

단 신

만기일 불이익을 갖는 다제품 생산용 회분식 공정의 스케줄링을 위한 혼합 정수 비선형 모델

이호경 · 김민석 · 이인범[†]

지능자동화연구센터, 포항공과대학교 화학공학과
(1995년 6월 21일 접수, 1995년 9월 7일 채택)

Mixed Integer Nonlinear Model for the Scheduling of Multiproduct Batch Processes with Due-Date Penalties

Ho-Kyung Lee, Minseok Kim and In-Beum Lee[†]

Automation Research Center, Dept. of Chemical Eng.,
Pohang University of Science and Technology, Pohang 790-784, Korea
(Received 21 June 1995; accepted 7 September 1995)

요 약

본 연구에서는 혼합 정수 비선형 모델(mixed integer nonlinear model)을 이용하여 만기일을 넘길 때의 불이익을 고려하는 다제품 생산용 회분식 공정에서의 스케줄링 문제를 다룬다. 지금까지는 중간 저장 탱크의 UIS(Unlimited Intermediate Storage) 정책을 가지고 만기일이 넘었을 때의 불이익을 고려하는 스케줄링 문제를 경험적인 법칙을 추가한 BAB(Branch and Bound)과 SA(Simulated Annealing) 방법을 이용해서 다루었으나 본 논문에서는 UIS 뿐만 아니라 NIS(No Intermediate Storage)의 경우와 만기일보다 일찍 생산된 경우의 불이익도 함께 고려한다.

Abstract—Using a mixed integer nonlinear model, we deal with the problem of scheduling in multiproduct batch processes with due-date penalties. So far this problem was treated for an unlimited intermediate storage policy using a BAB(Branch and Bound) and a SA(Simulated Annealing) method with heuristic algorithms. In this paper, we consider both tardiness and earliness penalties and no intermediate storage as well as unlimited intermediate storage policy.

Key words: Mixed Integer Nonlinear Model, Scheduling, Due-date, UIS, NIS

1. 서 론

지금까지 발표되었던 스케줄링에 관한 논문들은 대부분이 전체 생산 시간(makespan)을 최소화하는 것을 목적 함수로 정하고 문제를 풀었다. 그러나, 생산 현장에서는 소비자의 만족을 높이기 위해서 만기일(due-date)까지 제품을 생산하고 최종 소비자까지 배달하는 것이 더 중요한 문제이다. 만기일을 맞추지 못한 늦은 배달로 인한 공장의 신용도 추락은 거래처 상실 등의 심각한 문제로 다가올 수 있기 때문이다. Ku와 Karimi[3, 4]는 다제품 생산용 회분식 공장에 대해 만기일을 맞추지 못하고 기간을 넘겼을 때 불이익을 고려하는 문제를 UIS의 경우에 대해 경험적인 법칙에 근거한 BAB[3] 방법과 SA[4] 방법을 이용해서 접근하였다. 본 연구에서는 이러한 문제의 접근 방법으로써 혼합 정수 비선형 모델(Mixed Integer Nonlinear Model)을 만들고 상용 소프트웨어인 GAMS[2]의 DICOPT+를 이용하여 문제를 풀었다. Ku와 Karimi[3, 4]는 중간 저장 탱크를 사용하는 방법에 있어서 UIS만을 고려했지만 여기서는

NIS의 경우도 혼합 정수 비선형 모델을 통해 다루었다. Ku와 Karimi[3, 4]의 논문에서는 만기일에 늦은 경우만 불이익을 가하는데 제품 i 에 대해서 만기일을 넘길 경우의 불이익을 수식으로 표현하면 다음 식 (1)과 같다.

$$P_i = p_i \max [0, C_{iM} + a_{iM} - d_i] \quad (1)$$

여기서 M 은 장치의 갯수, a_{iM} 는 i 번째 제품의 마지막 장치에서의 수송 시간, C_{iM} 은 i 번째 제품이 마지막 장치에서 처리가 끝난 시간, d_i 는 제품 i 의 만기일, p_i 는 만기일을 넘을 경우 가해지는 단위 시간당 불이익 그리고 P_i 는 제품 i 의 늦은 생산으로 인한 불이익을 나타낸다. 생산 제품의 수가 N 개인 공장에서의 목적 함수는 식 (2)와 같다.

