

밑면으로부터 등온 가열되는 수평 점탄성 유체층에서의 대류 안정성 해석

이상조 · 최창균

서울대학교 공과대학 화학공학과
(1993년 1월 21일 접수, 1993년 4월 27일 채택)

An Analysis of Convective Stability in a Horizontal Viscoelastic Fluid Layer Heated Isothermally from Below

Sang Jo Lee and Chang Kyun Choi

Dept. of Chem. Eng., College of Eng., Seoul National University, Seoul 151-742
(Received 21 January 1993; accepted 27 April 1993)

요 약

아래로부터 등온 가열되는 수평 Oldroyd-B 유체층에서의 자연대류 발생 시점을 선형 안정성 이론을 적용하여 구하였다. Oldroyd-B 유체가 뉴턴 유체보다 더 불안정한 것으로 나타났으며, 자연대류 발생 시점에서 과도안정성에 기인한 진동성 거동이 발생함을 알 수 있었다. 계면에서 Biot 수의 증가는 계에 안정화 효과를 주었으며, 응력 이완 시간이 커질수록 변형 지연 시간은 작아질수록 불안정성을 가중시켰다. Prandtl 수는 작아질수록 계는 안정화되었고, Prandtl 수가 100보다 클 때에는 Prandtl 수의 영향은 거의 없는 것으로 나타났다. 또한 자연대류의 발생 시점에서 불안정성 유발 요인인 부력과 표면 장력은 서로의 효과를 강화하였다.

Abstract—The onset of natural convection in a horizontal layer of Oldroyd-B Fluid heated isothermally from below is investigated by using linear stability theory. It is known that convective instabilities in the Oldroyd-B fluid layer set in more easily than those of Newtonian fluid and oscillatory motions caused by overstability will occur at the onset of natural convection. Also, it is shown that the Oldroyd-B fluid layer becomes more stable with a larger Biot number, a smaller stress relaxation time and a larger strain retardation time. The layer of Oldroyd-B fluid becomes more stable with decreasing the Prandtl number and the critical conditions are almost independent of the Prandtl number in the range of the Prandtl number values larger than 100. It is clear that the buoyancy effect and the surface tension effect reinforce each other at the onset of natural convection.

1. 서 론

얇은 수평 유체층을 아래로부터 가열하면 가열면에 인접한 유체의 밀도가 유체층의 상부에 위치한 유체의 밀도보다 작아지게 된다. 중력장하에서 이러한 유체의 구조는 불안정하지만 유체의 점성에 의한 저항, 열 확산 등

계의 안정화 요인에 의해 최초 평형 상태가 즉각 깨어지는 않는다. 불안정성을 유발하는 구동력이 유체를 안정화시키려는 힘보다 커지면 평형은 깨어지고 그 결과로서 자연대류가 발생한다[1]. 강제 대류가 없거나 아주 미미한 계에서는 자연대류가 큰 효과를 발휘하기 때문에 첨단 소재 가공, 전자 장치의 내부 냉각, 화학 증착 반응

기, 태양열 집열기, 핵 반응기, 초고순도 결정성장 등 많은 분야에서 자연대류의 중요성이 증대되고 있다.

자연대류는 부력 또는 표면 장력에 기인하여 발생한다고 알려져 있다[2,3]. 통상적으로 전자를 Benard-Rayleigh 대류, 후자를 Benard-Marangoni 대류라고 부른다. 자연대류에 관한 체계적인 연구의 효시는 1900년경 Benard[4]의 실험이라 할 수 있는데, 그는 얇은 수평 유체층의 하부면을 가열하여 육각형 셀(cell) 형태의 규칙적인 모양의 대류 유동이 나타남을 관찰하였다. 1916년 Rayleigh 경[2]은 부력 효과만을 고려하여 Benard의 실험에 대하여 최초로 이론적 해석을 시도하였고, 이후 1958년 Pearson[3]은 부력을 무시하고 표면 장력 효과만을 고려하여 안정성 해석을 수행하였다. 1964년 Nield[5]는 부력과 표면 장력 효과를 동시에 고려한 안정성 해석을 수행함으로써 자연대류 발생에 관한 두 효과가 상호 연관성이 있음을 밝혔다.

일반적으로 뉴턴 유체의 경우, 자연대류 발생 시점에서 안정성 교환의 원리가 적용되어 불안정성 형태는 시간에 무관한 고정성 거동을 보여준다. 하지만 뉴턴 유체에서 유체층의 회전[6], 자기장의 부과, 물질 전달 등이 있는 계인 경우, 어떤 매개 변수 영역에서는 불안정성 유발시점에서 계가 과도안정(overstable)하게 되어 불안정성이 진동성 대류 유동(oscillatory motion)으로 나타난다[1]. 유체층의 회전이나 자기장은 유체층에 탄성과 비슷한 현상을 주기 때문에 유체는 적절한 파장 형태를 유지하게 된다. 뉴턴 유체와는 달리 점탄성 유체층에서는 아래로부터 가열되는 것만으로 과도안정하게 될 수 있는 것으로 알려져 있다[7]. 1963년 Herbert[8]는 아래로부터 가열되는 평면 Couette 흐름이 있는 계에서 처음으로 점탄성 유체에 대한 안정성 해석을 하였는데, 그는 점탄성 유체에서는 진동성 거동이 먼저 나타날 수 있다는 것을 밝혔다. Sokolov와 Tanner[9]는 일반적인 점탄성 유체(general viscoelastic fluid) 층에서, 또 Rosenblat[10]는 Phan-Tien-Tanner 모델을 사용한 점탄성 유체층에서 각각 부력 효과만을 고려한 과도 안정성 해석을 수행하였다. 1987년 Kolkka와 Ierley[11]는 아래로부터 가열되는 Oldroyd-B 유체층에서의 Benard-Rayleigh 대류를 다루었으며, 1988년 Lebon과 Cloot[12]는 Reiner-Rivlin과 Rivlin-Erickson 2차 유체에 대하여 Benard-Marangoni 대류 문제를 해석하였다. 1993년 Lee 등[13]은 Oldroyd-B 유체층에서 표면 장력과 부력 효과를 동시에 고려하여 자연대류 임계 조건을 산출하였다.

