

## 밀면이 일정 열속으로 가열되는 평판 Poiseuille 흐름의 열 도입부에서의 대류 불안정성

김민찬 · 최창균

서울대학교 공과대학 화학공학과  
(1991년 6월 27일 접수, 1991년 10월 28일 채택)

## Convective Instability in the Thermal Entrance Region of Plane Poiseuille Flow Heated Uniformly from Below

Min Chan Kim and Chang Kyun Choi

Dept. of Chem. Eng., College of Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742  
(Received 27 June 1991; accepted 28 October 1991)

### 요 약

밀면이 일정 열속으로 가열되는 평판 Poiseuille 흐름의 열 도입부에서 부력에 의하여 유발되는 자연 대류의 발생 조건을 전파 이론을 적용하여 해석하였다. 해석 결과 본 연구에서 고려되는 계에서 자연 대류 현상을 지배하는 인자는  $Ra/Gz^{4/3}$ 임을 알 수 있었다. 물( $Pr=7$ )과 공기( $Pr=0.7$ )에 대하여 해석 결과와 기존의 실험 결과를 비교하여 보면, 본 연구의 해석 결과가 매우 합리적임을 알 수 있다. 자연 대류 발생 조건의 Prandtl수에 따른 의존성을 살펴보면, Prandtl수가 작아질수록 계는 더 안정해지는 결과를 얻었으며 이는 기존의 실험결과와 일치하는 경향이다.

**Abstract**—Critical conditions of buoyancy driven convection in the thermal entrance region of plane Poiseuille flow heated uniformly from below are analysed by employing propagation theory. From the results of analysis, it is known that the important parameter governing the natural convection phenomena of present system is  $Ra/Gz^{4/3}$ . Comparison of results of the present study and the existing experimental data for water ( $Pr=7$ ) and air ( $Pr=0.7$ ) shows that the present theory is very reasonable. It is found that the system becomes more stable as Prandtl number decrease, and therefore the dependence of critical conditions on the Prandtl number is consistent with the experimental trend.

### 1. 서 론

온도 또는 농도차에 의한 부력에 의하여 발생하는 자연 대류는 잘 알려진 자연현상이다. 그러나, 밀도차가 존재한다는 사실이 자연 대류의 발생을 보장하지는 않는다. 자연 대류는 밀도차에 의한 위치 에너지가 점성 및 확산에 의한 에너지 소산을 극복할 때 발생된다. 자연

대류에 대한 체계적인 연구는 금세기 초부터 진행되어 왔으며, Chandrasekhar[1]에 의하여 종합적으로 정리되었다.

강제 대류 존재하에서 부력에 의하여 유발되는 2차 유동은 정교한 열 교환기, 전자 회로의 냉각 등에서 강제 대류에 의한 열 전달을 증가시키며 공정에 유리한 쪽으로 작용하나 화학 증착 반응기, 전기 도금계에서는

국지적으로 물질 전달을 증가시켜 제품의 균일성에 좋지 않은 영향을 미친다. 이러한 실용적인 요구에 의하여 수평판 사이를 흐르는 강제 대류 유동에서의 부력 효과에 대한 연구가 진행되어 왔다[2]. 또한 학문적인 면에서 자연 대류 발생 시점은 난류 열 전달 특성을 이해하는데 중요한 정보를 제공하므로 수평판 사이를 흐르는 강제 대류 유동에서 부력 효과에 대한 연구의 주안점은 자연 대류 발생 시점을 찾아내는데 주어져 왔다[3-8].

Hwang과 Cheng[3]은 주 흐름 방향으로의 교란의 성장을 무시하는 국지 안정성 해석(local stability analysis)을 사용하여 밀면이 일정 온도로 가열되는 평판 Poiseuille 흐름의 열 도입부에서 자연 대류 발생 시점을 해석하였으나, 실험적 결과와는 많은 차이를 보였다. Choi[4], Davis와 Choi[5]는 밀면이 일정 열속으로 가열되는 평판 Couette 흐름의 열 도입부에서 자연 대류 발생 시점을 온도 교란이 열 경계층 내에 한정된다는 수정된 국지 안정성 해석(modified local stability analysis)을 사용하여 그들의 실험결과를 잘 설명하였다. Choi 등[6]은 교란의 주 흐름 방향으로의 성장을 고려하고, 열 경계층 깊이를 새로운 길이 차원으로 하는 전파 이론(propagation theory)을 사용하여 Prandtl수가 큰 유체에 대하여 이 문제를 다시 해석하여 Choi[4]의 실험 결과와 일치하는 결과를 내었다.

