HWAHAK KONGHAK Vol. 31, No. 3, June, 1993, pp. 272-278
(Journal of the Korean Institute of Chemical Engineers)

다중루프 PI 제어기의 설계

이지태 · 최진영

경북대학교 화학공학과
(1992년 5월 4일 접수, 1993년 1월 27일 채택)

Design of Multiloop PI Controller

Jietae Lee and Jin Young Choi

Department of Chemical Engineering, Kyungpook National University, Taegu 702-701, Korea
(Received 4 May 1992; accepted 27 January 1993)

요 약

IMC-PID 제어기 tuning법과 최근의 안정도 조건들을 결합하여 다중루프 PI 제어기를 설계하는 방법을 제안하였다. 이 방법은 간단함과 계산에서 유명한 BLT법에 필적하였다. 더구나 0에서 2배까지의 제어기 이득변화에 대하여 robust하였다. 몇몇 모사는 제어성능이 BLT법에 의한 것보다 우수한 것을 보여주었다.

Abstract—A procedure designing of a multi-loop PI controller, combining the IMC-PID tuning method and recent stability conditions, has been proposed. It competes with the well-known BLT method in simplicity and computation. Furthermore it is robust for the controller gain variations between zero and two times. Some simulations show that its control performances are better than those of the BLT method.

1. 서 론

다변수 화학공정의 제어를 위한 여러 방법들이 제안되어 있지만 아직 많은 경우 다중루프 PID 제어를 이용한다. 이는 제어기 구조가 간단하고 integrity 특성(loop failure tolerance 특성)을 쉽게 얻을 수 있어, 루프를 수동으로 동작시킬 수 있기 때문으로 보고되고 있다[1]. 시운전이나 공정이 이상동작을 보일 때 보통 제어 루프를 끊고 수동으로 운전하기 때문에 매우 중요하다고 생각한다. 이런 비집중 제어기는 구조에서 오는 제약으로 잘 설계하지 않으면 우수한 제어 성능을 기대할 수 없다. 설계는 상호간섭이 가장 작은 입출력 짝을 찾는 문제(pairing 문제)와 제어기 tuning 문제로 귀착되는데 서로 연관이 있어 시행착오를 필요로 한다.

Pairing은 정상상태 이득행렬을 이용하여, offset이 없으면서 integrity 특성을 갖는 다중루프 제어기의 설계가 불가능하여 더 이상의 분석이 필요없는 짝을 제거해 나가는 방식으로 한다. 고전적인 상대 이득행렬(RGA)에서 최근의 decentralized integral controllability(DIC)법 등을 이용한다[2, 3].

Pairing 과정을 통과한 짝에 대하여 제어기를 설계하고 tuning을 한다. Luyben[4]은 biggist log modulus tuning(BLT)이라는 이름의 매우 간단한 다중루프의 PI 제어기 tuning법을 제안하였다. 이 방법은 먼저 각 루프를 Zeigler-Nichols법으로 공정의 대각 전달함수를 이용하여 PI 제어기를 tuning한다. 그런 후 한 변수 F를 도입, 제어이득은 F로 나누고, 적분시간은 F로 곱하면서 detune한다. Detuning은 시스템이 불안정해지는 데서 얼마나 멀리 떨어져 있는가에 해당하는 log modulus의 최대 값이 주어진 값이 되도록 하였다. 계산이 매우 적다는 장점을 가지고 있으나, 중요한 integrity를 보장못하고 몇몇 공정에서 F가 큰 것이 요구되어 매우 큰

적분시간으로 인한 느린 제어 성능을 보인다.

Grosdidier와 Morari[5]는 그들이 개발한 비집중 제어계의 안정조건인 μ-interaction measure[6]를 이용한 다중루프 PID 제어기 설계법을 제안하고 있다. 그들이 이용한 μ-interaction measure는 다소 conservative하고 아직 몇몇 명확하지 않은 설계변수들을 남겨두고 있다.

여기서는 단변수 공정의 IMC-PID tuning법[7]과 μ-interaction measure를 확장한 비집중 제어계의 안정조건[8]을 이용하여 integrity를 보장하면서 계산이나 성능면에서 BLT법에 필적하는 다중루프 PI 제어기 tuning법을 제안하고자 한다.