본 연구에서는 기존 연구의 확장으로써 얇은 수평 Oldroyd-B 유체층에서 부력과 표면 장력 효과를 동시에 고려하여 과도 안정성하에서 자연대류 임계 시점을 구하

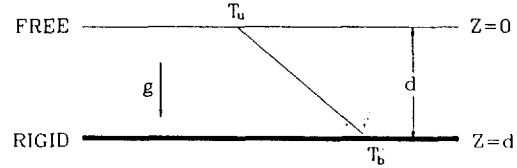


Fig. 1. Schematic diagram of the present system.

였으며, Lee 등[13]의 연구에서 고려하지 못한 경계면에서의 열경계조건들의 변화를 중점적으로 살펴보고 Prandtl 수를 비롯하여 관련된 매개 인자의 변화가 계의 안정성에 미치는 영향도 함께 고려하였다.

2. 이 론

2-1. 계의 구성 및 지배 방정식

본 연구에서 고려한 기본계는 Fig. 1과 같이 아래로부터 가열되는 수평 Oldroyd-B 액체층으로서 깊이가 d , 밑면은 고정 경계면이고 일정 온도로 유지되고 있으며 윗면은 자유 경계면으로써 기체와 접촉하고 있다. 유체는 최초에 정지 상태에 있으며 밑면을 아주 천천히 가열하여 선형의 온도 분포를 가지며, 유체의 열전도도는 k , 주변 유체와의 열전달계수는 h 이다. 유체는 비압축성(incompressible) 유체이며 점성에 의한 에너지 소산은 무시되고, Boussinesq 가정하에서 지배 방정식들은 다음과 같다[2, 4, 5].

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{V} = (U^*, V^*, W^*) \quad (1)$$

$$\rho_0 \left[\frac{\partial}{\partial t^*} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right] \mathbf{V} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad (2)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t^*} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right] T = \alpha \nabla^2 T \quad (3)$$

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_u)] \quad (4)$$

여기서 \mathbf{V} , $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{g} 는 각각 속도, 응력 텐서와 중력 가속도를 나타내며, ρ , T , t^* , α , β 는 각각 밀도, 온도, 시간, 열확산 계수(thermal diffusivity), 부피 팽창 계수(thermal expansivity)를 나타낸다.

한편 Oldroyd-B 유체의 구성식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \dot{\boldsymbol{\tau}} &= 2\eta_0 (\boldsymbol{\Delta} + \epsilon_s \dot{\boldsymbol{\Delta}}) \\ \dot{\boldsymbol{\tau}} &= \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t^*} + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{V} - (\nabla \mathbf{V})^T \cdot \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\Delta} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 상첨자 “ \bullet ”는 “upper convective derivative”이

며, 상첨자 "T"는 전치(transpose)를 나타낸다. 그리고 λ_s 는 응력 이완 시간(stress relaxation time), ε_s 는 변형 지연 시간(strain relaxation time), η_0 는 점도를 나타낸다. Oldroyd-B 모델은 간단하면서도 전단 속도가 그리 크지 않은 경우에는 실제 유체에서 나타나는 탄성 효과를 비교적 잘 나타낼 수 있고, $\lambda_s = \varepsilon_s$ 이거나 $\lambda_s = \varepsilon_s = 0$ 인 경우에는 뉴턴 유체에 해당된다[14]. 경계조건으로 윗면에서는 굴곡이 없는 수평 자유경계조건을 적용하며, 온도는 일정열속조건을 적용한다. 아랫면에서는 고정 경계조건, no-slip 조건과 일정온도조건을 적용한다.

2-2. 선형 안정성 해석

선형 안정성 이론에 의하면 자연대류 임계 시점에서 압력, 온도, 속도 등의 물리량을 기본량과 무한소의 교란량의 합으로 다음과 같이 나타낼 수 있고, 교란량에 대한 2차 이상의 누승항을 무시하고 식을 선형화하여 안정성 해석을 수행한다. 이에 따라 자연대류 임계 시점에서 각 물리량들은 다음과 같은 1차적인 선형의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 U^* &= U_1(t^*, x^*, y^*, z^*) \\
 V^* &= V_1(t^*, x^*, y^*, z^*) \\
 W^* &= W_1(t^*, x^*, y^*, z^*) \\
 P &= P_0(z^*) + P_1(t^*, x^*, y^*, z^*) \\
 \tau &= \tau_1(t^*, x^*, y^*, z^*) \\
 T &= T_0(z^*) + T_1(t^*, x^*, y^*, z^*)
 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 하첨자 "0"과 "1"은 각각 기본량과 교란량을 의미한다. 식 (2)에 컬(curl)을 두 번 취하여 압력항을 소거하고 식 (6)을 지배 방정식에 대입하여 비압축성 유체의 연속 방정식(1)을 적용하면 다음과 같은 선형화된 수직 성분의 교란 방정식이 얻어진다.

