다공성 매질의 투과도가 작아 유속이 작은 경우에만 적용이 가능하다. 따라서 지구내부 특히 석유 유정의 개발 등에 있어서는 다공성 매질의 투과도가 비교적 크므로 Darcy의 법칙은 더 이상 유효하지 못하다. 투과도가 비교적 큰 경우에는 점성 유체가 고정경계면에 고정되려는 특성으로 인하여 고정경계면에 대한 점성효과가 고려되어야 할 것이다. 이러한 요구를 수용하기 위하여 Brinkman의 모델이 적당한 유동방정식으로 제시되었는데, 이 모델은 Navier-Stokes식에 Darcy 방정식이 추가된 형태를 갖고 있다. 최근에는 이와 같은 Brinkman의 모델을 통하여 다공질 유체층에 대한 열적 불안정성 문제들이 해석되고 있는데, 이 모델에서는 새로운 무차원 수인 Darcy 수가 균질유체층과 Darcy 유체층을 연결시켜주는 중요한 역할을 한다. Rudraiah 등[3]과 Walker와 Homsy[4]는 임의의 Darcy 수에 대하여 자연대류에 필요한 임계 Rayleigh 수를 이론적으로 산출하였으며, Katto와 Masuoka[5]는 실험을 통하여 자연대류 임계조건의 결정에 있어서 Darcy 수의 역할을 보고한 바 있다.

대부분의 실제 계에서는 임계 Rayleigh 수보다 매우 큰 가열조건이 일반적이다. 이러한 경우 온도분포가 선형이 되기 훨씬 이전에 자연대류가 발생하게 되므로, 정상상태에서와는 달리 많은 어려움이 안정성 해석에 내포된다. 시간의존성 비선형 온도분포하에서의 자연대류의 임계조건을 예측하고자, 증폭이론[6], 추계모델[7], 에너지법[8] 그리고 전파이론[9] 등이 개발되었다. 이중 증폭이론이 보편적으로 사용되고 있으나, 초기교란의 크기를 가정하고, 대류시점을 규정지을 초기교란의 증폭률을 가정함에 있어 임의성을 피할 수 없다. 그러나 본 연구진에 의하여 개발되어온 전파이론에서는 여타의 임의성이 배제된 결정론적인 절차에 의하여 안정성 조건들이 산출된다. 이미 정지된 균질유체층[10, 11], 기본유동이 있는 유체층[12, 13]에서 전파이론의 강력한 적용능력이 널리 보고되었다. 균질유체층에서는 Prandtl수가 무한히 작은 경우[10], 또는 무한히 큰 경우[11]에 근사해를 통한 안정성해석에 국한되었으나, 최근 층류 Blasius 유동하에서의 안정성해석[13]에서는 임의의 Prandtl 수에 대한 자연대류 임계조건을 산출하였다. 그 결과 공통적으로 Prandtl 수가 작은 유체층일수록 자연대류는 늦게 발생되는 것으로 나타났다. 또한 Darcy의 법칙을 만족하는 다공질 유체층[14]에 전파이론을 적용하여 성공적으로 안정성조건들을 산출한 바 있으며, Brinkman의 모델을 만족하는 다공질 유체층[15]에 대하여 Prandtl 수가 무한히 큰 경우에 국한하여 안정성해석을 한 결과 Darcy 수가 작아질수록 계가 안정해지는 것으로 나타났다.

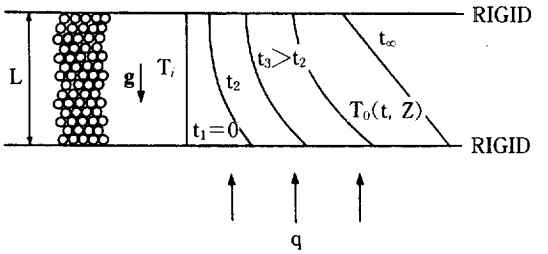

Fig. 1. Schematic diagram of porous layer.

본 연구는 Brinkman의 비정상 모델을 만족하는 다공질 유체층에 대한 자연대류 임계조건들을 산출하는 것을 목적으로 하고 있다. 본 연구의 결과로서 ındtl 수와 Darcy 수가 자연대류 임계조건의 결정에 있어서 기여할 역할이 산술적인 표현을 통해 보여지면, 본 연구의 결과는 관련 공정의 적용에 있어서 좋은 참고자료가 될 것으로 생각된다.

2. 기본계

본 연구에서는 Fig. 1에 나타나 있는 수평 다공질 유체층을 기본계로 채택하였다. 깊이가 L인 고정경계면 사이에 일정규격의 다공성 매질이 고르게 채워져 있고, 공극에는 비압축성 뉴튼 유체가 포화되어 있다. 고형물과 유체간에 국부적인 열평형을 가정하고, Slattery [16]가 제안한 국부부피평균을 적용하면 물리량들을 정의할 수 있다. 무한 수평 유체층의 하부면을 시간 $t=0$부터 일정열속 q로 가열하면 그림에 보이는 바와 같이 온도분포가 점차 선형으로 자라나게 된다.