2. 이론적 배경

2-1. 비집중 제어계의 안정조건

전달함수 행렬 $G(s)=\{g_{ij}(s)\}_{n\times n}$을 갖는 공정을 위한 대각의 제어기를 설계하는 문제를 고려한다. 다음을 정의하여 사용한다.

$$\tilde{G}(s)=\mathrm{diag}\{g_{ii}(s)\}$$

$$E(s)=[G(s)-\tilde{G}(s)]\tilde{G}(s)^{-1}$$

$$\tilde{H}(s)=\mathrm{diag}\{\tilde{h}_i(s)\}=[I+\tilde{G}(s)\tilde{C}(s)]^{-1}\tilde{G}(s)\tilde{C}(s)$$

$$=\mathrm{diag}\left\{\frac{\tilde{c}_i(s)g_{ii}(s)}{1+\tilde{c}_i(s)g_{ii}(s)}\right\}$$

$$\hat{H}(s)=\mathrm{diag}\{\hat{h}_i(s)\}=[I+\tilde{G}(s)\hat{C}(s)]^{-1}\tilde{G}(s)\hat{C}(s)$$

$$=\mathrm{diag}\left\{\frac{\hat{c}_i(s)g_{ii}(s)}{1+\hat{c}_i(s)g_{ii}(s)}\right\}$$

2-1-1. 정리 1(Grosdidier와 Morari[6])

G(S)와 $\tilde{G}(s)$는 같은 수의 불안정 pole을 갖고 $\tilde{H}(s)$는 안정한 대각 전달함수 행렬이라고 가정한다.

$$|\tilde{h}_i(s)|<\mu^{-1}[E(s)],\ s=j\omega,\ \omega\in R \qquad (1)$$

이면 $\tilde{H}(s)$로부터 구한 대각 제어기 $\tilde{C}(s)$를 연결한 폐루프는 안정하다.

2-1-2. 정리 2(Lee 등 [8])

G(s)와 $\tilde{G}(s)$는 같은 수의 불안정 pole을 갖고, $\tilde{H}(s)$와 $\hat{H}(s)$는 안정한 대각 전달함수 행렬이라고 가정한다.

$$|\tilde{h}_i(s)|<2\,\mu^{-1}[E(s)] \qquad (2)$$

$$\left|\frac{\hat{h}_i(s)}{\tilde{h}_i(s)}+\frac{1}{2}\right|<\mu^{-1}\left(\left[I+\frac{1}{2}E(s)\tilde{H}(s)\right]^{-1}\right.$$

$$\left.E(s)\tilde{H}(s)\right),\ s=j\omega,\ \omega\in R \qquad (3)$$

이면 $\hat{H}(s)$로부터 구한 대각 제어기 $\hat{C}(s)$를 연결한 폐루프는 안정하다.

앞의 두 정리는 안정한 제어기를 주는 $\tilde{H}(s)$ 혹은 $\hat{H}(s)$의 충분 조건을 나타내고 있는데 이들로부터 구해지는 대각 제어기는 시스템을 안정화 시키나, 얻어진 대각 제어기는 우리가 원하는 구조, 예를 들면 PID 제어기, 를 가지지 못하는 경우가 많다.

P 제어기는 조건 (1)에서 (3)까지를 Nyquist 행렬법 형태로 바꾸어 얻을 수 있다. 즉 조건(1)은 $-1/c_i$이 다음의 원들 바깥에 있는가로 된다.

$$g_{ii}(s)\{1+\mu[E(s)]\exp(j\theta)\},\ s=j\omega,$$
$$\omega\in R,\ \theta\in[0\ 2\pi] \qquad (4)$$

조건 (2)와 (3)도 역시 $-1/c_i$가 다음의 폐곡선 바깥에 있는가로 된다.

$$g_{ii}(s)\left(1+\frac{1}{2}\mu[E(s)]\exp(j\theta)\right),\ s=j\omega,\ \omega\in R,$$
$$\theta\in[0\ 2\pi] \qquad (5)$$

$$g_{ii}(s)\left(1-\frac{2}{\tilde{h}_i(s)[1+\beta\exp(j\theta)]}\right)$$

$$\beta=\mu^{-1}\left(\left[I+\frac{1}{2}E(s)h(s)\right]^{-1}\frac{1}{2}E(s)H(s)\right) \qquad (6)$$