Prandtl수는 자연 대류의 발생을 억제하는 두 요소인 열 확산과 점성의 상대적인 비를 나타내므로, 이들 두 요소가 자연 대류 발생에 미치는 효과의 상대적인 크기를 나타내는 주요한 요소이다. 따라서 Prandtl수가 자연 대류 발생 임계조건에 미치는 영향에 대한 연구가 진행되어 오고 있다. 최근 Kim과 Choi[7]는 밀면이 일정 온도로 가열되는 평판 Poiseuille 흐름의 열 도입부에서 자연 대류 발생 시점을 Prandtl수 전 범위에 걸쳐서 해석하여 기존의 실험결과를 잘 설명하는 결과를 제시하였다. 그러나, 그들은 폭 방향의 속도 교란 성분을 유사 변환하는 과정에서 약간의 오류를 포함하고 있다. 이러한 오류로 인하여 그들의 해석 결과는 Prandtl수가 작은 경우( $Pr < 1$ )에는 약 5% 정도의 오차를 포함하고 있다고 보아야 한다. Choi와 Kim[8]은 일정 열속으로 가열되는 평판 Couette 흐름의 열 도입부에서 자연 대류 발생 시점을 Prandtl수 전 범위에 걸쳐서 해석하였다. 이들의 해석 결과에 의하면 계는 Prandtl수가 감소할수록 점점 안정해지는 경향을 보였다. 이와 같은 Prandtl수에 대한 자연 대류 발생 임계 조건의 의존성은 다른 연구자들에 의한 기존의 해석 결과[3, 9]와 반대되는 현상으로써 이에 대한 실험적 검증이 필요하다. Maughan과 Incropera[10-12]는 밀면이 일정 열속으로 가

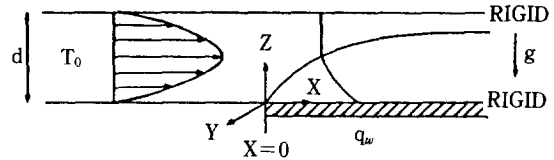


Fig. 1. Schematic diagram of system is consideration.

열되는 평판 Poiseuille 흐름의 열 도입부에서 부력에 의하여 유발되는 2차 유동의 형태를 실험적으로 보였으며, 물( $Pr=7$ )과 공기( $Pr=0.7$ )에 대한 자연 대류 발생 임계 시점을 결정하여 자연 대류 발생 시점의 Prandtl수에 대한 의존성을 어느 정도 볼 수 있었다. 그들의 결과에 의하면 부력에 의한 2차 유동의 형태는 주 흐름 방향으로의 와류(longitudinal vortex) roll이며, 계는 Prandtl수가 작아질수록 안정해 짐을 알 수 있었다.

본 연구에서는 밀면이 일정 열속으로 가열되는 평판 Poiseuille 흐름의 열 도입부에서 부력에 의하여 발생하는 자연 대류의 발생 시점을 교란의 주 흐름 방향으로의 성장을 고려하는 전파 이론을 사용하여 해석하고, 자연 대류 발생 시점의 Prandtl수에 대한 의존성을 살펴보면, 해석 결과를 기존의 실험결과와 비교해 보고자 한다. 따라서 본 연구는 Kim과 Choi[7]의 연구 결과의 확장 및 보완으로 그들의 오류를 시정하고, 가열 조건이 일정 온도에서 일정 열속으로 바뀔 때 자연 대류 현상을 지배하는 새로운 인자를 찾아내려 한다.

## 2. 이론적 해석

### 2-1. 지배 방정식

본 연구에서 고려되는 계는 Fig. 1에 나와있는 바와 같이 밀면이 일정 열속으로 가열되는 평판 Poiseuille 흐름이다. 이러한 계에서 자연 대류 발생점을 찾아내기 위해 자연 대류 현상을 해석하는데 일반적으로 적용되는 Boussinesq 가정을 사용하면, 본 연구에서 해석할 지배 방정식은 아래와 같이 나타내어진다.

<연속 방정식>

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

<Navier-Stokes식>

$$\rho_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad (2)$$

<에너지방정식>

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) T = \alpha \nabla^2 T \quad (3)$$

〈상태방정식〉

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (4)$$

윗 식에서  $\mathbf{u}$ 는  $\mathbf{u} = i\mathbf{u} + j\mathbf{v} + k\mathbf{w}$ 로 나타내어지는 속도 벡터이며,  $P$ 는 압력을,  $T$ 는 온도를,  $t$ 는 시간을,  $\mathbf{g}$ 는 중력 가속도를,  $\alpha$ 는 열 확산 계수를,  $\mu$ 는 점도를,  $\beta$ 는 부피 팽창 계수를 각각 나타낸다.

## 2-2. 기본 온도 분포

안정성 해석을 하기 위해서는 우선 순수한 강제 대류에 의한 온도 및 속도 분포를 알아야 한다. 본 연구에서 고려되는 계는 완전히 전개된 평판 Poiseuille 흐름이므로 기본 온도 및 속도 분포는 아래와 같이 나타내어진다.

$$\bar{U} = 6(z - z^2) \quad (5)$$

$$\bar{U} \frac{\partial \theta_b}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta_b}{\partial z^2} + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial \theta_b}{\partial x^2} \quad (6)$$

여기서  $\bar{U} = U_b / \langle U_b \rangle$ 이고  $\theta_b = k(T - T_0) / q_w d$ 이다. 경계조건은

$$\frac{\partial \theta_b}{\partial z}(x, 0) - 1 = \frac{\partial \theta_b}{\partial z}(x, 1) = 0 \quad (7a)$$

$$\frac{\partial \theta_b}{\partial z}(\infty, z) - 1 = \theta_b(0, z) = 0 \quad (7b)$$