가열이 급격할수록 자연대류는 빨리 발생하게 되며, 자연대류를 유발시키는 부력의 크기는 Rayleigh 수에 의하여, 유체의 특성은 Prandtl 수 그리고 다공성 매질의 투과도의 크기는 Darcy 수에 의하여 각각을 가늠할 수 있다. 이와 같이 다공질 유체층에서 자연대류와 연관된 중요한 매개인자로는 다음과 같은 Prandtl 수, Pr, Darcy 수, Da, Rayleigh 수, Ra, 그리고 Darcy-Rayleigh 수, Ra_D가 각각 정의된다.

$$Pr=\frac{\nu}{\alpha},\quad Da=\frac{K}{L^2}$$

$$Ra=\frac{g\beta L^4 q}{\alpha\nu k},\quad Ra_D=Da\cdot Ra$$

여기서 α는 유효 열확산계수, ν는 동점도, k는 유효 열전도도, K는 다공성 매질의 투과도, g는 중력가속도, 그리고 β는 유체의 부피팽창계수를 각각 나타낸다.

가열초기에는 전도에 의하여만 열이 상부로 전달되나, 부력의 크기가 커져서 자연대류가 발생하게 되면 다음과 같은 지배방정식이 설정되어야 할 것이다.

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0 \tag{1}$$

$$\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}=-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{u}-\frac{\mu}{K}\mathbf{u}+\rho\mathbf{g} \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\right)T=\alpha\nabla^2T \tag{3}$$

$$\rho=\rho_0[1-\beta(T-T_0)] \tag{4}$$

여기서 **u**, ρ, p, μ, T는 각각 속도벡터, 유체의 밀도, 압력, 유체의 점도 그리고 온도를 나타낸다. 또한 하첨자 0은 기준상태를 의미한다. 운동방정식으로 사용된 비정상 Brinkman 모델식인 식 (2)에서 (μ/K)**u**가 Darcy 항을 나타낸다. Boussinesq 가정을 도입하여 중력장에서 온도변화에 따른 밀도변화만을 고려하며, 이 관계는 식 (4)의 간단한 선형의 식으로 상태방정식을 구성하였다. 또한 식 (3)은 Katto와 Masuoka[5]에 근거한 에너지 식이다.

3. 기본온도 및 교란방정식

전도에 의한 기본온도분포는 다음과 같은 열전도방정식과 부여되는 초기조건과 경계조건의 지배를 받는다.

$$\frac{\partial\theta_0^*}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\theta_0^*}{\partial z^2} \tag{5}$$

$$\text{I.C.: } \theta_0^*=0 \qquad \text{at } \tau=0 \tag{6a}$$

$$\text{B.C.'s: } \frac{\partial\theta_0^*}{\partial z}=-1 \qquad \text{at } z=0 \tag{6b}$$

$$\theta_0^*=0 \qquad \text{at } z=1 \tag{6c}$$

여기서 τ, z, θ_0^*는 무차원화된 시간, 거리, 기본온도를 각각 나타내며, 이들은 L^2/α, L, qL/k로 각각 무차원화되었다. 변수분리법[17]으로 식 (5)의 해를 구하면 다음과 같다.

$$\theta_0^*=1-z-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n+1/2)^2\pi^2}\cos[(n+1/2)\pi z]\exp[-(n+1/2)^2\pi^2\tau] \tag{7}$$

위의 엄밀해는 안정성 해석에의 적용에 수학적으로 다소 어려움을 갖고 있으므로, 본 연구에서는 작은 τ에서

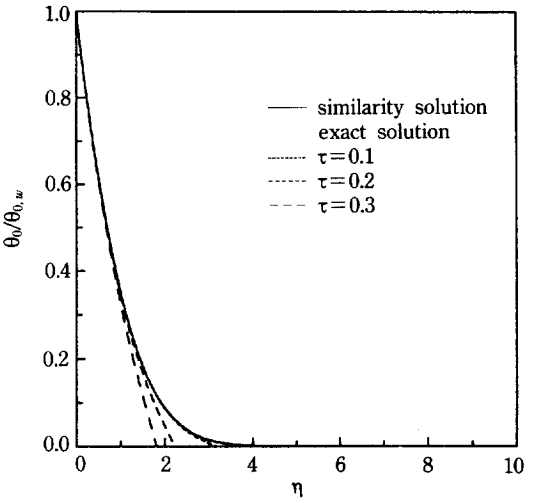

Fig. 2. Base temperature profile.