(6)의 조건은 $\beta<1$인 경우에만 성립한다. 앞의 식들은 복소수의 conformal mapping 이론에 따라 얻은 것이다. 간단히 식 (6)이 얻어지는 과정을 기술하면, 조건 (3)은 $\hat{h}_i(s)$가 중심이 $\tilde{h}_i(s)$ (1/2, 0)에 있고, 반경이 $1/2|\tilde{h}_i(s)|\beta$인 원 내부에 있으면 만족된다. 다시

$$\frac{1}{\hat{h}_i}(s)=1+\frac{1}{\hat{c}_i g_{ii}(s)}$$

이므로 $-[1/\hat{c}_i g_{ii}(s)]$이 위의 원의 역에 해당하는 곡선을 1만큼 평행 이동한 것의 바깥에 있으면 된다. 따라서 식 (6)이 얻어지게 된다.

이 P 제어기 설계법과 다음의 단변수 IMC-PID 제어기 설계 개념을 통합하여 다중루프 PI 제어기를 설계한다.

2-2. 단변수 IMC-PI 제어기 tuning법

보통 화학공정은 일차 시간 지연모델로 잘 묘사되고 여기에 IMC-PI 규칙을 적용하면

$$G(s)=\frac{ke^{-ds}}{\tau s+1}$$

$$PI(s)=K_c\left(1+\frac{1}{\tau_I s}\right)$$

$$K_c=\frac{\tau+d/2}{\lambda k}$$

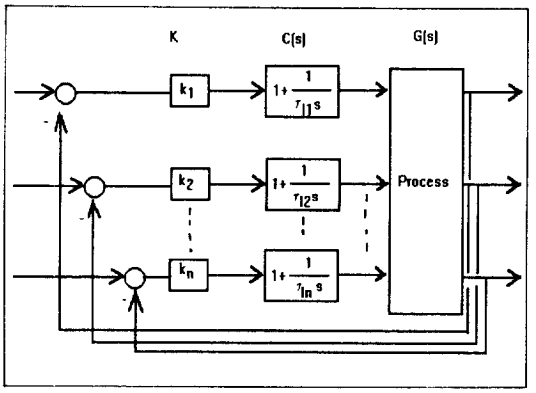

Fig. 1. A multi-loop PI control system.

$\tau_I = \tau + d/2$

의 제어기를 얻을 수 있다[7]. 이 제어기는 근사적으로 폐루프가 λ의 시간 상수를 갖는 일차시스템 특성을 갖도록 만든다. 따라서 λ를 tuning 변수로 사용하는데, 작게 하면 제어가 빨라지는 대신에 robustness가 나빠진다. $\lambda > 1.7\theta$와 $\lambda > 0.1\tau$를 만족하도록 설계한다.

이 제어규칙을 다중루프 PI 제어기에 이용하고자 한다. 폐루프가 overshoot 등이 없는 일차 시스템에 따르는 것을 목표로 하고 있기 때문에 루프연결에 의한 상호간섭이 적을 것으로 예상되며, λ에 의한 detuning도 제어 대역폭을 줄이는 효과가 있으므로 타당성이 있을 것으로 본다. 더구나 λ에 의한 detuning은 단지 제어기 이득을 줄이는 것으로 앞의 Nyquist 행렬법을 효과적으로 이용할 수 있는 잇점도 있다.

3. 다중루프 PI 제어기의 설계

대각 행렬의 비집중 제어기를 Fig. 1과 같이 dynamics 부분 C(s)와 이득부분 K로 나누어 설계한다.

3-1. C(s)의 설계

대각의 공정모델 $g_{ii}(s)$에 IMC-PI 제어규칙을 적용하여 구한다. 먼저 $g_{ii}(s)$를 특성면적법 등[9]을 적용하여 일차 시간지연 모델로 근사하고 IMC-PI 규칙을 적용한다. 이 때 같이 계산되어지는 이득 행렬을 K_A라 둔다.