이다. 윗 식은 지배 방정식 및 경계조건이 복잡하여 해석적으로 풀기가 어렵다. 따라서 본 연구에서는 다음과 같은 가정을 사용하여 지배 방정식을 단순화시켰다. 첫째, 본 연구에서는 Rayleigh수가 매우 큰 영역을 다루므로, 자연 대류의 효과는 밀면 근처에 한정된다. 따라서  $z \gg z^2 (z \ll 1)$ 인 영역에서 자연 대류 효과가 지배적이므로,  $z^2$ 항은 무시된다. 둘째, Peclet수가 100보다 큰 경우에는 주 흐름 방향으로의 전도를 무시할 수 있으므로,  $Pe$ 를 포함하는 항을 소거한다. 그러면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\bar{U} = 6z \quad (8)$$

$$\bar{U} \frac{\partial \theta_b}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta_b}{\partial z^2} \quad (9)$$

윗 면의 효과를 무시할 수 있는 경우, 즉  $x$ 가 작은 경우, 본 연구에서는 아래와 같은 새로운 무차원 온도와 유사변수를 도입하여 새로운 온도 분포식을 유도하였다.

$$\zeta = z/x^{1/3} \quad (10)$$

$$\theta_b^* = \frac{k(T - T_0)}{q_w d x^{1/3}} \quad (11)$$

$$D^2 \theta_b^* = 2\zeta \theta_b^* - 2\zeta^2 D \theta_b^* \quad (12)$$

경계조건은

$$D \theta_b^* = -1 \quad \text{at } \zeta = 0 \quad (13a)$$

$$\theta_b^* \rightarrow 0 \quad \text{as } \zeta \rightarrow \infty \quad (13b)$$

이며,  $D = d/d\zeta$ 이다. 윗 식을 Runge-Kutta-Gill 4차 방법을 적분 방법으로 한 “shooting” 방법을 써서  $\zeta = 0$ 에서  $\theta_b^*$ 를 구할 수 있으며, 이것을 Nusselt수  $Nu$ 와 Graetz수  $Gz$ 의 정의에 따라 나타내면 다음과 같다.

$$\theta_b^*(0) = \frac{Gz^{1/3}}{Nu} = 0.845358 \quad (14)$$

따라서 자연 대류가 일어나기 전의 Nusselt수는 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$Nu = 1.18293 Gz^{1/3} \quad (15)$$

이 결과를 Osborne과 Incropera[13]의 실험결과와 비교하여 보면  $x \leq 0.05$ 인 영역에서 잘 맞는다. 따라서  $x \leq 0.05$ 인 영역에서는 위의 가정들이 타당함을 간접적으로 증명한 셈이 된다.

## 2-3. 선형 안정성 이론

선형 안정성 이론에서는 무한소의 교란이 기본 속도, 압력, 온도장에 부가시켜 이 무한소의 교란의 성장을 본다. 선형 이론과 Boussinesq 가정을 사용하여 정상 상태에서의 교란 방정식을 무차원화된 형태로 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{1}{Pr} \left\{ \bar{U} \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right\} = - \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \nabla_1^2 u \quad (17)$$

$$\frac{1}{Pr} \left\{ \bar{U} \frac{\partial v}{\partial x} \right\} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \nabla_1^2 v \quad (18)$$

$$\frac{1}{Pr} \left\{ \bar{U} \frac{\partial w}{\partial x} \right\} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \nabla_1^2 w + \theta \quad (19)$$

$$\bar{U} \frac{\partial \theta}{\partial x} + Ra \left\{ u \frac{\partial \theta_b}{\partial x} + w \frac{\partial \theta_b}{\partial z} \right\} = \nabla_1^2 \theta \quad (20)$$

여기서  $\nabla_1^2 = \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  이고  $Ra = \frac{g \beta q_w d^4}{k \alpha \nu}$ ,

$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ 이다. 본 연구의 무차원화 과정에서 온도 교란을 무차원화 할 때 기본 온도와는 다른 무차원 인자를 사용한 것을 제외하고는 다른 연구들과 같다. 자세한 무차원 변수에 대한 설명은 Nomenclature에 나타나 있다.

#### 2-4. 전파 이론

전파 이론은 deep-pool계에서 교란량들을 무차원 열 경계층 깊이의 차원을 갖는  $x^{1/3}$ 을 길이 차원으로 사용하여 아래와 같은 형태로 변환한다.

$$\begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \\ p(x, y, z) \\ \theta(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{4/3} u^*(\zeta) \\ (x^{1/3}/a) v^*(\zeta) \\ x^{2/3} w^*(\zeta) \\ x^{1/3} p^*(\zeta) \\ \theta^*(\zeta) \end{bmatrix} \exp(i a y) \quad (21)$$

여기서 “i”는 허수부를 나타내며, “a”는 무차원 파수이고, “.”는 교란의 진폭 함수를 나타낸다. 본 연구와 Kim과 Choi[7]의 연구사이에서 근본적인 차이는 v의 형태에 있다. Kim과 Choi[7]는 폭 방향 및 수직 방향의 속도 교란 성분 v를 w와 같은 형태인  $v = x^{2/3} v^*(\zeta)$ 로 유사 변환하였으나,  $v = -\frac{1}{a} \frac{dw}{dz}$ 로 놓는 기존의 연구 결과[1]에  $w = x^{2/3} w^*(\zeta)$ 를 대입하면  $v = -\frac{1}{a} \frac{dw^*}{d\zeta} x^{1/3}$ 로 되어  $v = x^{1/3}/a v^*(\zeta)$ 의 형태로 유사 변환한 본 연구의 타당성을 알 수 있다.

