

## 아래로부터 균일하게 가열되는 수평 유체층에서 자연대류 및 열전달에 대한 Prandtl수의 영향

이종대\* · 최창균

\*충북대학교 공과대학 화학공학과  
서울대학교 공과대학 화학공학과  
(1992년 10월 16일 접수, 1993년 2월 27일 채택)

## Effects of Prandtl Numbers on Natural Convection and Heat Transfer in a Horizontal Fluid Layer Heated Uniformly from Below

Jong Dae Lee\* and Chang Kyun Choi

\*Dept. of Chem. Eng., College of Eng., Chungbuk National University, Cheong Ju 360-763, Korea  
Dept. of Chem. Eng., College of Eng., Seoul National University, Seoul 151-742, Korea  
(Received 16 October 1992; accepted 27 February 1993)

### 요 약

하부면으로부터 일정 열속으로 가열되는 초기에 정지된 유체층에서 자연대류 발생시점이 전파이론을 적용함으로서 해석되었다. 유한한 Prandtl수( $0.01 \leq Pr \leq 100$ )에 대한 안정성 판별기준을 Rayleigh수와 Prandtl수의 함수로서 결정론적으로 구하였다. 열적 불안정성에 관한 이론적인 임계조건들을 난류 열대류와 연관시킴으로써, 새로운 열전달 상관 관계식이 제시되었다. 이와 같은 상관식은 기존의 실험결과들과 매우 잘 일치함을 알 수 있다.

**Abstract**—The onset of natural convection in an initially quiescent fluid layer heated uniformly from below has been analysed by employing the propagation theory. The stability criteria for finite Prandtl numbers ( $0.01 \leq Pr \leq 100$ ) have been obtained deterministically as a function of both the Rayleigh number and the Prandtl number. A new heat transfer correlation connecting the theoretical critical condition has been suggested. It is found that this correlation agrees reasonably well with the extant experimental data.

### 1. 서 론

수평면 상에 위치한 유체층을 밑면으로부터 서서히 가열하면 전도에 의한 기본온도 분포는 선형이 된다. 이 때 유체층은 역온도 기울기에 의하여 불안정한 밀도구배를 갖는다. 밀도차이에 의한 부력이, 점도나 열확산 계수와 같은 안정화 요인을 극복할 수 있을 만큼 클 때 자연대류가 발생한다는 것이 잘 알려져 있다. 자연대류에 관한 연구는 열 교환 및 저장, 태양열 집열기, 결정의 성장, 전

자장치의 냉각, 전기도금 뿐만 아니라 대기의 유동, 난류의 근원 등을 밝히는데 중요한 역할을 한다.

많은 실제적인 문제에 있어서 유체층은 급격히 가열된다. 따라서 전도에 의한 기본온도분포는 시간의존적인 비선형이 되고 자연대류는 온도가 선형이 되기 전에 발생될 것이다. 이러한 시간의존적인 자연대류에 관한 연구는 Morton[1]에 의하여 처음 시도된 이후에 Foster[2]는 증폭이론을, Jhaveri와 Homay[3]는 추계모델을, Choi 등[4]은 온도교란량들을 열 경계층에 국한시킨 수정동

결시간 모델을 근거로 자연대류가 유발되는 임계조건을 해석하였다. 이러한 모델들은 각각 기본온도분포가 선형에 가까운 경우에만 적용이 가능하거나, 가열순간의 초기조건과 감지시간의 정의를 필요로 하는 임의성이 수반되거나, Prandtl수의 영향이 고려될 때 이론적인 접근이 어렵다는 단점이 있다.

1986년 Choi 등[5]은 교란량들은 자연대류 발생시점에서 고정적인 형태가 아니라 발생 즉시 변화할 것이라는 전파이론을 제시하였다. 전파이론은 길이척도로서 열침투깊이를 선택함으로써 안정성 교환 원리하에 새로운 안정성 방정식을 유도할 수 있으며, 기존의 이론들이 내포하는 초기조건이나 증폭률의 가정없이 직접적으로 안정성 판별기준을 얻을 수 있다. 급격히 가열되는 계에서 자연대류 발생시점을 나타내는 안정성 판별기준을 예측하는데 전파이론이 매우 합리적임을 보여주는 많은 연구가 진행되어 왔다[6-9].

밀면으로부터 일정 열속으로 가열되는 수평 유체층에서 Lee 등[10]은 전파이론을 적용하여 Prandtl수가 매우 큰 경우 기본온도 분포를 적분법으로 묘사하고 임계조건을 해석하였다. 이를 확장하여 Lee 등[11]은 Prandtl수가 매우 작은 경우 자연대류 발생시점을 구하고 이로부터 Prandtl수가 작아질수록 계가 더 안정화될 것이라는 결과를 보여주었다.

본 연구의 목적은 초기에 정지하고 있는 수평유체층의 밀면을 일정 열속으로 가열할 때 전파이론을 도입하여 Prandtl수가 자연대류 발생시점에 미치는 영향을 수치해석적으로 조사하고, 이를 근거로 Prandtl수와 Rayleigh수의 함수로써 난류 열전달 특성을 나타내고 상관식을 도출하는데 있다.

## 2. 안정성 해석

최초 온도  $T_1$ 로 유지하고 있는 뉴턴 유체가 두 개의 무한한 수평판 사이에 위치하고 있을 때, 하부면이  $t=0$ 인 순간부터 균일한 열속  $q_w$ 로 가열된다. Fig. 1에서 보는 바와 같이 두 고정 경계면 사이의 거리는  $d$ 이며, 전도에 의한 기본온도는 가열 초기의 비선형인 분포에서 점차 시간이 흐를수록 선형분포를 갖게 될 것이다.