3-2. K의 설계

G(s)C(s)에 Nyquist 행렬법을 적용한다. μ-interaction measure에 의한 안정도 조건인 (4)식에 의한 Nyquist 그림을 그려 최대 이득행렬을 구하고 이를 K_B라 한다. 이를 이용, 다음과 같이 H(s)를 구한다.

$$\tilde{H}(s) = [I + \tilde{G}(s)C(s)K_B]^{-1}\tilde{G}(s)C(s)K_B$$

만약 K_B가 존재하지 않으면 (5)식에 의한 최대 이득행렬을 구하여 K_c라 두고 이 값에 0.1배한 것으로 $\tilde{H}(s)$를 구한다. 안정조건 (6)식에 의한 Nyquist 그림을 그려 최대의 이득행렬을 구하고 이를 K_D라 한다. K_D의 1/2과 K_A 사이에서 절대값이 작은 요소들로 취한 것을 최종 K로 하여 설계를 마친다.

K_c의 0.1배로 $\tilde{H}(s)$를 구하는 것은 식 (6)의 $\beta < 1$ 조건을 얻기 위한 것으로 0.1배로 하더라도 이 조건이 얻어지지 않으면 이 pairing에 대하여는 설계를 포기한다. 단변수의 이득 K_A와 K_D의 1/2과 비교하는 것은 최종이득이 상호간섭이 없는 경우의 이득보다는 크지 않도록 하려는 것이다.

이렇게 구한 제어기는 0에서 2배까지 개별적인 증감에 대하여 안정도를 유지하는 robustness를 가진다.

3-3. 다중 루프 PI 제어기 설계과정의 요약

루프 pairing에서부터 본 제어기의 전 설계단계를 정리하면 다음과 같다.

3-3-1. Screening과정

(1) 음의 대각 RGA 값을 주는 pair는 버린다.

(2) DIC를 만족하지 않는 pair는 버린다[2].

(3) 모든 가능한 입출력 조합에 대하여 (1)과 (2)를 반복한다[3].

3-3-2. Design과정

(1) $\mu(E(0)) \geq 2$이거나 $\mu((I + (1/2)E(0))^{-1}E(0)) \geq 2$인 짝은 버린다.

(2) 대각 공정에 대하여 IMC-PI tuning을 하여 C(s)와 K_A를 구한다.

(3) 식 (4)에 따른 Nyquist그림을 그려 K_B를 구하고 $\tilde{H}(s)$를 계산한다. K_B가 존재하지 않으면 식 (5)에 따라 K_c를 구하고, 0.1 K_c를 이용하여 $\tilde{H}(s)$를 구한다.

(4) 식 (6)에 따른 Nyquist 그림을 그리고 K_D를 구한다. K_A와 0.5 K_D를 비교하여 절대값이 작은 요소들로 K를 구성한다.

(5) 모사를 통해 제어 성능을 조사한다.

3-4. μ(·)의 계산

Structured singular value μ(·)의 계산은 활발히 연구되고 있는 분야로서 여기서는 간단히 계산할 수 있는 다음의 상한값을 이용한다[6].

(1) 2×2 행렬일 경우

$$\mu(A) = \frac{(\sqrt{u+v} + \sqrt{u-v})}{2}$$

Table 1. Multi-loop PI controller design for three 2×2 systems

Process	WB	VL	WW
g_{11}	$\frac{12.8e^{-s}}{16.7s+1}$	$\frac{-2.2e^{-s}}{7s+1}$	$\frac{0.126e^{-6s}}{60s+1}$
g_{12}	$\frac{-18.9e^{-3s}}{21s+1}$	$\frac{1.3e^{-0.3s}}{7s+1}$	$\frac{-0.101e^{-12s}}{(48s+1)(45s+1)}$
g_{21}	$\frac{6.6e^{-7s}}{10.9s+1}$	$\frac{-2.8e^{-1.8s}}{9.5s+1}$	$\frac{0.094e^{-8s}}{38s+1}$
g_{22}	$\frac{-19.4e^{-3s}}{14.4s+1}$	$\frac{4.3e^{-0.35s}}{9.2s+1}$	$\frac{-0.12e^{-8s}}{35s+1}$
$\mu(E(0))$	0.7088	0.6203	0.812
$\mu\left(I+\frac{1}{2}E(0)\right)^{-1}E(0)$	1.0978	0.8992	1.3669
τ_I	(17.2 15.9)	(7.5 9.38)	(63 39)
K_A	(0.790 −0.161)	(−2.01 2.37)	(52.5 −23.9)
K_B	(0.958 −0.191)	(−2.65 4.87)	(89.0 −40.6)
K_C	−	−	−
K_D	(1.473 −0.206)	(−3.08 6.86)	(10.3 −42.6)
K	(0.737 −0.103)	(−1.54 2.37)	(51.5 −21.3)