$$-\rho_0 \frac{\partial}{\partial t^*} \nabla^2 W_1 = \rho_0 g \beta \nabla_1^2 T_1 + [\nabla \cdot (\nabla \cdot \nabla \cdot) - \nabla^2 (\nabla \cdot)] \tau_{z1} \quad (7)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t^*} + W_1 \frac{\partial T_0}{\partial z^*} = \alpha \nabla^2 T_1 \quad (8)$$

여기서 τ_{z1} 은 응력 텐서의 z성분 벡터의 교란량이다. 또한 식 (5)로부터 다음과 같은 식이 성립된다.

$$\left[1 + \lambda_s \frac{\partial}{\partial t^*} \right] \tau_{z1} = \eta_0 \left[1 + \varepsilon_s \frac{\partial}{\partial t^*} \right] \left[\nabla W_1 + \frac{\partial V_1}{\partial z^*} \right] \quad (9)$$

여기서 V_1 은 속도 벡터의 교란량을 의미한다. 또한 식 (7)과 (9)로부터 다음과 같은 교란 방정식을 얻는다.

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t^*} \left[1 + \lambda_s \frac{\partial}{\partial t^*} \right] \nabla^2 W_1 = -\rho_0 g \beta \left[1 + \lambda_s \frac{\partial}{\partial t^*} \right] \nabla_1^2 T_1$$

$$+ \eta_0 \left[1 + \varepsilon_s \frac{\partial}{\partial t^*} \right] \nabla^4 W_1 \quad (10)$$

$$\text{여기서 } \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} \right), \quad \nabla_1^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$\text{이고, } \nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} \right)^2 \text{이다.}$$

지배 방정식 (8), (10)을 무차원화하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입한다.

$$(x, y, z) = \frac{1}{d} (x^*, y^*, z^*)$$

$$(U, V, W) = \frac{d}{\alpha} (U_1, V_1, W_1)$$

$$t = \frac{\alpha}{d^2} t^*$$

$$\Theta = \frac{Ma}{\Delta T} T_1$$

$$(\lambda, \varepsilon) = \frac{\alpha}{d^2} (\lambda_s, \varepsilon_s)$$

여기서 $\Delta T = T_b - T_a$ 이고, Ma는 Marangoni 수로서 $Ma = -(dS/dT)(d\Delta T/\alpha\eta_0)$ 로 정의되며, S는 표면장력을 나타낸다. 온도 교란 T_1 은 온도차 ΔT 에는 무관하므로 ΔT 대신 $\Delta T/Ma$ 으로 무차원화하였다. 위의 무차원 변수들을 사용하여 지배 방정식을 무차원화한 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \left[1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right] \nabla^2 W = -\frac{Ra}{Ma} \left[1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right] \nabla_1^2 \Theta \\
 + \left[1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right] \nabla^4 W
 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + Ma \cdot W = \nabla^2 \Theta \quad (12)$$

윗 식에서 Ra는 Rayleigh 수로서 $Ra = g\beta\Delta T d^3/\alpha\nu$ 으로 정의되며, Pr은 Prandtl 수로서 $Pr = \nu/\alpha$ 로 정의되는 무차원 수이고 ν 는 동점도를 나타낸다.

윗면은 굴곡이 없이 평평한 수평 자유 경계면이므로 식 (13a)가 성립하고 자유 경계면에서는 전단응력이 0이 되고 이 조건에 표면장력과 전단응력과의 관계를 이용하면 식 (13b)를 유도할 수 있다. 또한 경계면을 통한 열속의 연속 조건으로부터 식 (13c)를 얻는다[11, 15, 16].

$$\text{At } z=0$$

$$W=0 \quad (13a)$$

$$\left[1+\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right] \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = -\left[1+\lambda \frac{\partial}{\partial t}\right] \nabla_i^2 \Theta \quad (13b)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \text{Bi} \cdot \Theta \quad (13c)$$

밀면은 고정 경계 조건이 적용되어 식 (14a)가 성립하고 등온 조건에서 식 (14b)가 적용된다.

$$\begin{aligned} \text{At } z=1 \\ W = \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\Theta = 0 \quad (14b)$$

여기서 Bi는 Biot 수로써 $\text{Bi} = hd/k$ 로 정의된다.

계에 주어지는 교란들은 시간에 따라 소멸하거나 성장하게 된다. 발생되는 모든 형태의 교란들에 대하여 안정성 여부를 따지기 위해 정규 형태 해석법(normal mode analysis)을 적용하면 교란의 진폭 함수들을 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$W = w(z) \exp[i(a_x x + a_y y) + \sigma t] \quad (15a)$$

$$\Theta = \theta(z) \exp[i(a_x x + a_y y) + \sigma t] \quad (15b)$$

여기서 i 는 허수이고, w 와 θ 는 각각 교란의 크기를 나타내는 속도 교란 및 온도 교란의 진폭 함수이다. a 는 무차원 수평 파수로서 $a = (a_x^2 + a_y^2)^{1/2}$ 의 관계를 가진다. σ 는 $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ 로 표시되는 복소수로서 교란의 성장률을 나타낸다. 또한 과도안정성하에서 자연대류 발생 시점에서의 교란의 진폭 함수와 교란의 성장률은 다음과 같이 둘 수 있다[1, 13].