유효한 deep-pool 계를 가정한다. Deep-pool 계에서는 유사변수 $\eta(=z/\tau^{1/2})$에 의하여 기본온도 θ_0^*가 다음과 같이 변환된다.

$$\theta_0^*=\tau^{1/2}\theta_0(\eta) \tag{8}$$

식 (5)와 (6)은 위의 관계를 통하여 다음과 같이 상미분방정식으로 전환된다.

$$\frac{d^2\theta_0}{d\eta^2}+\frac{1}{2}\eta\frac{d\theta_0}{d\eta}-\frac{1}{2}\theta_0=0 \tag{9}$$

$$\text{B.C.'s: } \frac{d\theta_0}{d\eta}=-1 \qquad \text{at } \eta=0 \tag{10a}$$

$$\theta_0=0 \qquad \text{for } \eta\to\infty \tag{10b}$$

θ_0의 해는 RKF45 부프로그램[18]을 이용한 수치해가 가능하며, 그 결과를 Fig. 2에 도시하였다. 그림에서 수치해와 엄밀해인 식 (7)을 비교 도시하였는데 τ≤0.1 범위에서 유사변수해는 엄밀해를 대신할 수 있음을 알 수 있다. 하부면이 급격히 가열되면 자연대류가 부력에 기인하여 어느 시점에서 발생되며, 가열량이 많을수록 자연대류의 발생시점은 빨라지게 된다. 따라서 자연대류 발생시점을 τ_c라 할 때, $\tau_c<0.1$으로 τ_c가 결정되면 유사변수에 의한 해의 사용은 가능할 것이다.

선형 안정성이론에서는, 자연대류 발생시점에서 온도, 속도 및 압력의 물리량들은 기본량과 대류발생을 유발시키는 무한소의 교란량의 합으로 그 크기가 정의된다. 이와 같은 선형 안정성이론하에서 교란량들의 지배방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\left(\frac{1}{Pr}\frac{\partial}{\partial\tau}-\nabla^2+\frac{1}{Da}\right)\nabla^2 w_1=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\theta_1 \tag{11}$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau}+Ra\,w_1\frac{\partial\theta_0^*}{\partial z}=\nabla^2\theta_1 \tag{12}$$

$$\text{B.C.'s: } \frac{\partial\theta_1}{\partial z}=w_1=\frac{\partial w_1}{\partial z}=0 \quad \text{at } z=0 \tag{13a}$$

$$\theta_1=w_1=\frac{\partial w_1}{\partial z}=0 \quad \text{at } z=1 \tag{13b}$$

여기서 w_1과 θ_1은 무차원화된 수직속도교란과 온도교란을 각각 나타내며, 이들은 각각 α/L과 $\alpha\nu/(g\beta L^3)$으로 무차원화되어 있다. 또한 식 (13)의 경계조건은 일정열속의 하부경계면, 일정온도의 상부경계면 그리고 고정경계조건이 양경계면에 적용되어 양경계면에서 교란의 요동이 없음을 보여준다.

4. 전파이론

주어진 Rayleigh 수, Prandtl 수, Darcy 수에 대하여, 식 (11)과 (12)의 해가 경계조건을 만족하는 최소 임계시점 τ_c를 구하는 것이 본 연구의 우선되는 과제이다. 전파이론에서는 선형안정성이론하에서 안정성 교환의 원리를 수용하여 실제 가시화될 수 있는 교란의 변화만을 고려한다. 대류발생시 교란의 시간의존성 변화를 고려하기 위하여 열침투깊이를 새로운 길이 척도인자로 도입하는데 전파이론의 특징이 있다. 무차원 열침투깊이를 δ라 할 때, Fig. 2에서, 가열면의 온도에 1%에 해당되는, 즉 $\theta_0/\theta_{0,w}=0.01$인 거리를 열침투깊이로 가정하면, $\tau\leq 0.1$의 범위에서 $\delta=3.25\tau^{1/2}$로 주어진다.

수평면에 대하여는 경계면이 없으므로 수평면에 대한 의존성은 다음과 같은 무차원 수평파수 a_x와 a_y를 통하여 교란의 주기적 변화를 가정할 수 있다.

$$(w_1,\theta_1)=[w_1^*(\tau,z),\theta_1^*(\tau,z)]\exp[i(a_x x+a_y y)] \tag{14}$$

여기서 i는 허수를 나타낸다. 대류발생이전에는 전도에 의하여 열이동이 주로 이루어지므로 전도에 의한 열침투깊이가 대류발생시 길이 척도요소로서 중요한 역할을 할 것이다. 따라서 열침투깊이 δ를 이용하여 길이요소들을 재정렬하기 위하여 $\zeta=z/\delta$의 관계인 새로운 변수 ζ를 도입하면, $\delta\propto\tau^{1/2}$이므로 ζ는 z와 τ를 고루 수용하는 유사변수의 역할을 한다. 이 때 교란의 진폭함수들은 다음의 관계를 통하여 유사변환된다.

$$[w_1^*(\tau,z),\theta_1^*(\tau,z)]=[\tau w^*(\zeta),\theta^*(\zeta)] \tag{15}$$

새로운 진폭함수들인 w^*와 θ^*는 유사변수인 $\zeta(=z/\tau^{1/2})$만의 함수가 된다. 이 때 $a=(a_x^2+a_y^2)^{1/2}$의 관계하에서 식 (11)과 (12)는 다음과 같이 변환된다.