기본온도 분포가 선형인 경우 아래와 같이 정의된 Rayleigh수가 1296일 경우, 자연대류가 발생한다는 것이 알려져 있으며, Rayleigh수가 1296보다 클 때에는 자연대류는 전도에 의한 기본온도 분포가 선형이 되기 전에 발생할 것이다. 이와 같이 계의 성질을 규명하는 중요한 매개 변수인 Rayleigh수와 Prandtl수는 다음과 같이 정의된다.

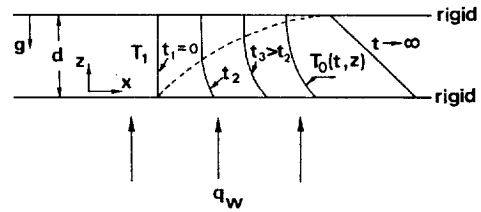


Fig. 1. Schematic diagram of constant flux system.

$$Ra = \frac{g\beta q_w d^4}{\alpha k \nu} \quad (1)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (2)$$

여기서  $q_w$ 는 일정 열속,  $k$ 는 열전도도,  $\beta$ 는 열 팽창계수,  $\alpha$ 는 열 확산계수,  $\nu$ 는 동점도를 나타낸다. 이와 같이 정의된 Rayleigh수는 경우에 따라 무차원 열속이라고 호칭되기도 한다.

### 2-1. 전파이론에 의한 안정성 해석

자연대류 발생시점에서 온도, 속도, 압력 등의 교란량들은 매우 미소하다. 따라서 선형 안정성 이론하에서 Boussinesq가정을 도입하고 연속, 운동, 에너지 방정식으로부터 교란 방정식을 얻는다. 이러한 교란 방정식들을  $d$ ,  $d^2/\alpha$ ,  $q_w d/k$ ,  $\alpha \nu / g \beta d^3$ ,  $\alpha/d$ 를 각각 길이, 시간, 기본온도, 교란온도, 교란속도 등을 단위로 하여 무차원화한다. 교란식들을 무차원화 한 다음, 자연대류 발생시점에서 교란량들이  $x$ - $y$ 평면상의 2차원적 주기형태로 규칙적인 cell의 형상을 보인다는 가정하에 다음과 같은 무차원 전도식과 교란식들을 얻게 된다[10, 11].

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} \quad (3)$$

$$\left[ \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau} - \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right) \right] \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right) w_1^* = -a^2 \theta_1^* \quad (4)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} - \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right) \right] \theta_1^* = -Ra^2 w_1^* \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \quad (5)$$

여기서  $\theta_0$ 는 기본온도 분포,  $a$ 는 무차원 파수,  $w_1^*$ ,  $\theta_1^*$ 는 각각 교란량들의 수직속도성분과 온도의 크기를 나타내며,  $Ra$ 와  $Pr$ 은 (1), (2)식으로부터 정의된 Rayleigh수와 Prandtl수를 의미한다.

무차원 교란식에서 고정 경계면에 대한 경계조건들은 다음과 같다.

$$w_1^* = \frac{\partial w_1^*}{\partial z} = \frac{\partial \theta_1^*}{\partial z} = 0 \text{ at } z=0 \quad (6)$$

$$w_1^* = \frac{\partial w_1^*}{\partial z} = \theta_1^* = 0 \text{ at } z = 1 \quad (7)$$

위의 경계조건들은 하부 경계면에서 no-slip조건과 일정 열속 가열조건이 적용되고, 상부 경계면에서는 no-slip조건과 더불어 일정온도가 유지된다는 것을 의미한다.

안정성 해석에 있어서 재래의 고정시간 모델은 시간을 매개 변수로 고려함으로써 교란량들의 시간 의존성을 무시하게 된다. 이것은 교란식 (4)에서 나타나듯이 안정성 판별 기준에 대한 Prandtl수 효과를 볼 수 없다는 단점이 있다. 또한 증폭이론하에서 자연대류 발생시점을 나타내는 판별기준의 판정은 초기조건의 설정과 증폭률을 결정하는 실험결과에 의존한다.

본 연구에서 적용된 전파이론은 교란량들의 시간 의존적인 성질을 적당한 길이단위로써 열 침투깊이를 선택하고, 이를 기준으로 하는 유사변수를 도입함으로써, Prandtl수가 안정성 판별기준에 미치는 효과를 조사할 수 있으며, 자연대류 발생시점을 안정성 방정식으로부터 직접 얻을 수 있다는 장점을 갖고 있다. 안정성 해석시 열 침투깊이를 기준으로 하는 유사변수  $\zeta$ 를 도입하고 속도교란 및 온도교란은 다음과 같이 유사변수  $\zeta$ 만의 함수로 전환시킨다.

$$\zeta = \frac{z}{\delta} \quad (8)$$

$$[w_1^*(\tau, z), \theta_1^*(\tau, z)] = [\delta^2 w^*(\zeta), \theta^*(\zeta)] \quad (9)$$

이 때, 열 침투깊이  $\delta$ 는 Lee 등[10]이 구한  $(10\tau)^{1/2}$ 를 사용하였다.