$$w = w_r + iw_i \quad (16a)$$

$$\theta = \theta_r + i\theta_i \quad (16b)$$

$$\sigma = i\sigma_i \quad (16c)$$

식 (15)와 (16)을 식 (11)과 (12)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 상미분 교란 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} (D^2 - a^2) \left[(D^2 - a^2) + \frac{\lambda \sigma_i^2}{\text{Pr}} \right] w_r \\ - (D^2 - a^2) \left[(D^2 - a^2) \varepsilon \sigma_i - \frac{\sigma_i}{\text{Pr}} \right] w_i \\ = - \frac{\text{Ra}}{\text{Ma}} a^2 (\theta_r - \lambda \sigma_i \theta_i) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} (D^2 - a^2) \left[(D^2 - a^2) \varepsilon \sigma_i - \frac{\sigma_i}{\text{Pr}} \right] w_r \\ + (D^2 - a^2) \left[(D^2 - a^2) + \frac{\lambda \sigma_i^2}{\text{Pr}} \right] w_i \\ = - \frac{\text{Ra}}{\text{Ma}} a^2 (\lambda \sigma_i \theta_r + \theta_i) \end{aligned} \quad (18)$$

$$(D^2 - a^2) \theta_r + \sigma_i \theta_i = \text{Ma } w_r \quad (19)$$

$$(D^2 - a^2) \theta_i - \sigma_i \theta_r = \text{Ma } w_i \quad (20)$$

여기서 $D = d/dz$, $D^2 = d^2/dz^2$ 이다. 또한 경계 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{At } z=0 \\ w_r = w_i = 0 \end{aligned} \quad (21a)$$

$$D\theta_r = \text{Bi } \theta_r \quad (21b)$$

$$D\theta_i = \text{Bi } \theta_i \quad (21c)$$

$$D^2 w_r = \frac{a^2}{(1 + \varepsilon^2 \sigma_i^2)} \left[(1 + \varepsilon \lambda \sigma_i^2) \theta_r + (\varepsilon - \lambda) \sigma_i \theta_i \right] \quad (21d)$$

$$D^2 w_i = \frac{a^2}{(1 + \varepsilon^2 \sigma_i^2)} \left[(\lambda - \varepsilon) \sigma_i \theta_r + (1 + \varepsilon \lambda \sigma_i^2) \theta_i \right] \quad (21e)$$

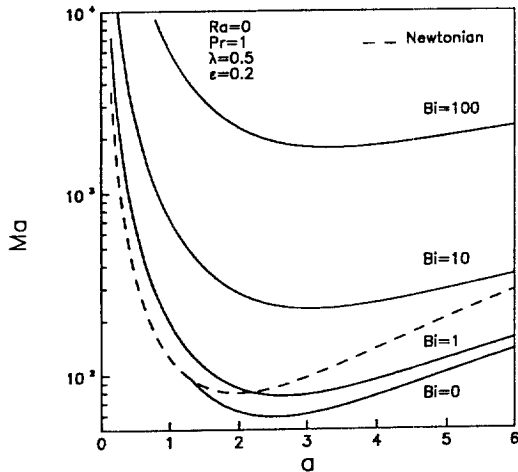
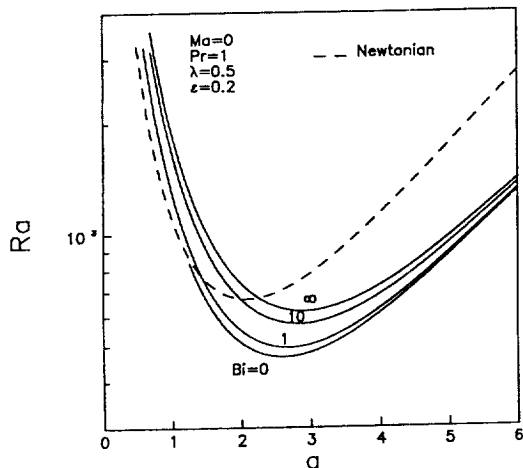
$$\begin{aligned} \text{At } z=1 \\ w_r = w_i = 0 \end{aligned} \quad (22a)$$

$$Dw_r = Dw_i = 0 \quad (22b)$$

$$\theta_r = \theta_i = 0 \quad (22c)$$

2-3. 해법

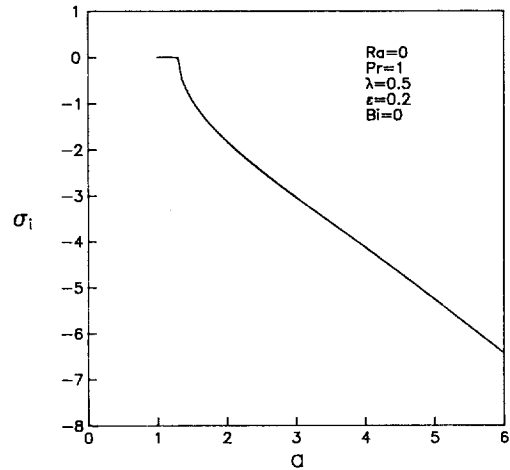
본 연구에서는 자연대류가 발생하는 임계 조건을 찾기 위해 모든 a 값에 대하여 지배 방정식과 경계 조건을 만족하는 최소 Marangoni 수 또는 최소 Rayleigh 수와 그에 해당되는 a 를 구하였다. 교란 방정식 (17)-(20)을 풀기 위한 수치 해법으로 "outward shooting" 방법을 사용했는데 그 해법은 다음과 같다. 경계 조건 문제를 초기 조건 문제로 전환해야 하므로 $z=0$ 에서 식 (21)에 주어진 조건외에 Dw_r , Dw_i , $D^3 w_r$, $D^3 w_i$, θ_r , θ_i 에 대한 초기 값이 필요하게 된다. 본 문제는 고유치 문제이므로 $z=0$ 에서 $Dw_r = Dw_i = 1$ 로 임의로 정하여 고유치들의 크기를 고정시키고 주어진 Pr , λ , ε , Ra , a 에 대하여 고유치 Ma 와 초기 조건 $D^3 w_r$, $D^3 w_i$, θ_r , θ_i , σ_i 를 가정한다. 위에서 가정된 초기치로부터 $z=0$ 에서 $z=1$ 까지 4차 Runge-Kutta-Gill 방법으로 적분을 수행하여 식 (22)가 만족될 때까지 Newton-Raphson법을 사용하여 초기 가정치들을 보정


