

내부 열원에 의해 가열되는 수평 다공질 유체층에서의 부력에 의한 자연대류 발생 및 열전달 상관관계

김민찬 · 윤도영* · 최창균**

제주대학교 공과대학 화학공학과

*광운대학교 공과대학 화학공학과

**서울대학교 공과대학 화학공학과

(1993년 7월 28일 접수, 1993년 11월 24일 채택)

Onset of Buoyancy-Driven Convection and Heat Transfer Correlation in Internally Heated Horizontal Porous Layers

Min Chan Kim, Do Young Yoon* and Chang Kyun Choi**

Dept. of Chem. Eng., College of Eng., Cheju National University, Cheju 690-756,

*Kwangwoon University, Seoul 139-701

**Seoul National University, Seoul 151-742

(Received 28 July 1993; accepted 24 November 1993)

요 약

유체로 포화되어 있는 초기 정지상태의 수평 다공 매질층이 내부 열원에 의해 가열될 때, 시간 의존형 온도분포 하에서 부력에 의한 열적 불안정성 문제를 이론적으로 해석하였다. 유동현상을 해석하기 위하여 Darcy 법칙을 사용하였으며, 안정성 해석은 선형 안정성 이론과 안정성 교환 원리하에서 열 침투깊이를 새로운 길이차원으로 하는 전파이론을 적용하여 행하였다. 본 연구에서 고려되는 계에서 부력에 의한 대류 발생시점은 Darcy-Rayleigh수에 의하여 결정되었으며, Darcy-Rayleigh수가 클수록 자연대류는 빨리 발생함을 알 수 있었다. 또, 자연대류 발생 임계 시점을 근거로 열전달 상관식을 유도하여 기존의 실험결과를 합리적으로 설명하였다.

Abstract—A theoretical analysis of thermal instability driven by buoyant forces under transient temperature fields is conducted in an initially quiescent, fluid-saturated, horizontal porous layer. Darcy's law is used to explain characteristics of fluid motion and linear theory is employed. Under the principle of exchange of stabilities, the stability analysis is conducted by using propagation theory which adopts the thermal penetration depth as a characteristic length scaling factor. The critical condition of onset of buoyancy-driven natural convection is governed by the Darcy-Rayleigh number, as expected. It is shown that the larger Darcy-Rayleigh number becomes, the earlier convective motion sets in. Based on the present critical condition to the onset of natural convection, a new heat transfer correlation is proposed. The prediction agrees well with experimental results.

1. 서 론

부력에 의하여 발생하는 자연대류는 잘 알려진 자연

현상이다. 관련된 연구는 금세기초의 Benard[1]의 실험과 Rayleigh[2]의 이론적 해석을 통하여 체계화되었다. 이러한 배경에서 부력에 의하여 유발되는 자연대

류를 Benard-Rayleigh 대류라 하고 최근까지도 이에 대한 연구가 계속되고 있다.

Benard와 Rayleigh의 균질 유체층에서의 자연대류에 대한 연구의 확장으로 Horton과 Rogers[3], Lapwood[4]는 다공질 매질층에서 부력에 의한 자연대류 발생에 대한 연구를 진행하였다. 그들은 다공질 매질층에서의 유동 방정식으로 Darcy 법칙을 사용하여, 자연대류 발생에 Darcy 수가 미치는 영향에 대하여 고찰하였다. Katto와 Masuoka[5]는 실험을 통하여 다공질 매질층에서 자연대류 발생 임계조건의 결정에 Darcy 수의 역할을 보고한 바 있다. 그들의 실험결과에 의하면 Darcy 수는 10^{-4} -1의 범위에서 자연대류 발생 임계조건의 결정에 중요한 역할을 하였다.

위에서 언급된 연구결과들은 온도분포가 선형인 경우, 즉 온도 구배가 시간 및 거리에 무관한 경우이다. 그러나, 실제계에서는 급격한 가열 및 다양한 가열조건에 의해 온도분포의 비선형성이 나타나게 된다. 특히 급격한 가열에 의하여 발생하는 시간 의존형의 비선형 온도분포하에서 자연대류 발생 조건을 해석하고자 증폭이론(amplification theory)[6], 에너지 법(energy method)[7], 추계모델(stochastic model)[8], 전파이론(propagation theory)[9] 등이 개발되었다. 이 중에서 본 연구에서 사용하는 전파이론은 열 침투 깊이를 길이 차원으로 하는 결정론적 방법으로 밀면이 가열되는 초기 정지 상태의 균질 유체층 및 다공성 매질층[10, 11], 층류 강제대류 및 자연대류 유동[12, 13]에서 해석한 결과들은 기존의 실험결과들을 합리적으로 설명하였다.