이와 같은 개념에 따라 유사변수  $\zeta$ 와 전환된 진폭함수들을 사용하여 (4)식과 (5)식은 아래와 같은 상 미분 방정식형태로 변형된다.

$$(D^2 - a^*) \{ (D^2 - a^*)^2 + \frac{5}{Pr} (\zeta D - 2) \} w^* = a^* \theta^* \quad (10)$$

$$(D^2 + 5\zeta D - a^*) \theta^* = -Ra^* (D\theta_0/\delta) w^* \quad (11)$$

위의 식들에서  $Ra^* = Ra \delta^4$ ,  $a^* = a\delta$ ,  $D = d/d\zeta$ 이다. 열 침투깊이에 의해 조정된 Rayleigh수와 파수는 자연대류 발생시점에서 시간 의존성이 극히 미약하므로 [2, 3, 6-12] 전환된 상 미분 방정식 (10)과 (11)식들은 합당하다고 말할 수 있다. 경계조건 (6)식과 (7)식은 유사변수  $\zeta$ 에 의하여 다음과 같이 변형된다.

$$w^* = Dw^* = D\theta^* = 0 \text{ at } \zeta = 0 \quad (12)$$

$$w^* = Dw^* = \theta^* = 0 \text{ for } \zeta \rightarrow \infty \quad (13)$$

따라서 주어진 Prandtl수에 대하여 위의 경계조건을 만

족하는 고유치  $Ra^*$ 와  $a^*$ 를 구하게 된다. 이 때 얻어진  $Ra^*$ 와  $a^*$  중 최소의  $Ra^*$ 와 그에 대응하는  $a^*$ 가 자연대류의 발생시점을 나타내는 임계조건이 된다.

## 2-2. 안정성에 대한 수치해석 절차

전파이론을 적용하여 얻는 새로운 안정성 방정식 (10)과 (11)식을 가지고 Lee 등[10, 11]은 Prandtl수가 매우 크거나 작은 두 극한 경우에 대하여 적분법과 WKB 근사법을 사용하여 안정성 해석을 하였다. 이러한 해석적 방법은 수학적 해법의 어려움 때문에 유한한 Prandtl수에 대한 안정성 해석이 어렵다. 따라서 본 연구에서는 적분법과 WKB법을 사용하지 않고 안정성 방정식 (10)과 (11)에 직접 수치 해석적인 방법을 적용하여 Prandtl수의 영향을 살펴 보았다. 일정 열속 가열시 열 침투층 깊이를 기준으로 하는 무차원 변수  $\zeta$ 를 사용하여 전도식 (3)을 변형하면 아래와 같다.

$$D^2\theta_0 + 5\zeta D\theta_0 - 5\theta_0 = 0 \quad (14)$$

여기서  $\theta_0 = \theta_0/\delta$ 으로써  $\zeta$ 만의 함수이다. 이 때 경계조건은 다음과 같다.

$$D\theta_0 + 1 = 0 \text{ at } \zeta = 0 \quad (15)$$

$$\theta_0 = 0 \text{ for } \zeta \rightarrow \infty \quad (16)$$

전파이론을 적용하여 얻은 안정성 방정식에 기본온도 분포 대신에  $D\theta_0$ 를  $D^2w^*$ 와  $D^2\theta_0$ 로 정리하면 다음과 같다.

$$D^4w^* = 2a^* D^2w^* - a^* w^* - \frac{5}{Pr} [\zeta D^3w^* - a^* \zeta Dw^* - 2a^* w^*] + a^* \theta^* \quad (17)$$

$$D^2\theta^* = a^* \theta^* - 5\zeta D\theta^* - Ra^* w^* (D\theta_0^*) \quad (18)$$

이 때 경계조건은 앞에서 언급한 (12)식과 (13)식이 사용된다. 앞에서 유도된 안정성 방정식의 계수들이 기본온도의 함수이므로, 기본온도식 (14)을 경계조건 (15), (16)을 적용하여 4차의 Runge-Kutta방법으로 풀었다. 그런 후에 안정성 방정식 (17)과 (18)식은 outward shooting방법을 적용하여 주어진 Prandtl수에 대하여 고유치  $Ra^*$ 와  $a^*$ 를 구하였다. 또한  $Pr \rightarrow \infty$ 인 경우 이전의 해석적 결과와 비교하기 위하여 (17)식으로부터 판정항을 무시하고 수치방법을 적용하여 임계조건을 구하였다.

안정성 방정식 (17)과 (18)식을 적분하기 위해서는, 주어진 Prandtl수와 파수에 대해, 고유치  $Ra^*$ 와 하부가 열면  $\zeta=0$ 에서의  $D^3w^*$ 와  $D\theta^*$ 의 값을 가정한다. 또한 안정성 방정식들과 (12)식과 (13)식에서 주어진 경계조건들이 homogeneous하므로  $\zeta=0$ 에서의 또하나의 경계조건  $D^2w^*$ 를 임의로 가정할 수 있다. 가열면에서 주어진

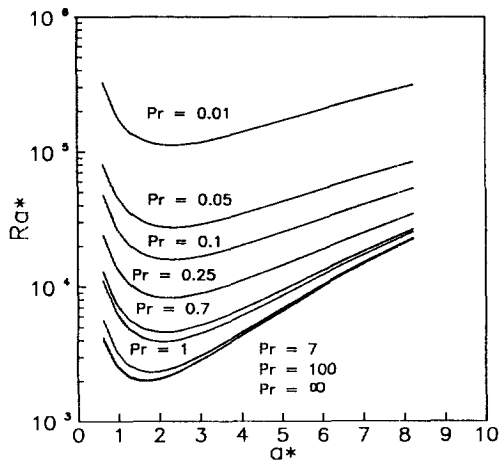


Fig. 2. Marginal stability curves for finite Prandtl numbers.