$$u = |a_{11}|^2 + |a_{22}|^2 + 2|a_{12}||a_{21}|$$
$$v = 2|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|$$

(2) 일반 행렬일 경우

$$\mu(A) \le \rho(|A|)$$

의 관계에 따라 상한값 $\rho(|A|)$를 사용한다. 여기서 $|A|$는 각 요소에 절대값을 취한 행렬이고 $\rho(\cdot)$는 spectral radius를 의미한다.

행렬의 induced norm을 $\mu(\cdot)$의 상한값으로 이용할 수도 있으나, conservative하여 좋지 않다.

계산 정확도는 최근 좋은 eigenvalue 계산법이 개발되어 있어 공정의 차수가 그렇게 크지 않을 때는 문제가 되지 않을 것으로 보인다. 계산량은 BLT법의 determinant 계산이 $O(n^2)$인 것에 비하면, $O(n^3)$의 계산이 필요하여 공정의 입출력수 증가에 따라 크게 늘어난다. 대체로 $n=100$ 정도까지는 큰 어려움이 없이 본 방법을 적용할 수 있을 것으로 기대하는데, 이렇게 큰 차수의 공정 모델이 없어 계산 정확도와 시간을 실측하기는 어렵다.

4. 예 제

본 방법이 BLT법이 integrity를 보장하지 못하는 것을 보완하지만 제어 성능이 우수할 것인지는 의문이다. 따라서 여러 실질적인 공정에 적용하여 그 우수성을 밝힐 필요가 있다. 여기서는 Luyben[4]의 논문에 있는 여러 공정에 대하여 BLT법과 비교를 하였다. Table 1에

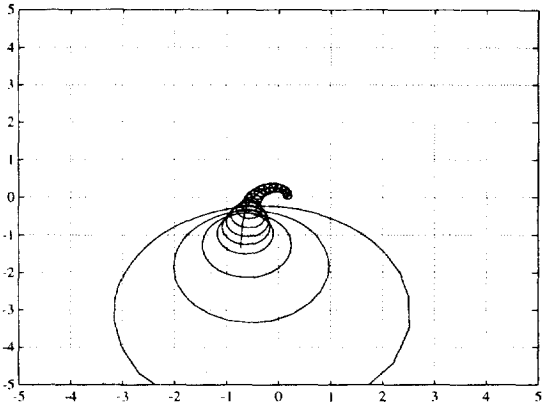

Fig. 2. Nyquist plots for the WB process[$g_{11}(s)$ element with the stability band of Eq. (6)].

2×2 공정에 대한 계산 결과를 보였다. Fig. 2와 3에 WB 공정에 대한 Nyquist 행렬의 한 예를 보였고, 얻어진 제어기의 제어결과를 Fig. 4에 보였다. WB 공정에 대한 제어성능은 둘 모두 비슷하게 좋은 결과를 주지만 BLT의 큰 적분시간으로 인한 느린 set point 추종이 지적된다. 다른 공정에 대한 모사도 모두 비슷한 제어성능이 얻어지는 것을 볼 수 있었다.

Luyben[4]에 있는 TS 공정은 모사를 하지 않았는데, 이는 $g_{11}(s)$가 원점 근처의 zero때문에 큰 overshoot를 보여 일차 시간지연 근사가 어려웠기 때문이다. 이런

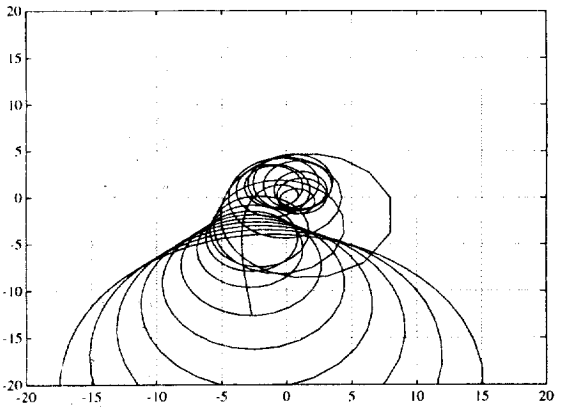

Fig. 3. Nyquist plots for the WB process[$g_{22}(s)$ element with the stability band of Eq. (6)].