 Fig. 2. Marginal stability curves for Ma vs. a with $Ra=0$.

 Fig. 3. Marginal stability curves for Ra vs. a with $Ma=0$.

한 후 반복 계산한다. 이와 같은 해법은 Chen 등[17-19]에 의해 그 타당성이 입증되었다.

3. 결과 및 토의

Fig. 2는 $\lambda=0.5$, $\varepsilon=0.2$, $Pr=1$ 일 때 부력 효과는 무시하고($Ra=0$) 무차원 수평파수 a 에 따른 Marangoni 수의 한계 안정성 곡선을 나타낸 것이며, Fig. 3은 표면 장력 효과는 무시하고($Ma=0$) Rayleigh 수에 대한 한계 안정성 곡선을 나타낸 것으로서 최초 자연대류 발생 시점은 한계 안정성 곡선상의 최소 Marangoni 수나 최소 Rayleigh 수에 의해 결정된다. 그림에서 파선으로 된 곡


 Fig. 4. Dimensionless frequency σ_i vs. a with $Ra=0$.

선은 뉴튼 유체에 대한 한계 안정성 곡선을 나타내는데, 뉴튼 유체의 경우에 자연대류 임계 시점에서 대류 불안정성은 시간에 무관한 고정형 대류 유동으로 나타난다 [1-4]. 그림에서 보면 Oldroyd-B 유체의 한계 안정성 곡선이 모두 뉴튼 유체의 안정성 곡선으로부터 분기(bifurcation)하고 있는데, 이런 분기점은 Rosenblat[10]의 결과에서도 확인되었다. Oldroyd-B 유체의 경우에 분기점으로 가까이 갈수록 시간 의존항인 σ_i 값이 작아지며 분기점에서 $\sigma_i=0$ 이 되는 것을 해석 결과 확인하였으며, 분기가 되는 파수(branching wave number) 이하에서는 뉴튼 유체와 같은 거동을 보이게 된다. 그림에서 보듯이 Oldroyd-B 유체는 뉴튼 유체보다 작은 임계 Marangoni 수(critical Marangoni number) Ma_c 또는 임계 Rayleigh 수 Ra_c 값을 가지는 것으로 나타났다. Ma_c 와 Ra_c 값이 작다는 것은 계가 더 쉽게 불안정해진다는 것을 의미하며 이는 탄성을 지닌 Oldroyd-B 유체가 뉴튼 유체보다 더 불안정하다는 것이다. 따라서 자연대류 임계 시점에서 발생하는 불안정성 형태는 과도안정성(overstability)에 기인한 진동성 거동(oscillatory motion)이 먼저 나타나게 된다. Fig. 4에는 파수 a 에 따른 σ_i 를 나타내었다. Lee 등[13]의 연구결과에서는 λ 와 ε 의 차에 따라 즉, 유체가 고분자의 특성이 강해짐에 따라 분기되는 점의 파수가 작아지게 된다. 따라서 파수가 작은 부분에서도 점탄성 유체의 특성이 나타나는 유체는 λ 와 ε 의 차가 큰 유체, 즉 고분자의 특성이 강한 유체에 대한 경우가 될 것으로 추측되어진다.

Fig. 5와 6은 각각 Bi 의 변화에 따른 임계 Marangoni 수와 임계 Rayleigh 수를 도시한 그림이다. Fig. 5에서 보면 Bi 가 증가함에 따라 Ma_c 값은 급격한 증가를 하고 있는데, 이것은 Bi 가 커질수록 계가 안정화된다는 것을

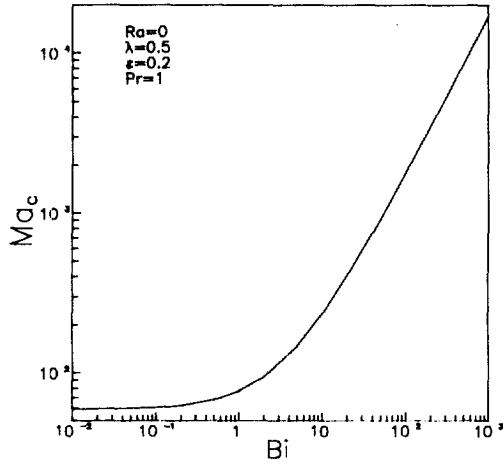


Fig. 5. Critical Marangoni number vs. Biot number.