부력에 의하여 발생하는 자연대류 문제에서 자연대류 발생 임계조건과 더불어 또 다른 관심은 자연대류가 전달특성에 미치는 영향에 대한 것이다. 이에 대해서는 Stuart[14]의 형태가정(shape assumption)을 이용한 해석, Landau[15]의 멱급수 적분 형태의 해석이 진행되어 왔다. 또한 Howard[16]는 완전히 전개된 난류상태에서의 전달특성은 안정성 조건과 밀접한 관련이 있다는 경계층 불안정성 모델(boundary-layer instability model)을 제시하였다. 그후 Long[17]과 Cheung[18]은 Howard의 개념을 기초로 크기 위수 해석을 하여 부력에 의한 자연대류가 전달특성에 미치는 영향에 대한 연구를 진행하여 반이론적인 전달상관식을 유도하였다. 위의 연구결과를 종합하여 Choi 등[19-21]과 Kim[22]은 다양한 계에서 자연대류가 전달특성에 미치는 영향에 대한 연구를 진행하여 Rayleigh수의 전범위에 걸쳐 사용할 수 있는 전달 상관식을 구하였다.

본 연구에서는 밀면이 단열로 유지되고 있고, 윗면이 등온으로 유지되고 있는 수평 다공질 매질층이 내부

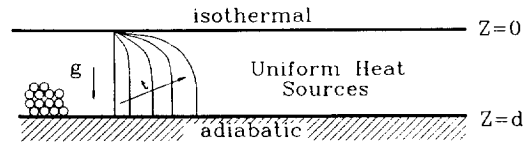


Fig. 1. Schematic diagram of system considered.

열원에 의해 가열될 때 시간 의존형의 비선형 온도분포하에서 자연대류 발생 임계시점을 전파이론을 적용하여 해석하게 된다. 또한 전파이론을 적용하여 얻은 자연대류 발생조건을 근거로 열전달 상관식을 유도하고 이를 기존의 실험결과와 비교하여 그 타당성을 검증하고자 한다.

2. 안정성 해석

2-1. 지배 방정식

본 연구에서는 Fig.1에 나타나 있는 수평 다공질 매질층을 기본계로 설정하였다. 다공질 매질층에서의 유동현상을 해석하기 위하여 여러 유동 모델들이 제안되었으나, 본 연구에서는 가장 기본이 되는 Darcy 법칙을 유동 모델로 채택하였다. Darcy 법칙하에서, 본 연구에서 고려되는 계를 지배할 기본 방정식은 아래와 같다.

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\mu}{K} \mathbf{U} = -\nabla P + \rho \mathbf{g} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T + \frac{S}{\rho C_p} \quad (3)$$

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (4)$$

여기서 \mathbf{U} , ρ , P , μ , S , C_p , K , T , α , β 는 각각 속도벡터, 밀도, 압력, 점도, 발열속도, 유효 열용량, 다공성 매질의 투과도, 온도, 유효 열확산 계수, 부피 팽창 계수를 나타내고 하첨자 "0"은 기준상태를 나타낸다. 식 (1)은 잘 알려진 비압축성 유체에서의 연속 방정식이고, 식 (2)는 Darcy 법칙하에서의 유동 방정식이며, 식 (3)은 Katto와 Masuoka[5]에 의해 유도된 에너지 방정식이다. 또 식 (4)는 부력항의 밀도 변화만을 고려하는 Boussinesq 가정을 나타내는 식이다.