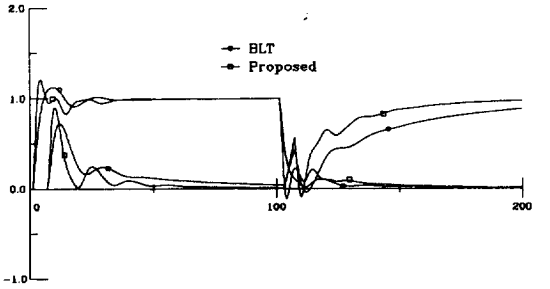

Fig. 4. Control response for the WB process.

공정에 대한 단변수 IMC-PID tuning의 확장이 요구된다.

Table 2에 3×3 공정에 대한 계산 결과를 보였다. T4

Table 2. Multi-loop PI controller design for two 3×3 system

Process	OR	T4
g_{11}	$\frac{0.66e^{-2.6s}}{6.7s+1}$	$\frac{-1.986e^{-0.71s}}{66.67s+1}$
g_{12}	$\frac{-0.61e^{-3.5s}}{8.64s+1}$	$\frac{5.984e^{-2.24s}}{14.29s+1}$
g_{13}	$\frac{-0.0049e^{s}}{9.06s+1}$	$\frac{5.24e^{-60s}}{400s+1}$
g_{21}	$\frac{1.11e^{-6.5s}}{3.25s+1}$	$\frac{0.0204e^{-0.59s}}{(7.14s+1)^2}$
g_{22}	$\frac{-2.36e^{-3s}}{5s+1}$	$\frac{2.38e^{-0.42s}}{(1.43s+1)^2}$
g_{23}	$\frac{0.01e^{-1.2s}}{7.09s+1}$	$\frac{-0.33e^{-0.68s}}{(2.38s+1)^2}$
g_{31}	$\frac{-34.68e^{-9.2s}}{8.15s+1}$	$\frac{0.374e^{-7.75s}}{22.22s+1}$
g_{32}	$\frac{46.2e^{-9.4s}}{10.9s+1}$	$\frac{-9.811e^{-1.59s}}{11.36s+1}$
g_{33}	$\frac{0.87(11.61s+1)e^{-s}}{(3.89s+1)(18.8s+1)}$	$\frac{-11.3e^{-3.79s}}{(21.74s+1)}$
$\mu(E(0))$	1.1225	0.5433
$\mu\left(I+\frac{1}{2}E(0)\right)^{-1}E(0)$	1.3168	0.5434
τ_I	(8.0 6.5 9.98)	(67.0 2.70 39.6)
K_A	(2.75 −0.540 6.43)	(−5.06 −0.557 −0.135)
K_B	−	(−10.08 −0.353 −0.215)
K_C	(3.67 −0.734 6.86)	−
K_D	(1.888 −0.246 7.04)	(−57.5 −1.506 −0.273)
K	(0.944 −0.123 3.52)	(−5.06 −0.557 −0.135)

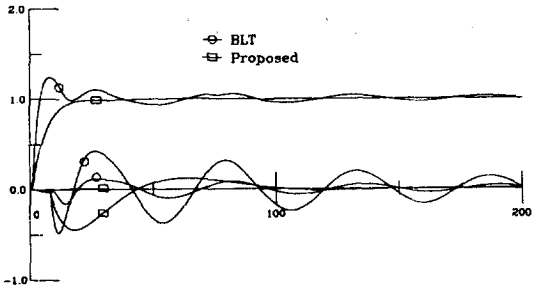

Fig. 5. Control response for the T4 process.