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_N \quad (2)$$

식 (2)와 같이 만기일을 넘길 경우도 생각할 수 있지만 만기일 보다 빨리 제품이 생산될 경우도 문제가 된다. 만기일 보다 빨리 제품이 생산된 경우 제품이 배달되기까지 생산현장에서 보관해야 하는데

여기에 수반되는 비용이 만기일에 늦은 경우보다 크지는 않겠지만 고려되어야 한다. 다음 식은 만기일 보다 빨리 생산한 경우 가해지는 불이익을 나타내고 있다.

$$E_i = e_i \max [0, d_i - (C_{iM} + a_{iM})] \quad (3)$$

여기서 e_i 는 만기일 보다 일찍 생산될 경우 제품 i 의 단위 시간당 불이익을, E_i 는 제품 i 가 일찍 생산될 경우의 불이익이다. 그러므로 이런 두 가지 인자를 고려한 전체적인 목적함수는 다음과 같다. 이러한 목적 함수를 최소화하는 생산 순서를 구하는 것이 본 연구에서 다룰 문제의 정의가 된다.

$$\sum_{i=1}^N \{p_i \max [0, C_{iM} + a_{iM} - d_i]\} + \sum_{i=1}^N \{e_i \max [0, d_i - (C_{iM} + a_{iM})]\} \quad (4)$$

(4)식은 만기일 보다 일찍 생산된 경우와 늦게 생산된 경우를 각 제품에 대해 모두 합했지만 다른 표현으로 나타낸 식들도 많이 있다 [1].

본 연구에서는 먼저 Ku와 Karimi가 목적함수로 한 식 (2)를 가지고 그들의 논문에서 제시한 두 가지 예제를 혼합 정수 비선형 모델로 풀어 모델의 정확성을 검증하고 식 (4)로 목적 함수를 바꾸어서 만기일보다 일찍 생산되는 경우의 불이익을 고려한 경우를 UIS와 NIS에 관해서 최적해를 구하였다.

2. 혼합 정수 비선형 모델

여기서는 UIS와 NIS 조업하에서 다품종 회분식 공정의 만기일 불이익을 고려한 혼합 정수 비선형 수식에 대해 설명한다. 먼저, M 개의 장치[여기서는 한 단계(stage)에 하나의 장치만 있다고 생각한다]를 가지고 N 개의 제품을 생산하는 회분식 공정이 있다고 가정하고 수식에서 i 는 임의의 제품을, j 는 생산 순서를, 그리고 k 는 장치를 나타내고 있다.

2-1. UIS 조업하에서의 혼합 정수 비선형 모델

UIS의 경우는 장치간에 중간 저장 탱크가 무한히 많이 있어서 제품 i 가 k 번째 장치에서 처리가 끝난 다음에 $k+1$ 번째 장치가 비어 있지 않으면 중간 저장 탱크로 옮겨져서 k 장치에 머무르지 않기 때문에 k 장치가 다음 제품의 생산 준비를 할 수 있다. 장치 설비비는 많이 드나 장치의 노는 시간(idle time)을 최소화하여 장치의 이용도와 생산성 향상에 가장 좋은 조업 형태이다. UIS 조업하에서의 혼합 정수 비선형 모델은 다음과 같다.

$$\text{Min. } \sum_{i=1}^N \{[p_i \max (0, C_{ik} + a_{iM} - d_i)] + e_i \max [0, d_i - (C_{iM} + a_{iM})]\}$$

$$\text{Subject to } \sum_{i=1}^N X_{ij} = 1 \quad j=1, N \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^N X_{ij} = 1 \quad i=1, N \quad (6)$$

$$C_{ik} \geq C_{(i-1)k} + \sum_{j=1}^N X_{ji}(t_{jk} + a_{j(k-1)} + s_{jk}) + \sum_{j=1}^N X_{j(i-1)} a_{jk} \quad i=1, N \quad j=1, N \quad k=1, M \quad (7)$$

$$C_{ik} \geq C_{i(k-1)} + \sum_{j=1}^N X_{ji}(a_{j(k-1)} + s_{jk}) + \sum_{j=1}^N X_{ji} t_{jk} \quad i=1, N \quad j=1, N \quad k=1, M \quad (8)$$

Table 1. Data of example 1 and 2

(a) Example 1

N	t ₁₁	t ₁₂	s ₁₁	s ₁₂	a ₁₀	a ₁₁	a ₁₂	d _i	p _i
1	9	12	1	2	2	3	2	45	4
2	19	8	2	3	4	1	1	40	1
3	5	20	1	2	1	2	3	50	3
4	7	16	2	1	2	1	2	35	2