앞의 기본 온도장을 풀 때와 마찬가지로  $Pe$ 가 100보다 크다는 가정을 사용하여  $Pe$ 를 포함하는 항을 무시하고 식 (21)을 식 (17)-(20)에 대입하고  $v^*$ 와  $p^*$ 를 소거하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$D^2 u^* = a^2 u^* + \frac{1}{Pr} \{ 8\zeta u^* - 2\zeta^2 D u^* + 2w^* \} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} D^4 w^* = & 2a^2 w^* - a^4 w^* + a^2 \theta^* - \frac{1}{3} D^3 u^* + \frac{1}{3} \zeta D^4 u^* \\ & - \frac{1}{3} a^2 \zeta D^2 u^* + a^2 D u^* \\ & - \frac{1}{Pr} \left\{ 2 \left( -\frac{4}{3} u^* + \frac{1}{3} \zeta D u^* - D w^* \right) \right. \\ & - 2\zeta \left( -D u^* + \frac{1}{3} \zeta D^2 u^* - D w^* \right) \\ & - 2\zeta^2 \left( -\frac{2}{3} D^2 u^* + \frac{1}{3} \zeta D^3 u^* - D^3 w^* \right) \\ & \left. - 4a^2 \zeta^2 D w^* + 4\zeta a^2 w^* \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

$$D^2 \theta^* = a^2 \theta^* - 2\zeta^2 D \theta^* + Ra^* \left\{ w^* D \theta_b^* - \frac{1}{3} \zeta u^* D \theta_b^* + \frac{1}{3} u^* \theta_b^* \right\} \quad (24)$$

경계조건은 다음과 같다.

$$u^* = w^* = D w^* = D \theta^* = 0 \quad \text{at } \zeta = 0 \quad (25a)$$

$$u^* = w^* = D w^* = \theta^* = 0 \quad \text{as } \zeta \rightarrow \infty \quad (25b)$$

여기서  $D = d/d\zeta$ ,  $a^* = a x^{1/3}$ ,  $Ra^* = Ra x^{4/3}$ 이다. Prandtl수가 무한대인 경우 식 (22)와 경계조건 (25)에 의하여 주 흐름 방향으로의 속도 교란 성분  $u^*$ 가 사라진다.

전파 이론에서는 수직 방향의 길이 차원을 갖는  $a^*$ 와  $Ra^*$ 를 상수로 놓는다. 온도 분포가 비선형인 계에서는 길이 차원은 유체층의 깊이 보다는 열 경계층 깊이로 잡는 것이 타당하다. 이의 타당성은 실험적인 결과가 보여준다[10-12, 15]. 밀면이 일정 열속으로 가열되는 계의 열 도입부에서 자연 대류의 발생 요건을 나타내는  $Ra^*$ 는  $Ra/Gz^{4/3}$ 으로 나타내어진다.

#### 2-5. 지배 방정식의 해법

본 연구에서는 자연 대류 발생 임계 조건을 찾는 것을 목적으로 한다. 따라서 앞에서 유도된 지배 방정식, 식 (22)-(24)와 경계조건, 식 (25)를 만족하는 최소  $Ra^*$ 와 그에 해당하는  $a^*$ 를 구하는 것이다. 그런데 앞에서 유도된 지배 방정식에는 기본 온도 분포가 계수로 들어가 있으므로 교란 방정식을 풀기 위해서는 우선 기본 온도장을 풀어야 한다. 식 (12)로 나타내어지는 기본 온도장을 풀기 위해서 4차 Runge-Kutta-Fehlberg방법을 사용했다.

교란 방정식, 식 (22)-(24), 을 풀기 위해서 Chen 등 [16-18]에 의해서 그 타당성이 입증된 “outward shooting” 방법과 외삽법을 사용했다. 지배 방정식의 해법을 간단히 설명하면 다음과 같다. 교란 방정식을 풀어나가기 위해서는 경계조건들이 초기 조건들로 바뀌어야 하므로, 주어진 Prandtl수와  $a^*$ 에 대하여 고유치  $Ra^*$ 와 세 개의 초기 조건  $D u^*$ ,  $D^3 w^*$ 와  $\theta^*$ 를 가정한다. 지배 방정식과 경계조건이 “homogeneous”하므로, 고유치 문제(eigenvalue problem) 특성상  $D^2 w^*$ 를 임의로 가정할 수 있다. 위의 과정을 거치면 경계치 문제가 초기치 문제로 변환된다.