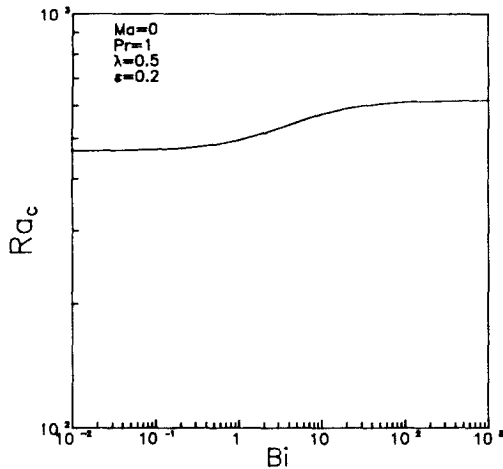
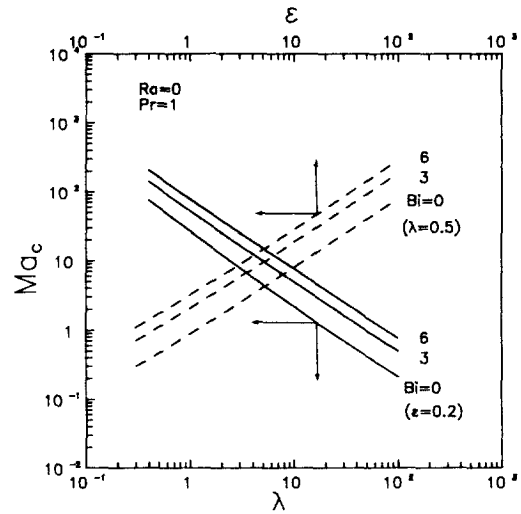
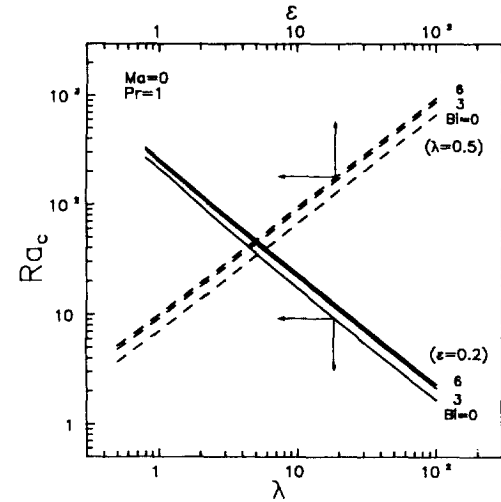


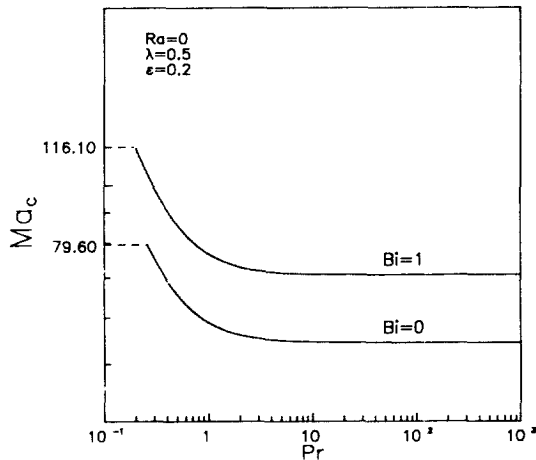
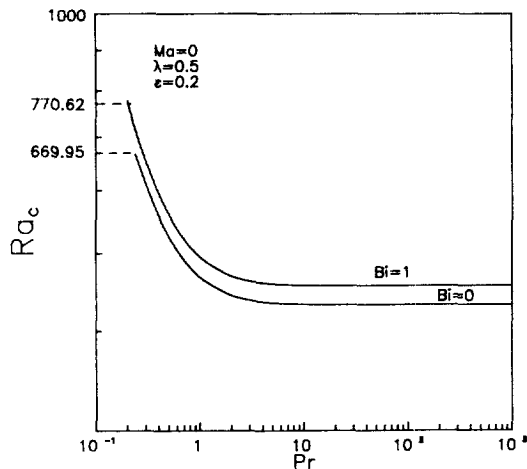
Fig. 6. Critical Rayleigh number vs. Biot number.

나타낸다. Bi가 커진다는 것은 열전달 측면에서 살펴보면 유체층의 표면에서 열전달이 잘 이루어져 표면에서의 온도 교란을 완화시켜주며 따라서 온도 교란에 따른 표면 장력 변화에 기인한 자연대류 발생 가능성을 줄여주기 때문에 계가 안정화된다고 볼 수 있다. Bi가 무한대가 되면 Ma_c 값도 무한대로 커지는데 이 때는 표면 장력에 기인하는 자연대류는 발생되지 않는 것을 의미한다. 왜냐하면 Bi가 무한대이면 표면의 모든 곳에서 온도가 일정하게 유지되어 온도 교란에 의한 표면 장력 변화가 발생하지 않기 때문이다. 또 한편으로는 표면에서의 열전달량이 일정하다고 가정하면 Bi 정의에 의해 유체층의 깊이 d 가 증가하면 Bi의 증가를 가져온다. 따라서 유체층의 깊이가 깊을수록 계가 안정화되어 표면 장력 변화

Fig. 7. Critical Marangoni number vs. λ and ε for $Ra=0$.Fig. 8. Critical Rayleigh number vs. λ and ε for $Ma=0$.

에 의한 대류 발생은 어려워진다고 볼 수 있다. Bi 변화에 따른 임계 Rayleigh 수는 대략 $0.1 < Bi < 100$ 인 중간영역에서 Bi에 대한 영향이 나타나고 있으며 Bi가 증가함에 따라 Ra_c 값도 증가하는 경향을 보여주어 Bi가 증가할수록 계가 안정해짐을 알 수 있다. 반면에 $Bi < 0.1$ 이나 $Bi > 100$ 인 영역에서는 Ra_c 값은 크게 변하지 않고 일정한 값으로 수렴하고 있으며 부력에 의해 발생하는 불안정성에는 더 이상 안정화 효과를 주지 않는 것으로 나타났다.

