

증발이 일어나는 액체층에서 부력 및 표면장력의 변화에 의한 자연대류의 발생

김민찬* · 윤도영[†] · 최창균**

*제주대학교 공과대학 화학공학과
광운대학교 공과대학 화학공학과(신기술연구소)
**서울대학교 공과대학 화학공학과
(1995년 8월 30일 접수, 1996년 1월 10일 채택)

The Onset of Natural Convection Driven by Buoyancy-Forces and Surface-Tension Gradients During Liquid Evaporation

Min Chan Kim*, Do-Young Yoon[†] and Chang Kyun Choi**

*Department of Chemical Engineering, Cheju National University, Cheju 690-756, Korea
Department of Chemical Engineering, Institute of New Technology, Kwangwoon University, Seoul 139-701, Korea
**Department of Chemical Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea
(Received 30 August 1995; accepted 10 January 1996)

요 약

자유 경계면인 윗면이 증발에 의해 급격히 냉각되는 수평 유체층에서 부력 및 표면장력의 변화에 의하여 유발되는 자연대류의 발생시점을 이론적으로 해석하였다. 시간에 따른 교란의 변화와 기본 온도 분포의 시간 의존형의 비선형성을 고려하는 전파이론을 적용하여 안정성 해석을 수행하였다. 자연대류 발생 시점은 부력효과를 나타내는 Rayleigh수와 표면장력의 변화를 나타내는 Marangoni수에 의하여 결정되었으며, 부력과 표면장력의 효과는 자연대류를 일으키는데 상승작용을 함을 알 수 있었다. 본 연구의 해석결과는 프로판올에 대한 실험결과를 합리적으로 설명하였다.

Abstract— The onset time of natural convection driven by buoyancy forces and surface tension gradients is analysed theoretically in the initially quiescent horizontal fluid layers. The fluid layers experience the rapid evaporative cooling at the upper free surface. For this system, the stability analysis is conducted on the basis of the propagation theory that considers the time-dependent properties of disturbances and the nonlinear base temperature profiles. The onset time of natural convection has been governed by the Rayleigh number and the Marangoni number which represent the buoyancy-force and surface-tension effects, respectively. The buoyancy forces and surface-tension gradients reinforce each other to induce natural convection. The results of the present analysis explain the experimental data of propanol reasonably.

Key words: Onset Time, Natural Convection, Rayleigh Number, Marangoni Number, Propagation Theory

1. 서 론

중력장에서 수평 유체층의 밑면을 가열하거나 윗면을 냉각할 때 부력에 의한 자연대류 발생은 금세기 초 Benard[1]의 체계적인 실험과 선형 안정성 이론을 적용한 Rayleigh[2]의 해석 이후 많은 연구자들의 관심을 끌어 왔다. 한편 Pearson[3]은 부력뿐만 아니라 표면장력의 변화에 의해서도 자연대류가 발생할 수 있음을 보였다. 자연대류는 온도 또는 농도차에 의하여 유발되는 부력 및 표면장력의 변화가 점성 및 확산 등의 안정화 요인을 극복할 때 발생한다. 이러한 현상을 잘 설명해 주는 인자는 Rayleigh수와 Marangoni수이다. 이중 Rayleigh수는 부력에 의한 자연대류 현상을, Marangoni수는 표면장력의 변화에 의한 자연대류 현상을 해석하는데 중요한 인자이다. 부력 또는 표면장력의 변화에 의하여 유발되는 자연대류는 결정성장 및 화학증착 반응기 등의 전자소재 가공 공정, 전산기 내부

의 냉각, 정교한 열교환 장치의 설계 등 다양한 분야에서 그 중요성이 부각되고 있다[4].

자유 경계면을 포함하는 계에서는 Pearson[3]이 수직 벽에서 페인트의 건조시 부력에 의한 자연대류와 비슷한 형태의 유동이 발생함을 관찰하고 표면장력의 변화에 의해서도 자연대류가 발생할 수 있음을 해석적으로 보인 이후 표면장력 효과에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. Scriven과 Sterling[5]은 자유 경계면의 굴곡을 고려하여 표면장력의 변화에 의한 자연대류 발생에 대한 안정성 해석을 하였으며, Nield[6]은 부력 및 표면장력의 효과를 동시에 고려하여 안정성 해석을 하였다. Lee 등[7]은 점탄성 유체층에서 부력 및 표면장력의 변화에 의한 자연대류 발생을 과도 안정성(overstability) 영역까지 확장하여 해석하였다.