2-2. 기본계

Fig.1에 보이는 바와 같이 초기 T_0 로 유지되고 있는 수평 다공질 매질층에서 시간 $t=0$ 에서 유체층 내부에서 S 라는 발열속도로 열을 방출한다고 하자. 이러한 계에서

자연대류가 발생하기 전의 온도분포는 아래와 같은 식에 의하여 지배된다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} + \frac{S}{\rho C_p} \quad (5)$$

$$\text{I.C.} \quad T(0, Z) = T_i \quad (6a)$$

$$\text{B.C.'s} \quad T(t, 0) = T_i \quad (6b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial Z}(t, d) = 0 \quad (6c)$$

위의 식을 α/d^2 , d , $S/(2\rho C_p)$ 를 각각 시간, 거리, 온도에 대한 무차원 척도로 사용하여 무차원화시키면 아래와 같은 무차원화된 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} + 2 \quad (7)$$

$$\text{I.C.} \quad \theta_0(0, z) = 0 \quad (8a)$$

$$\text{B.C.'s} \quad \theta_0(\tau, 0) = 0 \quad (8b)$$

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial z}(\tau, 1) = 0 \quad (8c)$$

위 식을 잘 알려진 변수 분리법을 사용하여 풀면 무차원 온도분포는 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$\theta_0 = z(2-z) - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin\left[\frac{(2n+1)\pi z}{2}\right] \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \tau}{4}\right] \quad (9)$$

본 연구에서는 급격한 가열에 의해 온도분포의 시간 의존형 비선형성이 심한 경우의 자연대류 현상에 관심이 있으므로 온도분포의 비선형성이 심한 경우인 $\tau \leq 0.1$ 인 영역에서는 deep-pool 가정을 사용하여 아래와 같이 온도분포식을 변환할 수 있다.

$$\frac{d^2 \theta_0^*}{d\zeta^2} = -\frac{\zeta}{2} \frac{d\theta_0^*}{d\zeta} + \theta_0^* - 2 \quad (10)$$

$$\text{B.C.'s} \quad \theta_0^* = 0 \quad \text{at } \zeta = 0 \quad (11a)$$

$$\frac{d\theta_0^*}{d\zeta} = 0 \quad \text{as } \zeta \rightarrow \infty \quad (11b)$$

여기서 $\theta_0^* = \theta_0/\tau$, $\zeta = z/\tau^{1/2}$ 이다. 위의 식은 shooting 방법을 이용한 수치 해석적 방법으로 쉽게 풀 수 있다. 식 (9)에 의하여 나타내어지는 변수 분리법을 사용하여 얻어진 온도분포와 deep-pool 가정하에서 유사변수를 사용하여 얻어진 온도분포를 비교한 것이 Fig. 2에 나

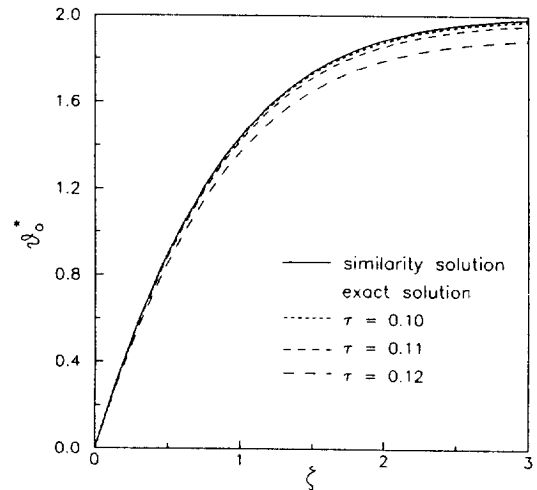


Fig. 2. Comparison of basic temperature profiles. The similarity solution is obtained under the deep-pool approximation.

타나 있다. 그림에서 보듯이 변수 분리법에 의한 해와 유사변수 해가 $\tau \leq 0.1$ 에서 잘 일치함을 알 수 있다.

2-3. 교란 방정식

자연대류 발생점을 해석하기 위하여 잘 알려진 선형 안정성 이론을 사용하여 속도, 온도, 압력의 물리량을 아래와 같이 교란량의 합으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} U &= \bar{U}_1 \\ T &= T_0 + T_1 \\ P &= P_0 + P_1 \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 하첨자 "0"과 "1"은 각각 기본량과 교란량을 나타낸다. 선형 안정성 이론에서는 교란량들이 급격히 자라나기 시작하는 점을 자연대류 발생 임계시점을 나타낸다. 교란량들의 거동을 지배할 방정식을 얻기 위하여 위의 물리량을 앞의 식 (1)-(3)에 대입하고 기본량들에 의하여 만족되는 부분을 제외하고 선형화하면 아래와 같은 교란방정식을 얻을 수 있다.