앞의 경계조건이  $\zeta \rightarrow \infty$ 에서 주어져 있으므로, 윗 경계면의  $\zeta$ 를 충분히 큰 값으로 가정하여 지배 방정식을 푼다. 만약 초기에 가정한 고유치와 초기 조건이 옳은 값들이면 이 경계면에서  $u^*$ ,  $w^*$ ,  $D w^*$ 와  $\theta^*$ 가 0이 된다. 만약 위 값들이 0이 되지 않으면 Newton-Raphson 방법을 사용하여 수렴할 때까지 위 과정을 반복한다. 교

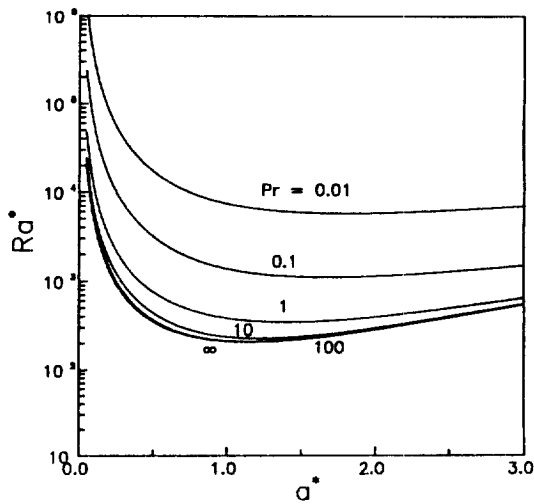


Fig. 2. Neutral stability curves for various Prandtl number.

란량들은 열 경계층 깊이 이후에서는 급격히 감소하므로  
 윗 경계면의 증가에 따른 고유치  $Ra^*$ 의 변화량도 급격히  
 감소한다. 따라서 위 결과로부터 무한 경계면에서의  
 고유치  $Ra^*$ 의 값을 외삽법으로 구할 수 있다.

### 3. 결과 및 검토

해석 결과 한계 안정성 곡선이 Fig. 2에 나타나 있고,  
 Table 1에는 임계 조건들의 수치값들이 나타나 있다.  
 Table 1로부터 물( $Pr=7$ )과 공기( $Pr=0.7$ )의 경우에  
 자연 대류 임계 조건을 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$x_c = 60.16 Ra^{-3/4} \text{ and } a_c = 0.3190 Ra^{1/4} \text{ for water (26)}$$

$$x_c = 87.18 Ra^{-3/4} \text{ and } a_c = 0.3225 Ra^{1/4} \text{ for air (27)}$$

위의 결과와 Maughan과 Incropera[10-12]의 실험결과  
 를 비교한 것이 Fig. 3에 요약되어 있다. 본 연구의 해석  
 결과와 실험결과를 비교하여 보면 같은 Rayleigh수인  
 경우 자연 대류 임계 시점을 나타내는  $x_c$ 는 실험결과가  
 이론 결과 보다 큰 값을 가진다. 이러한 차이는 본 연  
 구에서는 무한소의 교란을 가정하여 이 교란이 성장하는  
 점을 찾아내었으나, 실험적으로는 이 교란이 성장하여  
 감지될 때를 측정했기 때문인 것 같다. 이와 같은  
 실험결과와 이론적 해석 결과의 차이는, Blasius 흐름

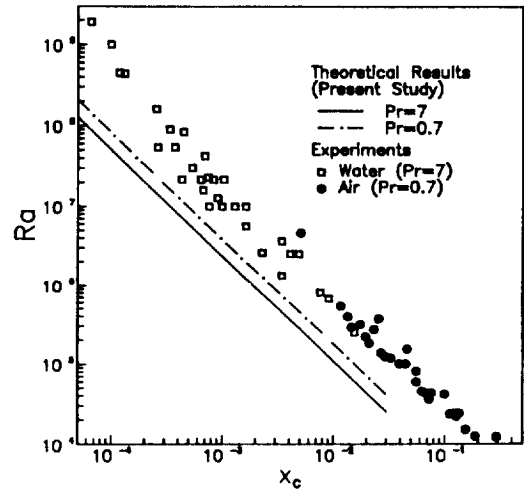


Fig. 3. Comparison of critical Rayleigh numbers with experimental data.

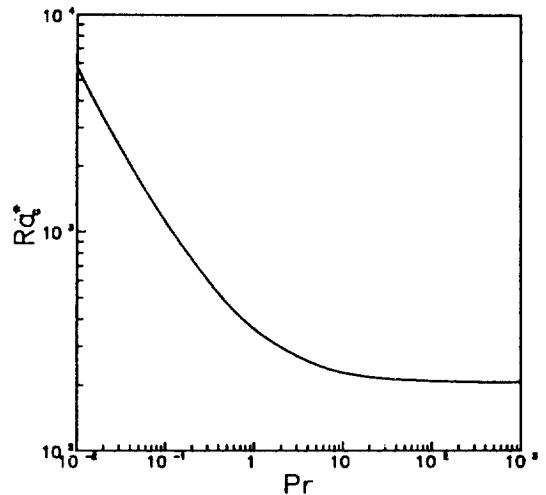


Fig. 4. Effect of Prandtl number on critical condition.