$$D^4w^*=\frac{-1}{2Pr}(\zeta D^3-a^{*2}\zeta D+2a^{*2})w^* +\left(2a^{*2}+\frac{1}{Da^*}\right)D^2w^*-a^{*2}\left(a^{*2}+\frac{1}{Da^*}\right)w^* +a^{*2}\theta^* \tag{16}$$

$$D^2\theta^*=a^{*2}\theta^*-\frac{1}{2}\zeta D\theta^*+Ra^*w^*D\theta_0 \tag{17}$$

$$\text{B.C.'s: } D\theta^*=w^*=Dw^*=0 \quad \text{at } \zeta=0 \tag{18a}$$

$$\theta^*=w^*Dw^*=0 \quad \text{for } \zeta\to\infty \tag{18b}$$

여기서 $a^*=a\tau^{1/2}$, $Ra^*=Ra\,\tau^2$, $Da^*=Da\,\tau^{-1}$이고 $D=d/d\zeta$으로 모든 거리요소들이 무차원 열침투깊이 $\delta(\propto\tau^{1/2})$하에서 재환산되었다. 따라서 새로이 유도된 지배방정식은 시간의존성을 함축하고 있다. 안정성 교환의 원리하에서 a^*, Da^*와 Ra^*는 모두 고유한 값으로 가정되며, 지배방정식이 유사한 균질유체층의 실험적 증거[19]에 의하면 $\tau_c\propto Ra^{-1/2}$이므로 자연대류 임계시점근처에서 Ra^*의 고유치 설정은 어느정도 합리적이다. 식 (15)의 유사변환에 의한 정규형태의 해석이 전파이론의 핵심이다. 이와 같은 가정하에서 주어진 Pr, a^*와 Da^*에 대한 최소의 Ra_c^*가 자연대류 발생의 임계조건으로 고려되며, 이에 대응하는 파수 a_c는 주어진 Ra, Pr, Da에 대하여 τ_c에서 발생하는 가장 왕성한 대류 크기를 의미하게 될 것이다.

5. 수치해법

안정성 지배방정식인 식 (16), (17)은 주어진 경계조건하에서 고유치인 a^*, Da^*, Pr과 Ra^*가 존재하게 되는 고유치문제이다. 따라서 a^*, Da^*, Pr을 임의로 설정하면 이에 상응하는 Ra^*는 고유치로 존재한다. 본 문제에 outward shoot 법[20]을 적용하면 경계치문제가 초기치 문제로 된다. 임의로 a^*, Da^*와 Pr을 고정하면, 고유치인 Ra^*와 $\zeta=0$에서의 초기조건들인 $\theta^*(0)$와 $D^3w^*(0)$을 가정할 수 있다. 또한 식 (16), (17)의 지배방정식과 식 (18)의 경계조건이 모두 균일하므로, $\zeta=0$에서 D^2w^*가 임의로 고정될 수 있다. 위의 과정을 통해 본 문제가 초기치 문제로 된다. $\zeta=0$에서의 경계조건과 가정된 값을 초기조건으로 하여, 4차의 Runge-Kutta의 적분법을 근거로 식 (16), (17)의 적분을 수행한다. 이 때 적분은 $\zeta=0$에서 $\zeta\to\infty$에 해당되는 임의의 적분깊이에 대한 방향으로 이루어진다. 적분결과 식 (18b)의 경계조건의 만족도를 검색하고, 식 (18b)의 경계조건을 충

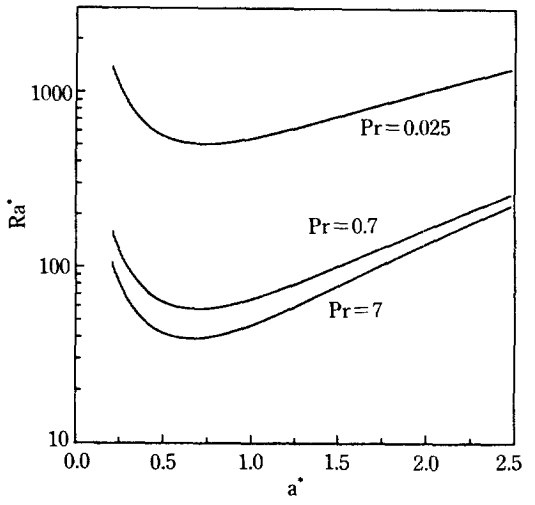

Fig. 3. Neutral stability curves.

분히 만족할 때까지 Ra^*, $\theta^*(0)$, $D^3w^*(0)$를 Newton-Raphson법으로 보정하여 적분을 다시 시도한다. 위의 가정된 값들이 수렴하였을 때 고유치인 Ra^*를 산출하고, 적분 깊이를 점차 증가시켜가면서 $\zeta\to\infty$에 해당되는 Ra^*를 외삽법을 통하여 결정하였다.