$$\nabla \cdot \bar{U}_1 = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\mu}{K} \bar{U}_1 = -\nabla P_1 + \rho g \beta T_1 \bar{k} \quad (14)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T_1 + W_1 \frac{\partial T_0}{\partial Z} \quad (15)$$

이 때 적절한 경계조건은 다음과 같다.

$$\bar{U}_1 = T_1 = 0 \quad \text{at } Z = 0 \quad (16a)$$

$$\bar{U}_1 = \frac{\partial T_1}{\partial Z} = 0 \quad \text{at } Z=1 \quad (16b)$$

식 (14)에 컬(curl)을 두 번 취하고, α/d , $\alpha\nu/(g\beta d^3)$ 을 속도교란, 온도교란의 무차원 척도로 도입하면 아래와 같은 무차원화된 교란 방정식을 얻을 수 있다.

$$\bar{\nabla}^2 w_1 = Da \bar{\nabla}_1^2 \theta_1 \quad (17)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + Ra w_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = \bar{\nabla}^2 \theta_1 \quad (18)$$

여기서 $\bar{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 이고 $\bar{\nabla}_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 이다. 위의 무차원화 과정에서 온도교란의 무차원화 척도가 기본온도와 다른 점에 주목할 만하다. 이와 같은 무차원화 척도는 온도교란이 온도차에 무관하고 유체층의 물리적 성질에만 의존함을 의미하며, Foster[6]에 의해 사용된 형태이다. Da, Ra는 각각 Darcy 수, Rayleigh 수로 아래와 같이 정의되는 무차원 수이다.

$$Da = \frac{K}{d^2}, \quad Ra = \frac{g\beta S d^5}{2k\alpha\nu} \quad (19)$$

Darcy 법칙이 적용되는 경우, 즉 $Da \rightarrow 0$ 인 경우에 온도교란을 새로이 규격화하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\bar{\nabla}^2 w_1 = \bar{\nabla}_1^2 \theta_1 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + Ra_D \frac{\partial \theta_0}{\partial z} w_1 = \bar{\nabla}^2 \theta_1 \quad (21)$$

여기서 Ra_D 는 Darcy-Rayleigh 수로 아래와 같이 정의된다.

$$Ra_D = Ra \cdot Da \quad (22)$$

2-4. 전파이론

시간 의존형 온도분포를 갖는 계에서의 자연대류 발생시점을 해석하기 위하여 여러 가지 방법들이 제안되어 왔으나 Foster[6]에 의하여 제안된 증폭이론이 보편적으로 사용되어 왔다. 증폭이론에서는 2-3절의 지배 방정식과 경계조건에서 부족한 초기조건을 임의로 "white noise" 형태로 가정하여 초기치-경계치 문제로 전환한 다음 이 교란들이 어느 정도 성장한 때를 자연대류 발생점으로 삼는다. 그러나, 이 방법은 초기조건의 설정과 증폭률의 결정에 임의성을 내포하는 방법이다. 이러한 임의성을 극복하기 위하여 Choi 등[9]은 열 침투 깊이를 새로운 길이차원으로 하여 교란량들을 유사변환하는 전파이론을 제안하여 여러 계에서 자연대류 발생점을

해석하였다. 본 연구에서 고려되는 계에서 열 침투 깊이는 밑면의 온도의 1%가 되는 깊이로 $\tau \leq 0.1$ 인 영역에서는 열 침투 깊이 δ 는 $\delta = 2.90 \tau^{1/2} d$ 로 나타내어진다.

열 침투 깊이를 새로운 길이 차원으로 하면, $\zeta = z/\sqrt{\tau}$ 를 새로운 수직방향으로의 거리를 나타내는 무차원 변수로 사용할 수 있다. 즉, ζ 는 z 와 τ 를 동시에 포함하는 유사변수 구실을 한다. 이와 같은 배경하에 각 교란량들은 아래와 같이 변환한다.

$$[w_1(\tau, x, y, z), \theta_1(\tau, x, y, z)] \\ = [\tau w^*(\zeta), \theta^*(\zeta)] \exp(ia_x x + ia_y y) \quad (23)$$

여기서 i 는 허수부, a_x, a_y 는 각각 x, y 방향으로의 주기성을 나타내는 무차원 수평 파수이다.