에서의 자연 대류 발생에 대한 연구[8, 16, 18], 정지된  
 유체층의 하부를 급격히 가열될 때 부력에 의한 자연  
 대류 발생에 관한 연구[19] 등에서도 나타나는 현상이  
 다.

임계  $Ra^*$ 의 Prandtl수에 대한 의존성이 Fig. 4에 나  
 타나 있다. 그림에서 보듯이 Prandtl수가 작아질수록

 Table 1. Numerical values of  $Ra_c^*$  and  $a_c^*$  for various  $Pr$  values for  $x \leq 0.01$ 

$Pr$	0.01	0.1	0.7	1	7	10	100	$\infty$
$Ra_c^*$	5769.30	1113.10	410.11	360.41	236.62	227.93	208.86	206.17
$a_c^*$	1.79	1.67	1.50	1.46	1.26	1.23	1.15	1.14

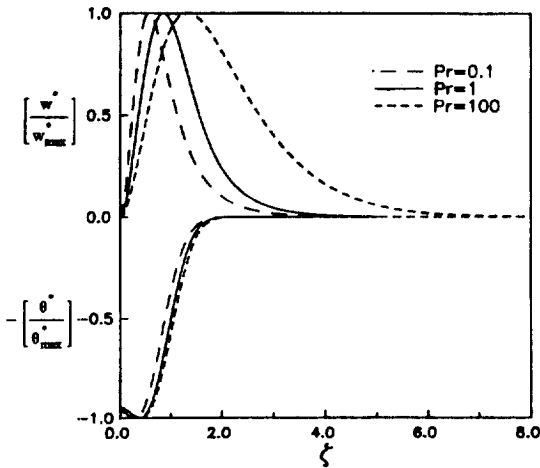
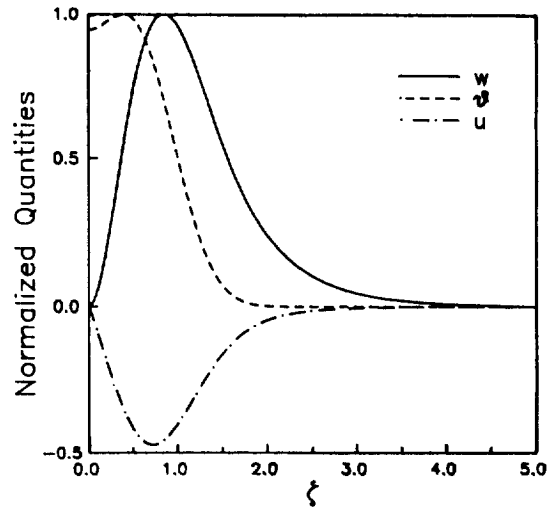


Fig. 5. Amplitude profiles of disturbances.

임계  $Ra^*$ 는 커지는 것을 알 수 있다. 즉 Prandtl수가 작아질수록 계는 점점 안정해 지는 것을 알 수 있다. 자연 대류 발생 임계 조건의 Prandtl수에 대한 의존성에 대해서는 여러 가지의 해석 결과가 있다. 본 연구에서 고려되는 계와 비슷한 계인 밀폐된 일정 온도로 가열되는 Blasius 흐름에서 자연 대류 발생 시점의 Prandtl수에 대한 의존성의 결과를 살펴보면, Chen과 Chen [17]은 Prandtl수가 3 근처에서 계가 가장 불안정하나  $Pr \geq 1$ 의 경우에는 Prandtl수에 거의 무관한 결과를 얻었고, Kim 등[19]은 Prandtl수가 큰 영역에서는 거의 Prandtl수에 무관하나 Prandtl수가 작아질수록 ( $Pr \leq 0.7$ ) 계는 급격히 안정해지는 결과를 얻었다. Lee 등[9]은 Prandtl수가 큰 영역( $Pr \geq 10$ )에서는 임계조건이 Prandtl수에 무관하나 Prandtl수가 1 근처에서 급격히 불안정해지는 결과를 얻었다. 따라서 임계 조건의 Prandtl수에 대한 의존성을 알아보기 위해서는 체계적인 실험이 필요하다. 본 연구에서 고려되는 계에 대하여는 Maughan과 Incropera[10-12]가 공기( $Pr=0.7$ )와 물( $Pr=7$ )에 대하여 실험을 하여 Prandtl수가 작은 경우(공기)가 좀더 안정한 결과를 얻었다. 이는 본 연구의 해석 결과와 일치하는 경향이다. 따라서 본 연구에서 사용한 전파 이론이 다른 해석 방법보다 좀더 실험결과를 잘 설명해 준다고 할 수 있다.

자연 대류 발생점에서의 교란의 분포를 살펴보면 Fig. 5와 6과 같다. 각각의 교란량을 속도는  $w$ 의 최대값, 온도는  $\theta$ 의 최대값으로 나누어 정규화(normalization)하였다. 앞에서 이미 언급한 바와 같이  $Pr \rightarrow \infty$ 의 경우에는 주 흐름 방향으로의 속도 교란이 사라지나, Prandtl수가 작아짐에 따라 주 흐름 방향으로의 속도 교란은

Fig. 6. Amplitude profiles of disturbances for  $Pr=1$ .