6. 결과 및 검토

위의 수치해법을 통하면 임의의 Pr과 Da^*에 대하여 a^*와 Ra^*간의 중립안정성 곡선이 Fig. 3과 같이 구해진다. 그림에서 $Da^*=1$이고 Prandtl 수는 대표적인 유체인 물(Pr=7), 공기(Pr=0.7), 그리고 수은(Pr=0.025)에 해당되도록 변화시켰다. Prandtl 수가 작아질수록 곡선은 점차 상부에 위치함을 볼 수 있다. Prandtl 수가 무한히 큰 경우는 Pr=7일 때의 곡선과 거의 유사하였다. 각 곡선에서 최소의 Ra_c^*와 이에 대응하는 a_c^*가 자연대류 발생의 최소 요건으로 규정지어진다. 따라서 Prandtl 수가 작아질수록 Ra_c^*는 커지므로, Prandtl 수가 작은 유체일수록 계가 보다 안정함을 알 수 있다. 즉 Prandtl 수가 작은 유체층일수록 열이 전도에 의하여 전달되는 시간은 길어지고, 이에 따라 자연대류는 늦게 개시된다. 이와 같은 경향은 Da^*의 값을 변화시켰을 때도 유사하게 나타났다. Da^*를 변화시키면서 Prandtl 수에 따른 Ra_c^*를 도시하면 특성곡선이 Fig. 4와 같이 구해진다. 그림을 보면 전반적으로 Pr<1인 범위에서 Prandtl 수가 Ra_c^*의 결정에 중요한 역할을 하고 있음을 짐작할 수 있다. 각 특성곡선에서 Prandtl 수가 작아질수록 Ra_c^*는 점차 커지고 있으며, Prandtl 수가 매우 작은 영역(Pr<0.01)에서는 각 특성곡선이 거의 일치하고 있음은 주목할

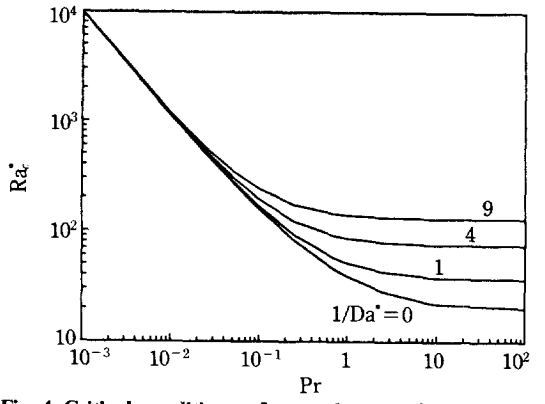

Fig. 4. Critical conditions of natural convection.

사실이다. Prandtl 수가 무한히 작아져서 거의 0에 근접할 경우 Ra_c^*는 Pr에 반비례하게 되며, 식 (16)에서 $Pr\to0$에 해당되는 지배방정식을 채택하여 본 연구와 유사한 수치해법을 적용하면 "$PrRa_c^*=9.25$"로 계산된다. Fig. 4에서 $Da\to\infty$에 해당되는 특성곡선은 다공성 매질이 없는 균질유체층에 해당된다. 균질유체층에 대하여 Prandtl 수와 $Ra_c^*(=Ra\tau_c^2)$의 상관관계를 통하면 다음과 같이 자연대류 임계시점이 예측된다.

$$\tau_c=4.48\left(1+\frac{0.629}{Pr^{3/5}}\right)^{5/6}Ra^{-1/2} \tag{19}$$

위의 예측식에서 $Pr\to\infty$일 경우 본 연구의 결과는 Lee 등[11]이 근사적으로 예측한 $\tau_c=4.57Ra^{-1/2}$와 매우 유사하다. 반면에 Nielsen과 Sabersky[19]의 실험결과에 의하면, Prandtl 수가 매우 큰 실리콘 오일 유체층에서 자연대류가 발견되는 시점이 $\tau_0=19Ra^{-1/2}$으로 관측되었으므로 본 연구의 결과에 의하면 $\tau_0\approx4\tau_c$에 해당된다. 이와 같은 경향은 가열조건이 다른 균질유체층[9, 10] 및 다공질 유체층[14, 15]에서 공통적으로 나타났다.