안정성 교환의 원리(principle of exchange of stabilities)가 성립한다는 가정하에 식 (23)을 지배 방정식인 식 (20)-(21)에 대입하면 아래와 같은 안정성 방정식을 얻을 수 있다.

$$(D^2 - a^{*2})w^* = -a^{*2}\theta^* \quad (24)$$

$$(D^2 - a^{*2})\theta^* = -\frac{1}{2}\zeta D\theta^* + Ra_D^* w^* D\theta_0^* \quad (25)$$

경계조건은 아래와 같이 변형된다.

$$\theta^* = w^* = 0 \quad \text{at } \zeta = 0 \quad (26)$$

$$D\theta^* = w^* = 0 \quad \text{for } \zeta \rightarrow \infty \quad (27)$$

여기서 $D = \frac{d}{d\zeta}$, $a^* = a\tau^{1/2}$, $Ra_D^* = Ra_D \tau$ 이며 $a = (a_x^2 + a_y^2)^{1/2}$ 이다. a^* 와 Ra_D^* 는 각각 열 침투 깊이를 새로운 길이 차원으로 하는 변형된 무차원 파수와 Darcy-Rayleigh 수이다. a^* 와 Ra_D^* 에 시간항이 포함되어 있으나 전파이론에서는 이들을 상수로 놓는다. 이의 타당성은 많은 실험적 결과들로부터 유추할 수 있다[23-25].

2-5. 안정성 방정식의 해법

위에서 유도된 안정성 방정식은 주어진 경계조건하에서 고유치인 a^* 와 Ra_D^* 를 찾는 고유치 문제이다. 본 연구에서는 이와 같은 고유치 문제를 풀기 위하여 경계치 문제를 초기치 문제화하는 shooting 방법을 사용하였다. 즉, 임의의 a^* 에 대하여 $\zeta=0$ 에서의 초기조건 $D\theta^*(0)$ 와 고유치 Ra_D^* 를 가정하고, 고유치 문제의 특성을 이용하여 $Dw^*(0)=1$ 로 고정하여 고유벡터를 정규화하면 이 문제는 완전히 정의된 초기치 문제가 된다. 한편 $\zeta \rightarrow \infty$ 로 주어진 위 경계면을 수치적으로 다루기는 매우 까다롭기 때문에 ζ 를 임의의 큰 값으로 고정하여 계산을 수행한 후, 이를 토대로 $\zeta \rightarrow \infty$ 로 외삽하여 고

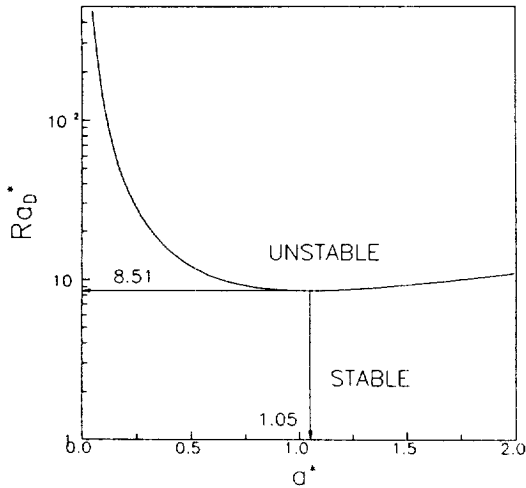


Fig. 3. Marginal stability curve. The arrow indicates the critical conditions.

유치를 구하는 방법을 사용한다. 앞에서 가정된 초기치를 사용하여 Runge-Kutta-Gill 4차 방법을 적분방법으로 하여 가상의 위 경계면까지 적분한다. 이러한 과정을 통하여 얻어진 값들이 위 경계면에서의 경계조건을 만족시키지 못하면 Newton-Raphson 방법을 사용하여 초기치 $D\theta^*(0)$ 와 고유치 Ra_D^* 를 수정하여 위 과정을 반복하여 위 경계면에서의 경계조건을 만족시킨다.