점점 커진다. 따라서 Prandtl수가 작아짐에 따라 유동장은 점점 복잡해진다. 그러므로 Prandtl수가 작은 경우에는 주 흐름 방향으로의 속도 교란을 무시해서 해석해서는 안된다는 것을 알 수 있다. 그림에서 보는 바와 같이 속도 교란은 Prandtl수가 작아짐에 따라 그 최대값은 가열면쪽으로 이동하고 가열면의 좁은 영역으로 한정됨을 보인다. 이것은 Prandtl수가 열 전달 능력에 대한 운동량 전달 능력의 비를 나타내므로 Prandtl수가 작아질수록, 즉 운동량 전달 능력이 떨어질수록, 속도 교란량들이 좁은 영역에 한정된다는 것은 Prandtl수의 물리적 의미와 일치하는 결과가 된다. 그러나, 온도 교란은 Prandtl수에 상관없이 열경계층 깊이( $\zeta=1.51$ ) 내에 한정됨을 보인다. 자연 대류는 온도 교란이 속도 교란으로 전이되어 일어나므로 온도 교란이 열 경계층 안에 한정된다는 결과는 열 경계층 깊이를 길이 차원으로 하는 전파 이론의 타당성이 여기서 어느 정도 보여진다.

본 연구에서는 교란의 주 흐름 방향으로의 성장을 고려하므로 자연 대류 발생점에서 주 흐름 방향으로의 교란의 성장율은 국지 안정성 해석에서와는 달리 0이 아니다. 자연 대류 발생점에서의 교란의 성장율은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\frac{1}{w_1} \frac{\partial w_1}{\partial x} \bigg|_{x=x_c} = \frac{2}{3x_c} \left( 1 - \frac{\zeta}{2w^*} D w^* \right) \quad (28)$$

$$\frac{1}{\theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \bigg|_{x=x_c} = - \frac{2}{3x_c} \left( \frac{\zeta}{2\theta^*} D \theta^* \right) \quad (28)$$

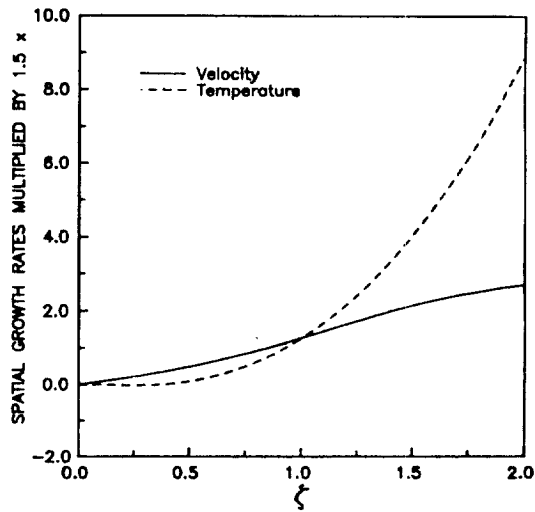


Fig. 7. Comparative growth rates of disturbances for  $Pr=1$ .

$x_c$ 는 앞의 결과 임계 조건에서 구할 수 있다.  $Ra_c^* = Ra_c^{4/3}$ 가 상수이므로 교란의 성장율은  $Ra^{-3/4}$ 에 비례한다. Fig. 7에는  $Pr=1$ 인 경우에 교란의 성장율이 나타나 있다. 그림에서 보듯이 온도 교란의 성장율은 일정 열속 가열 조건( $D\theta=0$ ) 때문에  $\zeta=0$ 에서는 0이나 음이 되는 영역이 밀면 근처에 존재한다. 따라서 이 영역에서 온도 교란은 감폭되고 그 열 에너지가 운동 에너지로 전이되어 와류 형태의 2차 유동을 일으키는 원동력이 되는 속도 교란을 증폭시킨다. 따라서 본 연구에서 사용한 전파 이론은 물리 현상을 합리적으로 설명한다고 할 수 있다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 밀면이 일정 열속으로 가열되는 평판 Poiseuille 흐름의 열 도입부에서 부력에 의하여 발생되는 자연 대류의 발생 시점을 선형 안정성 이론에 입각한 교란의 주 흐름 방향으로 변화를 고려하는 전파 이론을 적용하여 해석하였다. 해석 결과  $Ra/Gz^{4/3}$ 가 본 연구에서 고려되는 계에서는 자연 대류의 발생을 나타내는 중요한 인자라는 것을 알 수 있었다. 또, Prandtl수가 작아짐에 따라 계는 점점 안정해지는 결과가 나왔고 현존하는 실험결과의 경향과 일치함을 알 수 있었다.

자연 대류 발생점에서 교란량의 분포를 살펴보면 온도 교란은 Prandtl수에 상관없이 열 경계층 내에 한정되는 결과가 나왔고 속도 교란은 Prandtl수가 작아질

수록 밀면 근처의 좁은 영역에 한정되는 것을 알 수 있었다. 이것은 자연 대류 발생점에서 온도 교란은 열 경계층에 한정된다는 병목 효과(bottling effect)가 어느 정도 타당함을 나타낸다. 위의 결과를 종합하여 보면 주 흐름 방향으로의 교란의 성장을 고려하고, 열 경계층 깊이를 길이 차원으로 하는 전파 이론은 열 도입부에서 자연 대류의 발생 시점을 해석하는데 좋은 방법이라 할 수 있다.