(b) Example 2

N	t ₁₁	t ₁₂	t ₁₃	t ₁₄	s ₁₁	s ₁₂	s ₁₃	s ₁₄	a ₁₀	a ₁₁	a ₁₂	a ₁₃	a ₁₄	d _i	p _i
1	10	6	12	8	1	2	3	3	2	1	1	1	2	50	5
2	15	18	9	5	2	2	1	2	2	1	2	2	1	40	2
3	5	9	12	14	1	1	2	3	2	2	1	2	1	80	3
4	12	8	17	13	2	1	2	2	1	2	2	2	2	60	4

$$C_{ik} \geq 0 \quad (9)$$

제약 조건에서 X_{ij} 는 0-1 변수로써 " $X_{32}=1$ "이 의미하는 것은 제품 2가 생산 순서가 세번째라는 것이다. 그리고 s_{jk} 는 k 장치에서 j 번째에 처리되는 제품의 준비 시간(setup time)이고 t_{jk} 는 k 장치에서 j 번째에 처리되는 제품의 공정 시간(processing time)이고 a_{jk} 는 k 장치에서 j 번째 제품의 이송(transfer) 시간이다. 제약 조건 (5)와 (6)은 모든 제품이 각 생산 순서에 반드시 부여되어야 함을 나타내고 (7)과 (8)은 제품 생산시 바로 전 제품의 처리가 끝났음과 장치가 비어 있어야 함을 수식으로 표현한 것이다.

2-2. NIS 조업하에서의 혼합 정수 비선형 모델

NIS의 경우는 각 장치 사이에 중간 저장 탱크가 없기 때문에 제품이 다음 장치로 넘어 가기 위해서는 다음 장치가 빌 때까지 앞 장치에서 머물러야 한다. 이러한 제약 조건을 나타낸 것이 (12)식이고 나머지는 UIS의 수식과 같다.

$$\text{Min. } \sum_{i=1}^N \{[p_i \max (0, C_{ik} + a_{iM} - d_i)] + e_i \max [0, d_i - (C_{iM} + a_{iM})]\}$$

$$\text{Subject to } \sum_{i=1}^N X_{ij} = 1 \quad j=1, N$$

$$\sum_{i=1}^N X_{ij} = 1 \quad i=1, N$$

$$C_{ik} \geq C_{(i-1)k} + \sum_{j=1}^N X_{ji}(t_{jk} + a_{j(k-1)} + s_{jk}) + \sum_{j=1}^N X_{j(i-1)} a_{jk} \quad i=1, N \quad j=1, N \quad k=1, M \quad (10)$$

$$C_{ik} \geq C_{i(k-1)} + \sum_{j=1}^N X_{ji}(a_{j(k-1)} + s_{jk}) + \sum_{j=1}^N X_{ji} t_{jk} \quad i=1, N \quad j=1, N \quad k=1, M \quad (11)$$

$$C_{ik} \geq C_{(i-1)(k+1)} \quad i=1, N \quad j=1, N \quad k=1, M \quad (12)$$

$$C_{ik} \geq 0$$

3. 적용 사례

Ku와 Karimi가 풀었던 예제를 앞에서 설명한 혼합 정수 비선형 모델로 수식화하고 GAMS[2]의 DICOPT++를 이용하여 문제를 푼다. 먼저 여기서 수식화된 혼합 정수 비선형 모델의 정확성을

Table 4. Result of test problems

(a) In case of UIS

Size	Optimum production sequence	Penalties
8×4	1-2-3-4-5-6-7-8	0
10×4	1-2-3-4-5-6-7-8-9-10	0
12×4	1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12	0
14×4	1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14	0

(a) In case of NIS

Size	Optimum production sequence	Penalties
8×4	4-6-3-1-8-5-7-2	0
10×4	6-8-4-3-7-9-10-2-5-1	0
12×4	8-2-3-12-7-6-10-9-4-1-11-5	0
14×4	2-6-7-9-13-5-1-11-8-14-12-3-10-4	0

Table 5. Average CPU time of each test problem

	Average CPU time[sec]	
	UIS	NIS
8×4	0.14	0.14
10×4	0.15	0.15
12×4	0.16	0.16
14×4	6.99	8.90