2-6. 안정성 해석결과

위에서 언급된 해법을 사용하여 한계안정성 곡선을 얻으면 Fig. 3과 같다. Fig. 3의 한계안정성 곡선의 위 부분은 자연대류가 항상 발생하는 불안정한 영역이고, 곡선의 밑 부분은 자연대류가 발생하지 않는 안정한 영역이다. 이 곡선의 최소값이 자연대류 발생 임계조건을 나타낸다. 그림에서 보듯이 자연대류 발생 임계조건은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$Ra_{D,c}^* = 8.51, \quad a^* = 1.05 \quad (28)$$

3. 열전달 상관식

Howard[16]는 완전히 전개된 난류의 경우에 열전달은 가열면 근처의 얇은 영역에 의해 지배된다는 경계층 불안정성 모델을 제시하였다. 또 Long[17]과 Cheung[18]은 Howard의 결과를 기초로 하고 크기 위수 해석을 통하여 Rayleigh 수와 Nusselt 수를 나타내는 모델을 제시하였다. Yoon[11]은 Long과 Cheung의 해

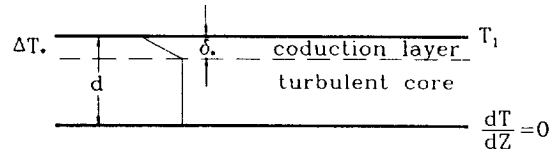


Fig. 4. Schematic diagram of turbulent heat transport model. ΔT^* is the temperature difference over δ^* .

석을 다공성 매질층으로 확장한다. Yoon의 해석결과를 이용하면, 본 연구에서 고려되는 계에서의 열전달 상관식은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$Nu = \frac{A Ra_D^{1/2}}{1 - B Ra_D^{-1/6}} \quad (29)$$

여기서 Nu는 Nusselt 수로 아래와 같이 정의된다.

$$Nu = \frac{Sd^2}{2k\Delta T} \quad (30)$$

식 (30)에는 결정되지 않은 상수 A, B가 있다. 따라서 완전한 열전달 상관식을 얻기 위하여서는 두 점에서의 열전달 상관관계가 필요하다.

우선, $Ra_D \rightarrow \infty$ 인 완전히 전개된 난류 상태에서의 열전달 상관관계에 대하여 살펴보자. Howard[16]는 Rayleigh 수가 매우 큰 경우에 열전달은 가열면 근처의 경계층에 의하여 좌우되며, 이러한 경계층의 깊이는 자연대류 발생점에서의 열 침투 깊이와 같다는 경계층 불안정성 모델을 제시하였다. Howard의 개념을 본 연구에서 고려되는 계로 확장한 것이 Fig. 4에 나타나 있다. Howard의 개념을 이용하면 아래와 같은 열전달 상관식을 얻을 수 있다.

$$Nu = \frac{1}{2} \frac{d}{\delta^*} \quad \text{for } Ra_D \rightarrow \infty \quad (31)$$

여기서 δ^* 는 경계층 불안정성 모델에서 전도층 두께로 자연대류 발생점에서의 열 침투 깊이 δ 로 대치할 수 있다. 따라서 식 (31)은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$Nu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{Ra_D}{Ra_s} \right)^{1/2} \quad \text{for } Ra_D \rightarrow \infty \quad (32)$$

여기서 Ra_s 는 아래와 같이 정의된다.

$$Ra_s = \frac{Kg\beta\Delta T\delta}{\alpha\nu} \quad (33)$$

자연대류가 발생하기 전의 기본 온도분포로부터 아래와 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\Delta T = 2 \frac{St}{k} \quad (34)$$

따라서 Ra_b 는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$Ra_b = \frac{2Kg\beta St\delta}{k\alpha\nu} \quad (35)$$

앞의 안정성 해석결과인 식 (28)과 $\delta = 2.90\tau^{1/2}d$ 라는 관계로부터 Ra_b 는 아래와 같이 주어진다.

$$Ra_b = 49.387 \quad (36)$$

결과적으로 식 (32)에서 완전히 전개된 난류 상태에서 열전달 상관식은 다음과 같이 주어진다.

$$Nu = 0.1006Ra_b^{1/2} \quad \text{for } Ra_b \rightarrow \infty \quad (37)$$

또 다른 하나의 열전달 상관식은 온도분포가 정상상태를 보이는 경우, 즉 자연대류 발생 임계 Rayleigh 수가 최소인 경우에 얻을 수 있다. 온도분포가 정상상태를 보이는 경우, 자연대류 발생 임계 Rayleigh 수는 아래와 같이 주어진다[26].