#### 감 사

본 연구를 지원해 준 주식회사 유공에 감사드립니다.

#### NOMENCLATURE

$a$	: wave number $[-]$
$a^*$	: $ax^{1/3} [-]$
$D$	: differential operator $(=d/d\zeta) [-]$
$d$	: liquid layer thickness $[m]$
$g$	: gravitational acceleration constant $[m/s^2]$
$Gz$	: Graetz number $(=d Pe/X)$
$i, j, k$	: unit vectors in Cartesian coordinates
$k$	: thermal conductivity $[J/m/s/K]$
$Nu$	: Nusselt number $(=q_w/k/(T-T_0)) [-]$
$P$	: pressure $[N/m^2]$
$p$	: dimensionless pressure $(=P_1 d^2/\alpha/\nu) [-]$
$Pe$	: Peclet number $(=\langle U \rangle d/\alpha) [-]$
$Pr$	: Prandtl number $(=\nu/\alpha) [-]$
$q_w$	: wall heat flux $[J/m^2/s]$
$Ra$	: Rayleigh number $(=g\beta q_w d^4/k/\alpha/\nu) [-]$
$Ra^*$	: $Rax^{4/3} [-]$
$T$	: temperature $[K]$
$t$	: time $[s]$
$U, V, W$	: velocity component in Cartesian coordinates $[m/s]$
$u, v, w$	: dimensionless velocity components $(=(d/\alpha)\{U/Pe, V, W\}) [-]$
$X, Y, Z$	: positions in the Cartesian coordinates $[m]$
$x, y, z$	: dimensionless positions $(=(1/d)\{X/Pe, Y, Z\}) [-]$

#### Greek Letters

$\alpha$	: thermal diffusivity $[m^2/s]$
$\beta$	: thermal expansion coefficient $[1/K]$
$\zeta$	: $z/x^{1/3} [-]$
$\theta$	: dimensionless temperature disturbance $(=g\beta T_1 d^3/\alpha/\nu) [-]$

- $\theta_b$  : dimensionless temperature  $(=k(T-T_0)/q_w/d)$  [-]  
 $\theta_b^*$  :  $\theta_b/x^{1/3}$  [-]  
 $\mu$  : viscosity [Kg/m/s]  
 $\nu$  : kinematic viscosity [m<sup>2</sup>/s]

### Superscript

- \* : refers to the amplitude functions for perturbation quantities

### Subscripts

- b : refers to the unperturbed states  
 c : refers to the critical states  
 0 : refers to the inlet states  
 1 : refers to the disturbed states

### Bracket

- < > : refers to the average

### Vector Differential Operator

$$\nabla_1 = \frac{1}{Pe} \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

### REFERENCES

- Chandrasekhar, S.: Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford, London(1960).
- Giling, L. J.: *J. Electrochem. Soc.*, **129**, 634(1982).
- Hwang, G. J. and Cheng, K. C.: *J. Heat Transfer*, **95**, 72(1973).
- Choi, C. K.: Ph.D. Thesis, Clarkson University, Potsdam, New York(1976).
- Davis, E. J. and Choi, C. K.: *J. Fluid Mech.*, **81**, 565(1977).
- Choi, C. K., Shin, C. B. and Hwang, S. T.: Proc. 8th Int. Heat Transfer Conf., San Fransisco, Vol. 3, p. 1389(1986).
- Kim, M. C. and Choi, C. K.: Fluids Eng. Seminar: Korea-U.S. Progress, p. 177, Hemisphere, Washington D.C.(1989).
- Choi, C. K. and Kim, M. C.: Proc. 9th Int. Heat Transfer Conf., Jerusalem, Vol. 2, p. 519(1990).
- Lee, H. R., Chen, T. S. and Armaly, B. F.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **33**, 2019(1990).
- Maughan, J. R. and Incropera, F. P.: *Experiments in Fluids*, **5**, 334(1987).
- Maughan, J. R. and Incropera, F. P.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **30**, 1307(1987).
- Maughan, J. R. and Incropera, F. P.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **33**, 555(1990).
- Osborne, D. G. and Incropera, F. P.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **28**, 207(1985).
- Kamotani, Y. and Ostrach, S.: *J. Heat Transfer*, **98**, 62(1976).
- Hwang, G. J. and Liu, C. I.: *Can. J. Chem. Eng.*, **54**, 521(1976).
- Chen, K.: Ph. D. Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana-Champaign, Illinois (1981).
- Chen, K. and Chen, M. M.: *J. Heat Transfer*, **106**, 284(1984).
- Chen, K., Chen, M. M. and Shon, C. W.: *J. Fluid Mech.*, **132**, 49(1983).
- Kim, M. C., Choi, C. K. and Davis, E. J.: *Int. J. Eng. Fluid Mech.*, **3**, 71(1990).
- Yoon, D. Y. and Choi, C. K.: *Korean J. Chem. Eng.*, **6**, 144(1989).