Fig. 7과 8은 각각 λ 와 ε 변화에 따른 임계 Marangoni 수와 임계 Rayleigh 수를 도시한 그림이다. 그림에서 보


 Fig. 9. Critical Marangoni number vs. Prandtl number for $Ra=0$.

 Fig. 10. Critical Rayleigh number vs. Prandtl number for $Ma=0$.

듯이 λ 는 값이 커질수록, ϵ 은 값이 작아질수록 Ma 와 Ra 값은 감소하는 경향을 나타내고 있으며 이는 계가 점점 불안정해된다는 것을 의미한다. 응력 이완 시간 λ 는 탄성(elasticity)에 관련된 항으로서 λ 가 커진다는 것은 외부 교란(external disturbance)을 빨리 이완시키지 못하고 불안정성 요인인 교란을 오래 잠재하고 있기 때문에 계가 불안정하게 된다. 변형 지연 시간 ϵ 는 점성에 관련된 항으로서 ϵ 이 작아질수록 변형되는 속도가 빨라지며 외부 교란에 대해 급격한 변화를 주게 되어 계가 불안정해진다고 볼 수 있다.

Fig. 9와 10은 Prandtl 수의 영향을 알아보기 위하여 Pr 변화에 따른 임계 Marangoni 수와 임계 Rayleigh 수

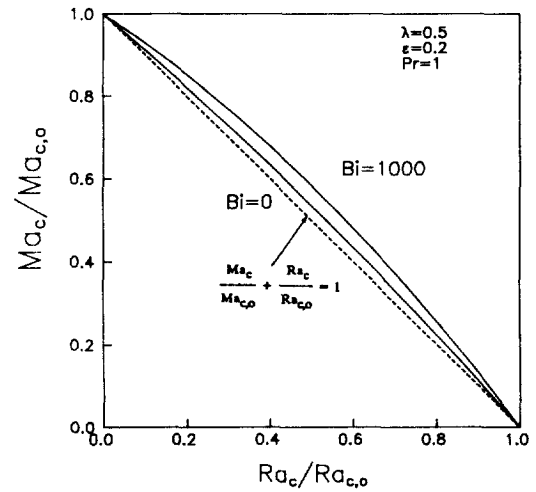


Fig. 11. Normalized critical Marangoni number vs. normalized critical Rayleigh number.

를 도시하였다. 대략 $Pr < 1$ 인 Pr이 작은 영역에서는 Pr 값이 작아질수록 Ma 와 Ra 값은 급격한 증가를 보이고 있다. 따라서 Pr이 작을수록 유체는 안정해지며 Pr 값이 약 100 이상이 되면 Ma 와 Ra 는 거의 일정하게 유지되며 Pr의 영향이 없는 것으로 나타나고 있다. 한편 뉴튼 유체의 경우에는 Pr 값에 무관하게 자연대류 임계 시점이 결정되는데[1, 2] 그림에서 파선으로 나타난 직선이 뉴튼 유체에 해당한다. Oldroyd-B 유체의 경우, Pr이 작아지면서 임계 Marangoni 수와 임계 Rayleigh 수가 증가하지만 그 값이 뉴튼 유체의 임계 Marangoni 수나 임계 Rayleigh 수보다 커지는 Pr 영역에서는 뉴튼 유체와 같이 Pr에 관계없이 자연대류 임계 시점이 결정된다.

불안정성의 요인들인 부력과 표면 장력 효과를 동시에 고려하기 위하여 Ra 값을 변화시키면서 임계 Marangoni 수를 결정하였다. 그 결과로써 Fig. 11에 규격화된 임계 Rayleigh 수가 $Ra_c/Ra_{c,0}$ 에 대해 규격화된 임계 Marangoni 수 $Ma_c/Ma_{c,0}$ 를 도시하였다. 여기서 $Ra_{c,0}$ 는 $Ma=0$ 일 때 임계 Rayleigh 수를 의미하고 $Ma_{c,0}$ 는 $Ra=0$ 일 때의 임계 Marangoni 수를 의미한다. 그림에서 보면 Ra 값이 증가함에 따라 Ma 값은 감소하고 있는데 이것은 부력에 의한 불안정성 요인이 커지면 적은 양의 표면 장력 변화로도 계가 불안정해질 수 있다는 것을 의미하며 그 반대의 경우도 마찬가지이다. 또한 그림에서 “ $Ra_c/Ra_{c,0} + Ma_c/Ma_{c,0} \approx 1$ ”이라는 것을 알 수 있는데 뉴튼 유체에 대해서 Nield[10]가 이미 위와 같은 관계식을 제의한 바 있으며 이로부터 근본적으로 다른 기구(mechanism)에 의해 불안정성을 유발하는 두 인자인 부력과 표면 장력이 서로 무관하지 않고 서로 강하게 결속되어 있다는 것