$$Ra_{D,c} = 30.933 \quad \text{for } \tau \rightarrow \infty \quad (38)$$

$Ra_D \rightarrow 30.933$ 경우에는 Rayleigh 수의 변화에 따른 Nusselt 수의 변화를 형태가정(shape assumption)을 사용하여 구하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{Nu} = 1 - \frac{\Gamma}{Ra_D} (Ra_D - Ra_{D,c}) \quad (39)$$

여기서 Γ 는 온도분포가 정상상태를 보이는 경우, 자연대류 발생점에서의 교란의 분포로부터 얻을 수 있으며 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Gamma = \frac{\int_0^1 (1-z) w_1 \theta_1 dz \int_0^1 w_1 \theta_1 dz}{\int_0^1 (w_1 \theta_1)^2 dz} = 0.6932 \quad (40)$$

따라서, 식 (39)와 (40)으로부터 아래와 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\left. \frac{dNu}{dRa_D} \right|_{Ra_D \rightarrow 30.933} = \frac{0.6932}{30.933} = 2.241 \times 10^{-2} \quad (41)$$

위의 두 조건, 식 (37)과 (41)을 식 (29)에 대입하고 $Ra_D = 30.933$ 일 때 $Nu \equiv 1$ 를 보장하기 위하여 식 (29)를 약간 변형하면 아래와 같은 열전달 상관식을 얻을 수 있다.

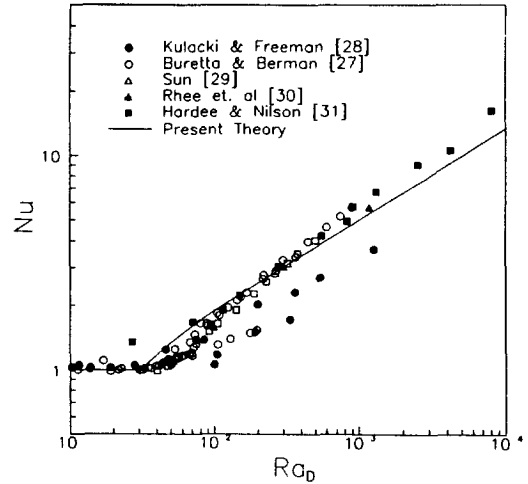


Fig. 5. Comparison of present heat transfer correlation and existing experimental data.

$$Nu = 1 + \frac{0.1006(Ra_D^{1/2} - 30.933^{1/2})}{1 - 1.067Ra_D^{-1/6}} \quad (42)$$

식 (41)을 기존의 실험결과와 비교한 것이 Fig. 5에 나타나 있다. 그림에서 Buretta와 Burman[27]의 실험결과는 Ra_D 가 작은 영역에서 분기(bifurcation)가 일어남을 볼 수 있으며, Kulacki와 Freeman[28]의 결과는 본 연구결과와 약간의 차이를 보이나 나머지 결과들은 본 연구에서 얻어진 상관식과 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 수평 다공질 유체층에서 급격한 내부 가열에 의해 시간 의존형 온도분포를 갖는 경우에 부력에 의하여 유발되는 자연대류 발생 임계조건을 전파 이론을 적용하여 해석하였다. 해석결과 자연대류는 Rayleigh 수와 Darcy 수가 커질수록 빨리 발생함을 알 수 있었다. 또, 전파이론을 적용하여 얻은 자연대류 발생 임계 시점과 경계층 불안정성 이론을 근거로 완전히 전개된 난류상태에 적용할 수 있는 열전달 상관식을 구하였다. 완전히 전개된 난류상태의 열전달 상관관계와 자연대류 발생을 나타내는 임계 Rayleigh 수가 최소값인 30.933 근처에서 형태가정을 사용하여 얻어진 열전달 상관관계를 근거로 Rayleigh 수 전범위에 걸쳐 적용할 수 있는 열전달 상관식을 얻었다. 이 열전달 상관식은 기존의 실험결과를 잘 설명해 주었다.

감 사

본 연구를 지원하여 준 한국학술진흥재단에 감사드립니다.