검증하기 위해서 Ku와 Karimi[3]의 논문에 데이터가 나와 있는 두 가지 예제를 풀어 보았다. 두 개의 예제에 대한 데이터는 Table 1에 나타나 있다. 예제 1은 두 개의 장치에서 네 개의 제품을 생산하는 공정이고 예제 2는 네 개의 장치에서 네 개의 제품을 생산하는 공정이다. 문제를 풀어서 본 결과 예제 1은 목적 함수가 140이고 생산 순서는 3→1→4→2이고 예제 2의 경우 생산 순서를 1→3→4→2의 차례로 할 경우 불이익이 가장 최소가 되며 목적 함수의 값은 234였다. 혼합 정수 비선형 모델로 얻은 결과 값은 Ku와 Karimi[3]가 제시한 생산 순서와 목적 함수의 값과 같은 결과이다. 예제 1과 예제 2는 IBM RS/6000 워크스테이션에서 문제를 풀었는데 답을 구하는데 걸린 CPU 시간은 각각 0.13, 0.14초였다. 기존의 논문과 비교하기 위해서 UIS 조업하에서 만기일을 넘길 경우에만 불이익을 고려하여 문제를 풀었으나 8×4, 10×4, 12×4, 14×4(“8×4”란 제품이 8개, 장치가 4개인 공정을 의미한다)의 큰 규모의 문제도 풀어서 만기일 불이익을 최소로 하는 생산 순서를 구했다.

본 연구에서는 UIS 뿐만 아니라 NIS 조업하에서도 만기일을 넘길 경우 뿐만 아니라 만기일 보다 일찍 제품이 생산될 경우 제품의 저장 등의 문제로 인한 불이익을 추가해서 문제를 풀어 볼 수 있다. 여기서는 미리 makespan을 최소화하는 생산 순서와 생산 완료시간을 구한 8×4, 10×4, 12×4 그리고 14×4의 문제에 대하여 불이익을 최소로 하는 생산 순서를 구해 본다. Table 2와 3은 8×4, 10×4, 12×4 그리고 14×4에 대한 UIS와 NIS에 대한 데이터이다. Table 4는 혼합 정수 비선형 모델로 찾은 UIS와 NIS의 각 문제에

대해 불이익을 “0”으로 하는 생산 순서이다. 본 연구에서는 이밖에도 각각의 문제 크기에 대해서 10개씩의 문제를 더 만들어서 혼합 정수 비선형 모델을 검토해 본 결과 100% 불이익을 “0”으로 하는 최적 순서를 구하였다. Table 5는 이러한 문제의 해를 GAMS의 DICOPT++로 구하는데 필요한 평균 계산 시간이다.

4. 결 론

본 연구에서는 혼합 정수 비선형 모델을 이용하여 만기일을 넘는 경우와 만기일보다 일찍 생산된 경우의 불이익을 동시에 고려하는 스케줄링 문제를 다루었다. 기존의 Ku와 Karimi[3, 4]가 제시했던 경험적인 법칙을 첨가한 BAB이나 SA 방법과 비교하기 위해서 같은 예제를 풀어서 검증하였고 Ku와 Karimi[3, 4]가 다루었던 UIS 뿐만 아니라 NIS 조업하에서의 문제를 해결할 수 있는 혼합 정수 비선형 모델을 제시하였다.

감 사

본 연구는 한국과학재단 지정 우수 연구센터인 공정산업의 지능 자동화 연구센터의 연구비 지원에 의하여 이루어진 것으로서, 연구비를 지원해 주신 연구센터에 감사드립니다.

사용기호

- a_{ij} : transfer time of product i out of batch unit j
- C_{ij} : completion time of product i on batch unit j
- d_i : due date of product i
- e_i : earliness penalty per unit time from product i
- E_i : earliness penalty from product i
- M : number of batch processing stages
- N : number of products
- P : total penalty cost
- p_i : tardiness penalty per unit time from product i
- P_i : tardiness penalty from product i
- s_{ij} : setup time required for product i on batch unit j
- t_{ij} : processing time of product i on batch unit j
- X_{ji} : binary variable $X_{ji}=1$ if product i is assigned to production sequence j and $X_{ji}=0$ if it is not

참고문헌

- Baker, K. R. and Scudder, G. D.: *Operations Research*, **38**, 22 (1990).
- Brooke, A., Kendrick, D. and Meeraus, A.: “GAMS User's Manual”, Scientific Press(1988).
- Ku, H. and Karimi, I.: *Ind. Eng. Chem. Res.*, **29**, 580(1990).
- Ku, H. and Karimi, I.: *Computers and Chem. Engng.*, **15**, 283 (1991).