Fig. 4에서 Da^*가 작아질수록 특성곡선은 점차 상부로 이동함을 볼 수 있다. 즉 임의의 Prandtl 수에 대하여 Da^*가 커지면 Ra_c^*는 커지므로 이러한 경우 자연대류가 발생하기 위하여는 보다 큰 Rayleigh 수가 요구된다. Prandtl 수가 큰 영역(Pr>1)에서는 그림에 보이듯이 Da^*가 작아질수록 특성곡선은 점차 평행하게 상부로 이동하게 된다. 그러나 Da^*가 작아지면, 넓은 Prandtl 수 영역에서 Ra_c^*는 일정하게 유지되므로, Ra_c^*에 대한 Prandtl 수의 의존성은 약화된다. Darcy 수가 무한히 작아지면 유체층은 Darcy 유동을 만족하는 다공질 유체층으로 간주할 수 있으므로, 식 (16)의 지배방정식은 보다 간단한 형태로 변화된다. 관련내용은 Yoon과 Choi [14]에 의하여 설명되어 있다. Walker와 Homsy[4]는

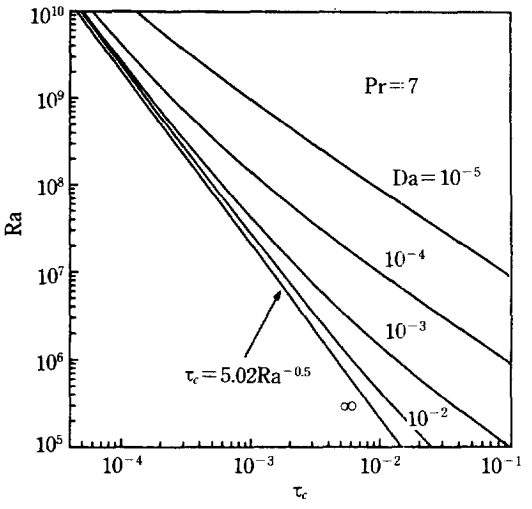

Fig. 5. Critical time of natural convection for water.

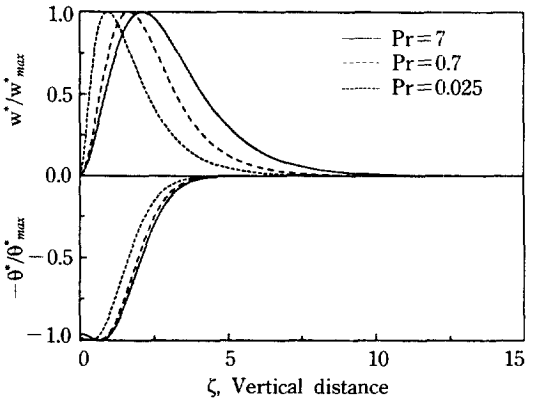

Fig. 6. Distribution of disturbances.

이론적으로, Katto와 Masuoka[5]는 실험적으로, Darcy 수가 10^{-4}보다 작아지면 이 유동은 Darcy 유동으로 간주할 수 있음을 보고하였다. 또한 그들은 정상상태의 Brinkman의 유동모델에 대하여 Darcy 수가 $10^{-4}<Da<1$의 범위에서 최소 임계 Rayleigh 수의 결정에 중요한 역할을 하며, Darcy 수가 1보다 커지면 균질유체층과 유동특성이 유사함을 지적한 바 있다. Darcy의 법칙을 만족하는 다공질 유체층에 대하여 Darcy-Rayleigh 수, Ra_D가 Rayleigh 수의 역할을 대신하게 되며, 이 때에는 "$Ra^*_{Dc}=8.54$"로 산출된다. Fig. 4의 자료들과 Ra^*_{Dc} ($=Ra_D\tau_c$)를 이용하여 수은, 공기, 물이 각각 다공성 매질에 포화되어 있는 다공질 유체층의 자연대류 임계시점의 상관식을 구하면 다음과 같다.

$$\tau_c=22.2[1+0.0271(\tau_c/Da)]^{1/2}Ra^{-1/2} \text{ for mercury} \quad (20a)$$

$$\tau_c=7.17[1+0.238(\tau_c/Da)^{0.8}]^{5/8}Ra^{-1/2} \text{ for air} \quad (20b)$$

$$\tau_c=5.02[1+0.465(\tau_c/Da)^{0.7}]^{5/7}Ra^{-1/2} \text{ for water} \quad (20c)$$

위의 식 (20)은 다양한 크기의 투과도를 갖는 다공질 유체층에서 유발되는 자연대류의 임계시점에 대한 상관식으로 전체 수치해와 ±2% 이내의 오차를 갖고 있다. 이 중에서 지하수 개발, 석유유정 등에서 활용도가 높은 경우로서 물이 다공성 매질에 포화되어 있는 수평다공질 유체층에서 유발되는 자연대류의 임계시점을 식 (20c)에서 계산하여 도시하면 Fig. 5와 같다. 각 Darcy 수에 대하여 Rayleigh 수와 임계시점에 도시되어 있다. 그림에서 제일 하단부의 직선은 $Da\to\infty$ 인 균질유체층의 자연대류 임계시점을 보여준다. 그림에 보이듯이 $\tau_c=5.02Ra^{-1/2}$로서 τ_c는 Rayleigh 수의 $-1/2$승에 비례하고 있다. 그러나 Da가 점차 작아져서 $Da<10^{-5}$의 영역에 이르면 $\tau_c\propto Ra^{-1}$의 관계를 보여준다. Darcy 유동에서는 $\tau_c\propto Ra_D^{-1}(=Da^{-1}Ra^{-1})$이므로 $Da<10^{-5}$의 영역은 Darcy 유동으로 간주할 수 있다. 이와 같은 경향은 수은과 공기에 대하여도 유사하게 나타났다. 즉 비정상 Brinkman의 모델에서는 $10^{-5}<Da<10^{-2}$ 범위에서 τ_c에 대한 Ra의 기울기가 -1승에서 $-1/2$승으로 전이되므로, 이 범위에서 Darcy 수가 자연대류 임계시점의 결정에 중요한 인자로 작용하고 있다. 따라서 Darcy 수는 정상상태와 비정상상태에서 그 역할이 비슷함을 짐작할 수 있다.