을 밝혔다. 다시 말하면 " $Ra_c/Ra_{c,0} + Ma_c/Ma_{c,0}$ " 값이 정확히 1은 아니므로 Marangoni 수가 감소하거나 증가하면 그 변화된 값은 크기(same order) 정도의 Rayleigh 수에 변화를 초래한다는 것이다. 한편 곡률 반경(curvature)이 작을수록 상대적으로 더 강하게 결속되어 있다고 할 수 있는데, Fig. 11에서 보면 Bi가 작을수록 결속도는 더 크게 나타나고 있으며 이는 Nield의 해석 결과도와 같은 경향을 보이고 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 아래로부터 서서히 가열되어 선형인 온도 분포를 가지는 수평 Oldroyd-B 유체층에서 선형 안정성 해석을 통하여 자연대류 임계 시점을 결정하였다. 본 연구에서는 계면에서 Biot 수의 변화에 대한 효과를 중점적으로 살펴보았는데 이번 결과에서는 기존 연구 결과 [10-13]와 마찬가지로 점탄성 유체인 Oldroyd-B 유체층이 뉴턴 유체층보다 더 불안정하며 자연대류 임계 시점에서 과도안정성에 기인한 진동성 거동이 발생함을 알 수 있었다. 본 연구 결과로부터 Biot 수 효과는 Bi값이 커질수록 임계 Marangoni 수나 임계 Rayleigh 수가 증가하여 계가 안정화되었으며, λ 는 커질수록 ε 은 작아질수록 유체층은 더 불안정해지는 것으로 나타났다. Pr 효과는 Pr이 작아질수록 Ma 와 Ra_c 값은 증가하였고 Pr이 100보다 커지면 Pr의 변화에 대한 계의 안정화 효과는 거의 없는 것으로 나타났다. 부력과 표면 장력 효과를 동시에 고려해 본 결과, Lee 등[13]의 연구와 같이 두 효과는 서로 무관하지 않고 상호 결속되어 있는 것으로 나타났다. 그리고 두 효과는 Biot 수가 작을수록 더 강하게 결속되어 있는 것으로 나타났다.

감 사

본 연구를 지원하여 준 (주)럭키에 심심한 사의를 표합니다.

사용기호

a	: dimensionless horizontal wave number
Bi	: Biot number
d	: fluid layer thickness [m]
D	: differential operator with respect to z
g	: gravitational acceleration constant [m/s^2]
h	: heat transfer coefficient [J/m^2sK]
i	: imaginary number
k	: conductivity [J/ms]

Ma	: Marangoni number
P	: pressure [N/m^2]
Pr	: Prandtl number
Ra	: Rayleigh number
T	: temperature [K]
t^*	: time [s]
t	: dimensionless time
V	: velocity vector [m/s]
U^*, V^*, W^*	: velocity component in Cartesian coordinates [m/s]
U, V, W	: dimensionless velocity component
x^*, y^*, z^*	: position in Cartesian coordinates [m]
x, y, z	: dimensionless position

그리스 문자

α	: thermal diffusivity [m^2/s]
β	: thermal expansion coefficient [K^{-1}]
Δ	: rate of deformation tensor
ε_s	: strain retardation time [s]
ε	: dimensionless strain retardation time
η_0	: dynamic viscosity [Kg/ms]
Θ	: dimensionless temperature
λ_s	: stress relaxation time [s]
λ	: dimensionless stress relaxation time
ν	: kinematic viscosity [m^2/s]
ρ	: density [Kg/m^3]
σ	: dimensionless growth rate
τ	: stress tensor

상첨자

T	: refers to transpose
▼	: refers to upper convective derivative

하첨자

o	: refers to unperturbed state
c	: refers to critical state
r	: refers to real part
i	: refers to imaginary part
1	: refers to disturbed state

참고문헌

1. Chandrasekhar, S.: "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", Oxford Univ. Press, London, 1961.
2. Lord Rayleigh: *Phil. Mag.*, **32**, 529(1916).
3. Pearson, J. R. A.: *J. Fluid Mech.*, **4**, 489(1958).
4. Benard, H.: *Ann. Chem. Phys.*, **23**, 62(1901).
5. Nield, D. A.: *J. Fluid Mech.*, **19**, 341(1964).

6. Beard, D. W., Davies, M. H. and Walters, K. : *J. Fluid Mech.*, **24**, 321(1966).
7. Vest, C. M. and Arpaci, V. S. : *J. Fluid Mech.*, **36**, 613(1969).
8. Herbert, D. M. : *J. Fluid Mech.*, **17**, 353(1963).
9. Tanner, R. I. and Sokolov, M. : *Phys. Fluids*, **15**, 534(1972).
10. Rosenblat, S. : *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **21**, 201(1986).
11. Kolkka, R. W. and Ierley, G. R. : *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **25**, 209(1987).
12. Lebon, G. and Cloot, A. : *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **28**, 61(1988).
13. Lee, G. J., Choi, C. K. and Kim, M. C. : Proc. 1st Int. Conf. on Transport Phenomena in Processing, Technomic Pub., Lancaster, Penn., pp. 774-784, 1993.
14. Oldroyd, J. G. : *Proc. Roy. Soc. A*, **245**, 278(1958).
15. Cloot, A. and Lebon, G. : *J. Fluid Mech.*, **145**, 447 (1984).
16. Sparrow, E. R., Goldstein, R. J. and Jonsson, V. K. : *J. Fluid Mech.*, **18**, 513(1964).
17. Chen, K. and Chen, M. M. : *J. Heat Transfer*, **106**, 284(1984).
18. Chen, K. : "Thermal Instability of Wedge Flows", Ph. D. Thesis, Univ. of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois(1981).
19. Chen, K., Chen, M. M. and Shon, C. W. : *J. Fluid Mech.*, **132**, 49(1983).