경계조건 3개와 위의 시행값을 가지고 가열면으로부터 속도 교란량  $w^*$ 와 온도 교란량  $\theta^*$ 가 0이 되는 상부 경계면으로 적분을 시작한다.

만일 가상의 바깥쪽 경계면에서  $w^*$ 와  $\theta^*$ 값들이 0이 되지 않는다면 Newton-Raphson방법에 의하여 초기에 가정된 3개의 값들을 새로이 지정해 준다. 따라서 shooting은 연속적으로 계산된 시행값의 차를 이전의 값으로 나눈 상대오차가  $|\epsilon| < 10^{-10}$ 일 때까지 수행된다. 이와 같은 값들이 수렴하면 바깥쪽 경계를 증가시키면서 위의 계산을 반복한다. Lee 등[10, 11]의 결과에서 나타난 바와 같이 교란량들은 열 침투층 밖에서 매우 급하게 감소한다. 따라서  $Ra^*$ 의 증감은 열 침투층 밖에서 계산값이 증가함에 따라 급격히 감소될 것이다. 본 연구에서는 보다 정확한 결과를 얻기 위하여 이러한 접근영역에서 무한대까지 외삽법을 사용하여 고유치  $Ra^*$ 를 구하였다.

이러한 방법에 의하여 주어진 Prandtl수와 무차원 파수에 대하여  $Ra^*$ 를 구하고, 이러한 결과들로부터 한계안정성 곡선을 작성하여 최소  $Ra^*$ 와 그에 대응하는  $a^*$ 를 구하면 이 값들이 자연대류 발생시점을 나타내는 임계조건이 된다. 하부면이 일정 열속 가열시 이와 같은 임계조건으로부터 얻은 한계 안정성 곡선이 Fig. 2에 도시되었다.

### 3. 안정성 결과 및 검토

#### 3-1. 안정성 판별기준

수평유체층에서 Prandtl수가 매우 클 때 (17)식에서 관성항을 무시하고 해질차에 언급된 수치 방법을 적용하면 다음과 같은 임계값을 얻는다.

Table 1. Numerical values of  $Ra_c^*$  and  $a_c^*$  for constant flux heating

Pr	0.01	0.05	0.1	0.25	1	7	100
$Ra_c^*$	112,078	27,530	15,862	8,628	3,901	2,336	2,028
$a_c^*$	2.31	2.31	2.28	2.28	2.09	1.83	1.71

$$\tau_c = 4.48 Ra^{-1/2} \text{ and } a_c = 0.269 Ra^{1/4} \text{ for } Pr \rightarrow \infty \quad (19)$$

Prandtl수가 매우 큰 경우 전파이론을 적용하여 해석적으로 구한 Lee 등[10]의 결과는  $\tau_c = 4.57 Ra^{-1/2}$ 와  $a_c = 0.267 Ra^{1/4}$ 로서 수치해석 결과 (19)와 잘 일치함을 알 수 있다. 이로부터 본 연구에서 사용된 수치방법이 타당하다는 것을 알 수 있었고, 또한 두 결과에서 근소한 차이는 Lee 등[10]이 제시한 해석적인 해가 기본온도 적분법으로 모사하고 WKB 근사법을 사용하였기 때문에 발생한 것 같다.

Prandtl수가 유한한 경우 고유치  $Ra^*$ 와  $a^*$ 에 대한 한계 안정성 곡선으로부터 임계조건들을 구하여 Table 1에 나타내었다. Table 1에서 Prandtl수가 감소할수록 임계 Rayleigh수는 증가하는 경향을 보였으며,  $Pr > 10$ 일 경우 임계 Rayleigh수는 Prandtl수에 크게 영향을 받지 않는다는 것을 알 수 있었다. 또한 임계파수는 Prandtl수에 약한 의존성을 나타내며, Prandtl수가 작을수록 임계파수는 2.31로 접근하는 경향성을 보여 준다.

자연대류 발생시점을 나타내는 임계조건을 각각의 Prandtl수에 대하여 수치해석적인 방법을 적용하여 구하였다. 이를 근거로 Prandtl수에 대한 관계식을 구성하면 다음과 같다.

$$\tau_c = 4.57[(1 + 0.62/Pr)/Ra]^{1/2} \quad (20)$$

$$a_c = 0.425[(1.14/Pr + 6.42)/Ra]^{-1/4} \quad (21)$$

윗 식들의 오차범위는 Table 1에 주어진 결과들에 대하여 각각  $\pm 8\%$  이내와  $\pm 4\%$  이내이다. Fig. 3에서는 안정성 판별기준에 대한 Prandtl수의 효과를 도시하였다.

안정성 판별기준으로부터 주어진 Prandtl수와 Rayleigh수에 대하여 자연대류는 (20)식으로 계산되는 시점에서 (21)식의 파수로 규칙적인 cell 형태를 보이면서 발생될 것이다. 주어진 Prandtl수에 대하여 Rayleigh수가 증가할수록 임계시간은 작아지고, 임계파수는 더 커진다는 것을 알 수 있었다. 즉 Rayleigh수가 커질수록 계는 불안정해진다. 또한 주어진 Rayleigh수에 대하여 Prandtl수가 작아질수록 임계시간은 커지고 임계파수는 작아진다. 이로부터 Prandtl수가 작아짐에 따라 계는 더욱 안정화 됨을 예측할 수 있다.