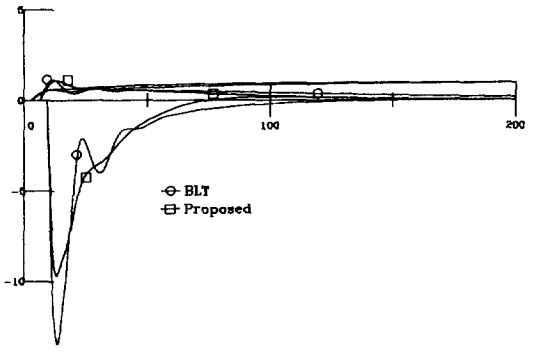

Fig. 6. Control response for the OR process.

공정에 대하여는 Luyben이 이용한 pair가 상호간섭이 심해 입력 2와 입력 3을 서로 바꾼 pair에 대하여 본 제어기 설계를 하였다. Fig. 5에 제어성능을 보였다. 서로 다른 pairing이어서 직접 비교는 되지 않으나 BLT가 매우 진동성이 심한 제어기를 주고 있는 것을 볼 수 있다. 본 방법은 매우 우수한 제어성능을 보이고 있다. OR 공정에 대한 성능을 Fig. 6에 보였다. 본 방법이 진동을 보이지 않으면서 더 빠른 제어를 하는 것을 볼 수 있다.

5. 결 론

다중루프 PI 제어기를 설계하는 방법을 제안하였다. 본 방법은 eigenvalue를 계산하여야 하기 때문에 BLT법보다 계산량은 다소 많아지지만, BLT법이 integrity를 보장 못하는 단점을 개선한다. 모사 결과 제어 성능면에서도 본 방법이 우수함을 알 수 있었다.

본 방법의 제어기는 각 루프 이득이 0에서 2배까지 변하는데 대한 안정도를 유지하는 robustness를 갖는다. 반면에 위상에 대한 여유는 보장하지 않는다. 따라서 단일 변수 제어기에서 많은 이득 여유를 갖는 제어기가 제어성능이 매우 나쁠 수가 있듯이 본 제어기의 제어성능도 나쁠 수가 있어 이 점에 관한 더 깊은 연구와 개선을 필요로 할 것으로 보인다.

감 사

이 논문은 1991년도 교육부 학술 연구조성비에 의해 연구되었으며 본 연구를 지원하여 준 교육부에 감사드립니다.

사용기호

d	: dead time
E(s)	: relative error matrix between G(s) and $\tilde{G}(s)$
G(s)	: n×n transfer function matrix
$\tilde{G}(s)$	: diag{$g_{ii}(s)$}
$\tilde{H}(s), \hat{H}(s)$	: diagonal closed-loop transfer function matrix
$\tilde{h}(s), \hat{h}(s)$	: elements of $\tilde{H}(s)$ and $\hat{H}(s)$, respectively
K_c, K_I	: gain and integral time of a PI controller
j	: $\sqrt{-1}$
k	: process gain
s	: Laplace variable
λ	: parameter of the IMC-PID tuning
$\mu(\cdot)$	: structured singular value
$\rho(\cdot)$	: spectral radius
τ	: time constant

참고문헌

1. Morari, M.: "Process Control Theory : Reflections on the Past and Goals for the Next Decade", Second Shell Process Control Workshop, Butterworth Pub., MA(1990).
2. Morari, M. and Zafiriou, E.: "Robust Process Control", Prentice-Hall, New Jersey(1989).
3. Chiu, M. S. and Arkun, Y.: *I&EC Research,* **29**, 369 (1990).
4. Luyben, W. L.: *I&EC Process Design Develop.,* **25**, 654(1986).
5. Grosdidier, P. and Morari, M.: *Computers Chem. Eng.,* **11**, 423(1987).
6. Grosdidier, P. and Morari, M.: *Automatica,* **22**, 309 (1986).
7. Rivera, D. E., Morari, M. and Skogestad, S.: *I&EC Process Design Develop.,* **25**, 252(1986).

8. Lee, J., Manousiouthakis, V. and Edgar, T. F.: "SISO Design of Decentralized Stability Controllers", Submitted(1991).

9. Åström, K. J. and Hägglund, T.: "Automatic Tuning of PID Controllers", Instrument Society of America, NC(1988).