임계조건에서 교란의 분포를 Fig. 6에 도시하였다. Prandtl 수가 자연대류 임계조건의 결정에 미치는 영향은 교란의 분포를 검토하면 더욱 명백해진다. 교란의 크기들은 각기 최대치로 규격화되어 있다. 그림에서 보이듯이 온도교란의 분포는 Prandtl 수에 거의 무관하게 열침투깊이내에 한정되어 있으며, 속도교란은 Prandtl 수가 작아질수록 그 최대치와 교란량들이 가열면 쪽으로 집중됨을 볼 수 있다. 즉 Prandtl 수가 큰 유체일수록 속도교란의 잠재력이 유체층의 넓은 영역에 분포하므로 Prandtl 수가 작은 유체보다 쉽게 자연대류가 유발됨을 짐작할 수 있다. 또한 열교란들이 열침투깊이내에 한정됨은 열침투깊이를 길이 척도로 사용함에 있어 어느정도 타당함을 보여주는 간접적인 자료라 말할 수 있다. 이와 관련하여 대류발생 시점에서 교란의 성장율을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{w_1^*}\frac{\partial w_1^*}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=\tau_c}=\frac{1}{\tau_c}\left(1-\frac{\zeta}{2w^*}Dw^*\right) \quad (21)$$

$$\frac{1}{\theta_1^*}\frac{\partial \theta_1^*}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=\tau_c}=\frac{-1}{\tau_c}\left(\frac{\zeta}{2\theta}D\theta^*\right) \quad (22)$$

식 (21), (22)에 나타나 있는 속도교란과 온도교란의

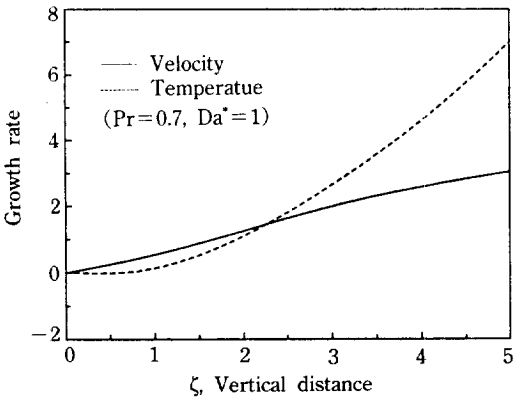

Fig. 7. Distribution of growth rates.

성장율을 $\tau_c=1$로 가정하여 Fig. 7에 도시하였다. 속도교란은 가열면에서 성장율이 0이다. 이는 고정경계조건의 영향일 것이다. 가열면이외의 영역에서는 속도교란의 성장율이 양의 값을 갖고 있으므로 이 영역에서는 속도교란의 지속적인 성장을 시사해준다. 반면에 온도교란은 가열면 부근에서 감폭됨이 보여진다. 이와 같은 현상은 가열면 부근에서 온도교란의 감폭으로 마련된 열에너지가 대류 유동을 보이기 위한 운동에너지로 전이되고 있음을 보여주는 것이다. 에너지 전이가 일어나는 영역이 가열면 부근에 위치하는 사실은 열침투깊이의 길이척도 인자로서의 중요성을 재인식시켜 준다. 위에 보이듯이 교란의 일률적인 증폭만을 고집하는 기존의 증폭이론과는 달리 전파이론에서는 교란의 증폭 및 감폭을 고루 수용하는 특징을 갖고 있다.

이상과 같이 하부면이 일정열속으로 가열되는 수평다공질 유체층에서 Prandtl 수와 Darcy 수가 자연대류 임계시점에 미치는 영향을 전파이론을 근거로 검토하였다. 본문에 보이듯이 전파이론은 자연대류 임계시점을 예측함에 있어 간편함과 신뢰성이 있는 것으로 보여진다.