일정한 열속으로 가열되는 계에서 Nielsen과 Sabersky[13]는  $45 < Pr < 4770$ 인 실리콘 오일을 가지고 실험

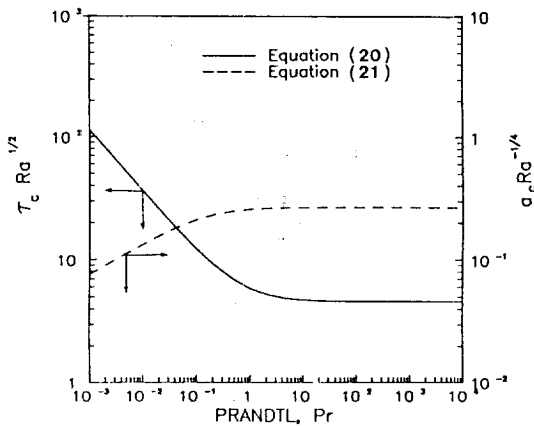


Fig. 3. Effects of Prandtl numbers on critical conditions.

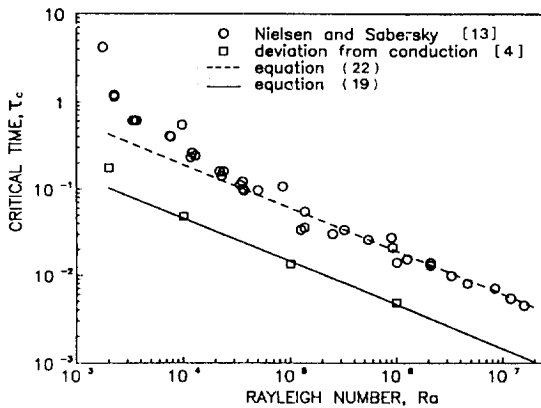


Fig. 4. Onset time of convection vs. critical Rayleigh number for large Prandtl number.

을 하여 자연대류가 Shadowgraph에 의하여 점(dot) 형태로 감지되는 시간  $\tau_0$ 가 다음과 같은 식으로 주어진다 고 보고하였다.

$$\tau_0 = 19 Ra^{-1/2} \text{ for } Ra > 10^4 \quad (22)$$

Prandtl수가 큰 경우 수치해석적으로 구한 결과 (19)식과 (22)식을 비교해 보면, Fig. 4에서 나타난 바와 같이  $\tau_0 \approx 4\tau_c$ 의 관계를 보이고 있음을 알 수 있다. 이와 같은 경향은 등온가열계[14], 일정 비율로 가열되는 계[6], 다공성 매질계[9]에서도 명백히 나타난다.

이러한 차이는 Fig. 5에서 시간에 따른 열전달 변화를 조사함으로써 어느 정도 확인할 수 있다. Nielsen과 Sabersky 실험결과( $\diamond$ :  $Ra=10^6$ ,  $\triangle$ :  $Ra=10^5$ ,  $\square$ :  $Ra=10^4$ ,  $\circ$ :  $Ra=2000$ )로부터 주어진 Rayleigh수에 대한 열전달의 변화는 전도에 의한 Nusselt수보다 일정한 시간부터 커지기 시작한다. 이에 대하여 Choi 등[4]은 전도에 의

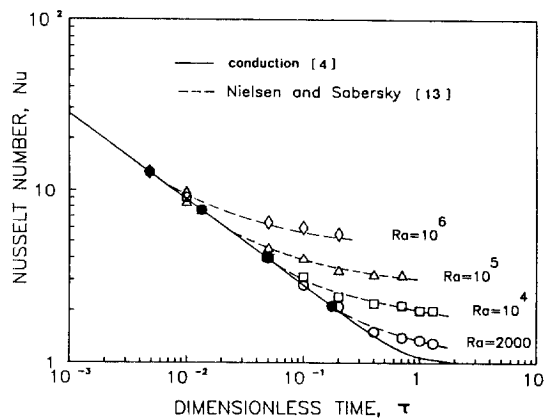


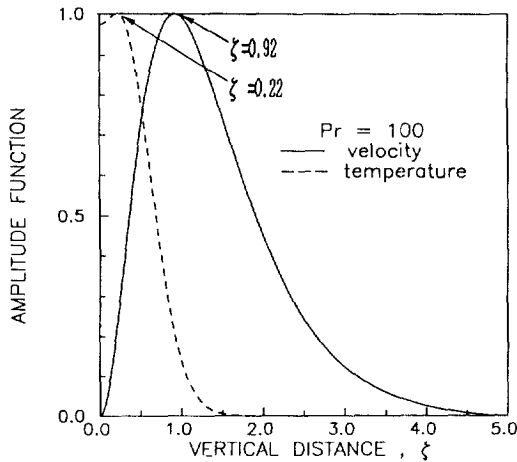
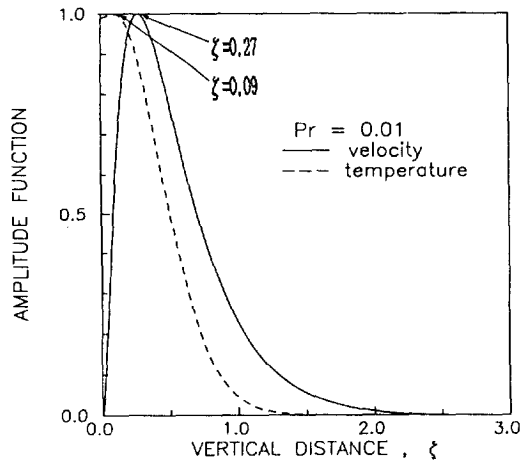
Fig. 5. Nusselt number vs. dimensionless time.