사용기호

A, B : undetermined constants used in Eq. (29)
 a : dimensionless wave number
 C_p : heat capacity
 Da : Darcy number
 d : fluid depth
 \vec{g} : gravitational acceleration constant
 K : permeability
 k : thermal conductivity
 \vec{k} : unit vector in z-direction
 T : temperature
 ΔT : temperature difference
 Nu : Nusselt number
 Ra : Rayleigh number
 Ra_D : Darcy-Rayleigh number (= RaDa)
 S : heat generation rate
 \vec{U} : velocity vector
 w : dimensionless velocity component of z-direction
 X, Y, Z: position in Cartesian coordinates
 x, y, z : dimensionless position in Cartesian coordinates

그리스 문자

α : thermal diffusivity
 β : thermal expansion coefficient
 Γ : constant used in Eqs. (39) and (40)
 δ : thermal penetration depth
 δ^* : conduction layer thickness
 θ : dimensionless temperature
 τ : dimensionless time
 ζ : dimensionless similarity variable ($= z/\sqrt{\tau}$)

상첨자

* : amplitude function for perturbation quantities

하첨자

i : initial state
 0 : basic state
 1 : disturbed state
 c : critical state

참고문헌

1. Benard, H.: *Ann. Chem. Phys.*, **23**, 62(1901).
2. Lord Rayleigh: *Philos. Mag.*, **32**, 529(1916).
3. Horton, C. W. and Rogers, F. T.: *Appl. Phys.*, **16**, 367(1945).
4. Lapwood, E. R.: *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **44**, 508 (1948).
5. Katto, Y. and Matsuoka, T.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **10**, 297(1967).
6. Foster, T. D.: *Phys. Fluid*, **8**, 1249(1965).
7. Wankat, P. C. and Homsy, G. M.: *Phys. Fluid*, **20**, 1200(1977).
8. Jhavary, B. S. and Homsy, G. M.: *J. Fluid Mech.*, **114**, 251(1982).
9. Choi, C. K., Shin, C. B. and Hwang, S. T.: Proc. 8th Int. Heat Transfer Conf., San Fransisco, Vol. 3, 1389(1986).
10. Lee, J. D., Choi, C. K. and Shin, C. B.: *Int. Chem. Eng.*, **30**, 761(1988).
11. Yoon, D. Y.: Ph.D. Thesis, Seoul National University, Seoul, Korea(1990).
12. Kim, M. C., Choi, C. K. and Davis, E. J.: *Int. J. Eng. Fluid Mech.*, **3**, 71(1990).
13. Chun, Y. H. and Choi, C. K.: *Hwahak Konghak*, **29**, 381(1991).
14. Stuart, J. T.: *J. Fluid Mech.*, **18**, 481(1964).
15. Landau, L. D. and Lifshitz, E. M.: "Fluid Mechanics", Pergamon Press, Oxford, England(1959).
16. Howard, L. N.: Proc. 11th Int. Congress Appl. Mech., Munich, 1109(1964).
17. Long, R. R.: *J. Fluid Mech.*, **73**, 445(1976).
18. Cheung, F. B.: *J. Fluid Mech.*, **97**, 734(1980).
19. Choi, C. K., Lee, J. D., Hwang, S. T. and Yoo, J. S.: "Frontiers on Fluid Mechanics (ed. by Shen Yuen)", Pergamon Press, Oxford, England, 1193 (1988).
20. Yoon, D. Y. and Choi, C. K.: *Korean J. Chem. Eng.*, **6**, 144(1989).
21. Choi, C. K., Jang, C. S., Kim, M. C. and Yoon, D. Y.: "Heat Transfer: 3rd UK National Conference Incorporating 1st European Conference on Thermal Science", I. Chem. E., England, 467(1992).
22. Kim, M. C.: Ph.D. Thesis, Seoul National Univ., Seoul, Korea(1992).
23. Davenport, I. F. and King, C. J.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **17**, 69(1974).
24. Foster, T. D.: *Phys. Fluid*, **12**, 2482(1969).

25. Kaviany, M.: *J. Heat Transfer*, **106**, 817(1984).
26. Tveitereid, M.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **20**, 1045 (1977).
27. Buretta, R. J. and Berman, A. S.: *J. Appl. Mech.*, **98**, 249(1976).
28. Kulacki, F. A. and Freeman, R. G.: *J. Heat Transfer*, **101**, 169(1979).
29. Sun, W.: Ph. D. Thesis, University of Minnesota (1973).
30. Rhee, S. J., Dhir, V. K. and Catton, I.: *J. Heat Transfer*, **100**, 78(1978).
31. Hardee, H. C. and Nilson, R. H.: *Nucl. Sci. Eng.*, **63**, 119(1977).