7. 결 론

하부면이 일정열속으로 급격히 가열되는 수평다공질 유체층의 자연대류 임계특성을 이론적으로 검토하였다. 전파이론을 통한 안정성해석으로 자연대류 임계시점이 Rayleigh 수, Prandtl 수 그리고 Darcy 수에 대한 산술식으로 도출되었다. 그 결과 같은 가열조건에 대하여 Prandtl 수 또는 Darcy 수가 작아질수록 자연대류는 늦게 발생되는 것으로 나타났다. 비정상 Brinkman 유동모델 하에서 Prandtl 수는 1보다 작은 영역에서, 그리고 Darcy 수는 10^{-5}-10^{-2} 영역에서 자연대류 임계시점의 결정에 중요한 역할을 하였다. 열교란은 열침투깊이에 한정되었으며, 속도 경계층은 Prandtl 수가 작아질수록 가열면 근처로 접근하였다. 또한 가열면 근처에서 온도교란의 감폭은 속도교란의 성장에 필요한 추진력을 제공하여 주는 것으로 보여진다.

감 사

본 논문은 1990년도 문교부 지원 학술진흥재단의 자유공모과제 학술연구조성비에 의하여 연구되었습니다. 귀 재단에 감사드립니다.

NOMENCLATURE

a : dimensionless horizontal wave number, $(a_x^2+a_y^2)^{1/2}$
a^* : modified wave number, $a\tau^{1/2}$
D : differential operator with respect to ζ
Da : Darcy number, K/L^2
Da^* : modified Darcy number, Da/τ
g : gravitational acceleration [m s^{-2}]
i : imaginary number, $(-1)^{1/2}$
K : permeability [m^2]
k : thermal conductivity [J $m^{-1}s^{-1}K^{-1}$]
L : depth of porous layer [m]
p : pressure [N m^{-2}]
Pr : Prandtl number, ν/α
q : wall heat flux [J m^2s^{-1}]
Ra : Rayleigh number, $(g\beta L^4q)/(\alpha\nu k)$
Ra^* : modified Rayleigh number, $Ra\,\tau^2$
Ra_D : Darcy-Rayleigh number, $Da\cdot Ra$
Ra_D^* : modified Darcy-Rayleigh number, $Ra_D\,\tau$
T : temperature [K]
t : time [s]
u : velocity vector [m s^{-1}]
w : z-component of dimensionless velocity
x, y : dimensionless horizontal coordinates
z : dimensionless vertical coordinate

Greek Letters

α : thermal diffusivity [m^2s^{-1}]
β : volumetric thermal expansion coefficient [K^{-1}]
δ : dimensionless thermal penetration depth, $\propto \tau^{1/2}$
ζ : modified vertical distance, $z/\tau^{1/2}$
θ : dimensionless temperature
μ : dynamic viscosity [Kg $m^{-1}s^{-1}$]
ν : kinematic viscosity [m^2s^{-1}]

ρ : density [Kg m^{-3}]
τ : dimensionless time

Subscripts

c : critical state
i : initial state
o : observable state
0 : base state
1 : perturbed state

REFERENCES

1. Horton, C. W. and Rogers, F. T.: *Appl. Phys.*, **16**, 367(1945).
2. Lapwood, E. R.: *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **44**, 508 (1948).
3. Rudraiah, N., Veerappa, B. and Rao, S. B.: *J. Heat Transfer*, **102**, 254(1980).
4. Walker, K. and Homsy, G. M.: *J. Heat Transfer*, **99**, 338(1977).
5. Katto, Y. and Masuoka, T.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **10**, 297(1967).
6. Foster, T. D.: *Physics Fluids*, **8**, 1249(1965).
7. Jhaveri, B. S. and Homsy, G. M.: *J. Fluid Mech.*, **114**, 251(1982).
8. Wankat, P. C. and Homsy, G. M.: *Physics Fluids*, **20**, 1200(1977).
9. Choi, C. K., Shin, C. B. and Hwang, S. T.: *Proc. 8th Int. Heat Transfer Conf., San Francisco*, **3**, 1389 (1986).
10. Yoo, J. S. and Choi, C. K.: *Korean J. Chem. Eng.*, **4**, 128(1987).
11. Lee, J. D., Choi, C. K. and Shin, C. B.: *Int. Chem. Eng.*, **30**, 761(1988).
12. Yoo, J. Y., Park, P., Choi, C. K. and Ro, S. T.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **30**, 927(1987).
13. Kim, M. C., Choi, C. K. and Davis, E. J.: *Int. J. Eng. Fluid Mech.*, **3**, 71(1990).
14. Yoon, D. Y. and Choi, C. K.: *Korean J. Chem. Eng.*, **6**, 144(1989).
15. Yoon, D. Y. and Choi, C. K.: *J. Korean Inst. Chem. Engr.*, **27**, 348(1989).
16. Slattery, J. C.: Momentum, Energy, and Mass Transfer in Continua, McGraw-Hill, New York, 1972.
17. Özisik, M. N.: Heat Conduction, John-Wiley, New York, 1980.
18. Forsythe, G. E., Malcolm, M. A. and Moler, C. B.: Computer Methods for Mathematical Computations, Prentice-Hall, New Jersey, 1977.
19. Nielsen, R. C. and Sabersky, R. H.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **17**, 69(1974).
20. Chen, K., Chen, M. M. and Sohn, C. W.: *J. Fluid Mech.*, **132**, 49(1983).