한 Nusselt수보다 증가하는 시간을 임계시간  $\tau_c$ 로 잡으며 Fig. 4에서 보는 바와 같이 오히려 (19)식에 근접하게 된다. 그림에서  $\square$ 로 나타난 것이 전도식으로부터 벗어나는 시간을 나타내고 있다. 따라서 선형이론하에서 초기에 미소교란이 측정될 때까지는  $4\tau_c$ 만큼의 성장시간이 필요하다고 생각된다.

본 계에 대하여 Jhaveri와 Homsy[3]의 추계모델을 근거하여 Kim과 Kim[15]은 자연대류가 유발되는 임계조건을 예측하였다. 그들은  $t=0$ 에서 초기조건을 가정하고 Fourier분해로부터 얻어진 지배방정식을 풀었다. 시간에 따른 Nusselt수가 전도로부터 증가하기 시작하는 시간을 구하여 (22)식과 대동소이한 결과를 얻었다. 자연대류 발생시점에서 일정한 강도를 가진 무작위 요동(random forcing)의 존재를 인정한다고 해도, 그들이 제시한 Nusselt수의 경향은 실제적인 실험결과[13]와 다소 다른 것 같다. 실험결과에 의하여 주어진 Rayleigh수에 Nusselt수는 시간에 따라 undershoot도 overshoot도 보이지 않는다. Fig. 5에서 이를 잘 설명해 주고 있다.

### 3-2. 임계시점에서 교란의 거동

자연대류 발생시점에서 교란의 진폭함수들은 교란의 최대값으로 규격화하여 Fig. 6, 7에 도시하였다. Lee 등[10, 11]이 구한 결과와 마찬가지로 온도교란은 Prandtl수에 관계없이 대부분이 열 침투층 내에 국한되며, 속도교란은 이와는 다르게 Prandtl수에 크게 의존되어 나타난다. 또한 Prandtl수가 감소할수록 속도 및 온도 교란량의 최대치를 나타내는 수직길이  $\zeta$ 는 하부 가열면으로 접근함을 알 수 있다. 이는 Prandtl수의 정의에서 볼 수 있듯이 Prandtl수가 큰 유체들이 작은 유체에 비하여 운동량 전달 능력이 열전달 능력에 비하여 상대적으로 크기 때문일 것이다.

Fig. 6. Distribution of amplitude functions for  $Pr=100$ .Fig. 7. Distribution of amplitude functions for  $Pr=0.01$ .

자연대류 발생시점에서 Prandtl수가 매우 큰 경우 교란의 증폭률(temporal growth rate)을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{w_1^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial \tau} \bigg|_{\tau=\tau_c} = \frac{Ra_c^{1/2}}{4.57} \left( 1 - \frac{\zeta}{2w^*} \frac{dw^*}{d\zeta} \right) \quad (23)$$

$$\frac{1}{\theta_1^*} \frac{\partial \theta_1^*}{\partial \tau} \bigg|_{\tau=\tau_c} = - \frac{Ra_c^{1/2}}{4.57} \left( \frac{\zeta}{2\theta^*} \frac{d\theta^*}{d\zeta} \right) \quad (24)$$

위의 식들에서 좌변은 교란의 증폭률에 해당되며, Prandtl수가 매우 큰 경우 교란의 성장률은  $Ra_c^{1/2}$ 에 비례하는 것을 알 수 있다. 또한 하부면에서 속도 및 온도교란의 고착 경계조건( $Dw^*=D\theta^*=0$ )에 의하여 교란의 성장률은 0에 접근함을 알 수 있었다.

Fig. 8에서 나타나듯이 밀면 경계 근처에서 온도교란

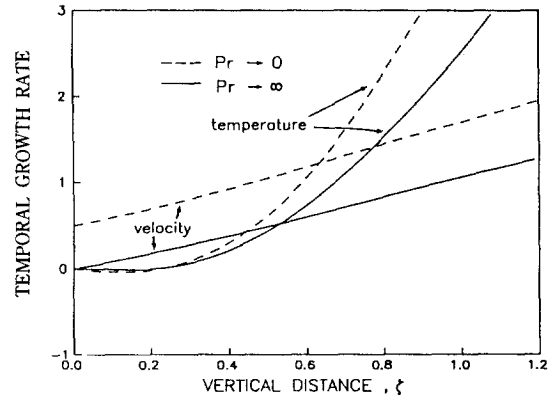


Fig. 8. Distribution of temporal growth rate.

의 증폭률은 음의 값을 갖고 있다. 이와 같이 온도 교란의 감폭률은 온도교란이 갖고 있는 열에너지가 속도교란에 전이되어 유체의 유동이 가능하게끔 운동량의 크기를 마련해 주는데 있다. 이와 같은 전이 영역이 열 침투층 내에 존재하여, 이로부터 열 침투깊이를 길이단위로 사용하여 각 물리량들을 상사전환시키는 전파이론이 타당성이 있음을 검증할 수 있다.

Prandtl수가 매우 작은 경우 자연대류 발생시점에서 교란의 성장률은 다음과 같은 관계를 만족한다.

$$\frac{1}{w_1^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial \tau} \bigg|_{\tau=\tau_c} = \frac{(PrRa_c)^{1/2}}{3.6} \left( 1 - \frac{\zeta}{2w^*} \frac{dw^*}{d\zeta} \right) \quad (25)$$

$$\frac{1}{\theta_1^*} \frac{\partial \theta_1^*}{\partial \tau} \bigg|_{\tau=\tau_c} = \frac{(PrRa_c)^{1/2}}{3.6} \left( \frac{\zeta}{2\theta^*} \frac{d\theta^*}{d\zeta} \right) \quad (26)$$

Prandtl수가 매우 작은 경우에는 경계조건으로부터 속도 고착조건이 제거되므로  $(\xi/w^*)(dw^*/\xi)$ 는 1로 수렴하게 된다. 따라서 가열면에서의 속도교란은  $(PrRa_c)^{1/2}$ 에 비례하며 온도교란 성장률 0이 된다. Prandtl수가 매우 클 경우와 마찬가지로 온도교란이 감폭되는 영역이 열 침투층 내에 존재함을 확인할 수 있었다. Fig. 8은 (23)-(26)식에 나타나 있는 속도교란과 온도교란의 증폭률을 임제시간에 해당하는 값을 1로 규격화하여 도시하였다.

### 3-3. 열전달 상관식

열전달에 관한 많은 연구들이 유한 진폭대류와 난류 열대류 두 극한 경우에 대하여 수행되었다. 이와 같이 Rayleigh수의 전 범위에서 열전달 특성을 나타낼 수 있는 상관식의 도출은 많은 어려움을 수반한다. Rayleigh수가 매우 클 때 자연대류 유발조건이 난류상태의 열전달 특성과 상호 연관성이 있을 것이라는 가능성이 논의되어 왔다[16, 17]. 최근에 Choi 등[14]과 Lee 등[11]은

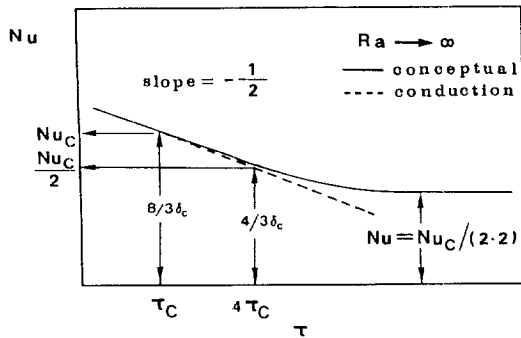


Fig. 9. Conceptual diagram of heat transfer for constant flux heating.

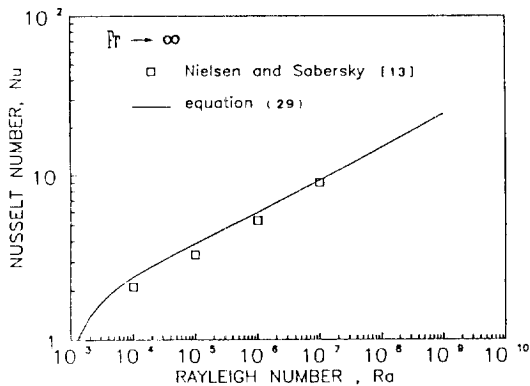


Fig. 10. Comparison of Nu vs. Ra for large Prandtl number.

정확한 안정성 판별기준이 선행되어 구해진다면 Prandtl수와 Rayleigh수의 전 범위에서, 이와 같은 개념을 적용하여 열전달 예측이 가능해 진다고 보고하였다.

일정열속 가열시 열전달 특성을 등온가열시[14]와는 다른 경향을 보인다는 것을 Fig. 5에 도시한 바 있다. 따라서 본 연구에서는 열전달에 대한 개념적인 도표를 Fig. 9에서와 같이 제시하였다.  $\tau_c$ 에서 발생된 자연대류는 전도의 영향하에서  $4\tau_c$ 가 될 때까지 성장한다. 이후에 Nusselt수는 전도식으로부터 명확히 벗어나고, 궁극적으로 정상상태에서의 Nusselt수는  $Nu_c/4$ 가 된다고 가정하였다. 따라서 Nusselt수는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$Nu = \frac{0.099 Ra^{1/4}}{(1 + 0.62/Pr)} \quad \text{for } Ra \rightarrow \infty \quad (27)$$

$Ra \rightarrow 1296$ 인 경우 열전달의 초기의 변화는 Gough[18]의 결과로부터 다음의 결과를 얻게 된다.

$$\frac{dNu}{dRa} = \frac{1}{(0.692)(1,296)} \quad \text{for } Ra \rightarrow 1,296 \quad (28)$$

식 (27)과 (28)을 Choi 등[14]과 Cheung[19]의 열전달 상관 관계식을 기초로 하여 통합하면 새로운 열전달 상관 관계식을 얻는다.

$$Nu = 1 + \frac{0.099(Ra^{1/4} - 1296^{1/4})}{(1 + 0.62/Pr)^{1/4} \{1 - 1.82[1 - 0.1/(1 + 0.62/Pr)^{1/4}]Ra^{-1/12}\}} \quad (29)$$

이와 같이 열전달 상관 관계식을 Prandtl수와 Rayleigh수의 함수로써, Prandtl수가 매우 클 때 ( $Pr > 10$ ) 기존의 실험결과와 매우 잘 일치하고 있음을 Fig. 10은 보여주고 있다.

## 4. 결 론

일정 열속으로 밀면이 가열되는 정지된 수평유체층에서 Prandtl수에 따른 자연대류 발생시점을 전파이론을 도입함으로써 해석하였다. 자연대류 발생시점을 나타내는 안정성 판별기준을 Prandtl수와 Rayleigh수의 함수로서 구하였고, 이로부터 Prandtl수가 감소할수록 계는 더 안정된다는 것을 알 수 있었다. 또한 자연대류 발생시점에서 온도교란의 분포는 Prandtl수에 크게 변동없이 열침투층 내에 존재하며 교란의 증폭률을 구한 결과 가열면인 경계근처에서 온도교란은 감폭되고 수직방향의 속도교란은 증폭되는 것으로 나타났다. 전파이론을 적용하여 구한 안정성 판별기준을 사용하여 난류열전달 특성을 예측할 수 있는 상관식을 Prandtl수와 Rayleigh수의 함수의 함수로써 제시하였고 이 열전달 상관식은 기존의 실험치들과 잘 일치한다.

## 감 사

본 연구를 지원해 주신 한국과학재단과 주식회사 유공에 감사를 드립니다.

## 사용기호

- $a$  : dimensionless wave number,  $(a_x^2 + a_y^2)^{1/2}$
- $a^*$  : modified wave number  $[a\delta]$
- $D$  : differential operator with respect to  $\zeta$
- $d$  : fluid layer thickness  $[m]$
- $g$  : gravitational acceleration  $[m/s^2]$
- $Nu$  : Nusselt number  $[hd/k]$
- $Pr$  : Prandtl number  $[\alpha/\nu]$
- $q_w$  : wall heat flux  $[J/m^2s]$
- $Ra$  : Rayleigh number  $[g\beta q_w d^4/(\alpha k \nu)]$
- $Ra^*$  : modified Rayleigh number  $[Ra\delta^4]$

$t$  : time [s]  
 $W$  : vertical velocity [m/s]  
 $w$  : dimensionless vertical velocity [ $\alpha W/d$ ]  
 $w_1^*$  : perturbed amplitude of  $w_1$   
 $w^*$  : amplitude of velocity disturbances defined by eq. (9)  
 $Z$  : vertical distance [m]  
 $z$  : dimensionless vertical distance [ $Z/d$ ]

#### 그리스 문자

$\alpha$  : thermal diffusivity [ $m^2/s$ ]  
 $\beta$  : coefficient of thermal expansion [ $K^{-1}$ ]  
 $\delta$  : thermal penetration depth  
 $\zeta$  : similarity variable [ $z/\delta$ ]  
 $\theta$  : dimensionless temperature  
 $\nu$  : kinematic viscosity [ $m^2/s$ ]  
 $\tau$  : dimensionless time [ $ta/d^2$ ]

#### 상첨자

\* : refers to the amplitude function of disturbances

#### 하첨자

$c$  : refers to the critical state  
 $o$  : refers to the observable magnitude  
 $0$  : refers to the unperturbed state  
 $1$  : refers to the perturbed state

#### 참고문헌

- Morton, B. R.: *J. Mech. Appl. Math.*, **10**, 433(1957).
- Foster, T. D.: *Phys. Fluid*, **8**, 1249(1965).
- Jhaveri, S. B. and Homsy, M. G.: *J. Fluid Mech.*, **114**, 251(1982).
- Choi, C. K., Kim, J. J. and Hwang, S. T.: *Korean J. of Chem. Eng.*, **2**, 17(1985).
- Choi, C. K., Shin, C. B. and Hwang, S. T.: Proc. 8th Int. Heat Transfer Conf., pp. 1389-1394, San Francisco(Aug. 17-22, 1986).
- Yoo, J. S. and Choi, C. K.: *Korean J. of Chem. Eng.*, **4**(2), 128(1987).
- Kim, M. C., Choi, C. K. and Davis, E. J.: *Int. J. Eng. Fluid Mech.*, **3**, 71(1990).
- Ahn, D. J. and Choi, C. K.: *Korean J. of Chem. Eng.*, **5**(2), 170(1988).
- Yoon, D. Y., Choi, C. K. and Yoo, J. S.: *Hwahak Konghak*, **26**(6), 607(1988).
- Lee, J. D., Choi, C. K. and Shin, C. B.: *Int. Chem. Eng.*, **30**(4), 761(1990).
- Lee, J. D., Choi, C. K. and Yoon, D. Y.: The First KSME-JSME Thermal and Fluids Eng. Conf., 2, pp. 342-347, Seoul(Nov. 1-3, 1988).
- Davenport, I. F. and King, C. J.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **17**, 69(1974).
- Nielsen, R. C. and Sabersky, R. H.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **16**, 2407(1973).
- Choi, C. K., Lee, J. D., Hwang, S. T. and Yoo, J. S.: *Hwahak Konghak*, **27**(4), 374(1989).
- Kim, K. H. and Kim, M. U.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **29**(2), 193(1986).
- Howard, L. N.: Proc. 11th Int. Cong. Applied Mech., pp. 1109-1115, Munich(1964).
- Busse, F. H.: *J. Math. Phys.*, **46**(2), 140(1967).
- Gough, D. O., Spiegel, E. A. and Toomre, J.: *J. Fluid Mech.*, **68**, 695(1975).
- Cheung, F. B.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **100**, 416(1978).