위와 같은 정상상태 문제와는 달리 실제 문제들은 급격한 가열 또는 냉각이 보통이다. 따라서 온도 분포가 완전히 전개되기 전에 자

연대류가 발생한다. 이와 같이 온도분포가 비선형이고 시간 의존적인 경우에 자연대류 발생을 해석하기 위해 증폭이론(amplification theory)[8], 에너지 법(energy method)[9], 추계모델(stochastic model)[10], 전파이론(propagation theory)[11] 등 다양한 방법들이 고안되었다. 이중 전파이론은 어떠한 가정도 필요하지 않은 결정론적인 방법으로 초기 정지상태의 다공성 매질계[12], 강제대류에 의한 기본 유동이 존재하는 계[13], 자연대류에 의한 기본 유동이 존재하는 계[14]에서 부력에 의한 자연대류 발생을 해석하는데 성공적으로 적용되었다. 액체가 증발되는 계에 대해서 표면장력의 변화에 의한 자연대류의 발생은 Vidal과 Acrivos[15], Gummerman과 Homsy[16]에 의하여 실험적, 이론적으로 해석되었다.

본 연구에서는 윗면이 증발에 의해 냉각되는 초기 정지상태의 수평 유체층을 대상으로 온도분포가 비선형이고 시간 의존적인 경우에 부력 및 표면장력의 변화에 의하여 유발되는 자연대류의 발생조건을 전파이론을 적용하여 해석할 것이다. 따라서 본 연구는 부력에 의한 자연대류 발생을 해석하는데 유용한 방법인 전파이론의 표면장력의 변화가 동반되는 계로의 확장 가능성을 살펴볼 것이다. 본 연구의 결과는 표면장력의 변화에 의한 자연대류가 중요한 역할을 하는 계를 이해하는데 중요한 자료를 제공할 것이다.

2. 기본계의 설정 및 안정성 해석

2-1. 기본계

본 연구에서 고려되는 계는 윗면이 증발에 의해 일정 열속으로 냉각되는 깊이 d 인 수평 유체층이다. Fig. 1에서 보는 바와 같이 윗면은 자유 경계면이고 밑면은 일정 온도로 유지되는 고정 경계면이다. 시간 $t=0$ 에서 정지상태인 유체층의 윗면이 일정 열속 q 로 냉각되고 있다. 유체층의 냉각시 유발되는 증발속도는 유체층의 깊이 d 의 변화에 영향을 미치지 않을 정도로, 균질 유체층 내부에서는 증발에 의한 물질전달이 이루어지지 않는 것으로 가정된다. 자연대류가 발생하기 전의 기본 온도는 d^2/α , d , $(q\delta)/k$ 를 각각 시간, 길이, 온도에 대한 무차원 척도로 사용하면 아래와 같이 무차원 온도 분포식에 의하여 지배된다.

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$\text{I.C. \& B.C.'s: } \theta_0(0, z) = 0, \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial z}(\tau, 0) = 1 \text{ and } \theta_0(\tau, 1) = 0 \quad (2)$$

윗 식을 잘 알려진 변수 분리법을 사용하여 풀면 다음과 같은 형태의 온도 분포를 얻을 수 있다[17].

$$\theta_0 = z - 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1/2)^2} \cos[(n+1/2)\pi z] \exp[-(n+1/2)^2 \pi^2 \tau] \quad (3)$$

본 연구에서는 온도의 비선형성이 강한 영역에서 자연대류 발생 조건에 관심이 있으므로, deep-pool계에서 기본 온도분포를 아래와 같은 Leveque 해로 나타낼 수 있다[18].

$$\theta_0 = \sqrt{4\tau} \left[\eta - \eta \operatorname{erf} \eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\eta^2) \right] \quad \text{for } \tau \leq 0.01 \quad (4)$$

여기서 $\eta = z/\sqrt{4\tau}$ 이다. 위의 기본 온도분포식들은 기본 온도를 잘 나타내지만 안정성 해석시 수학적 어려움을 피하기 위하여, deep-pool계에서 온도분포를 적분법을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\theta_0 = -\delta \left[\frac{3}{8} - \zeta + \frac{3}{4} \zeta^2 - \frac{1}{8} \zeta^3 \right] [1 - H_{\zeta-1}] \quad \text{for } \tau \leq 0.01 \quad (5)$$

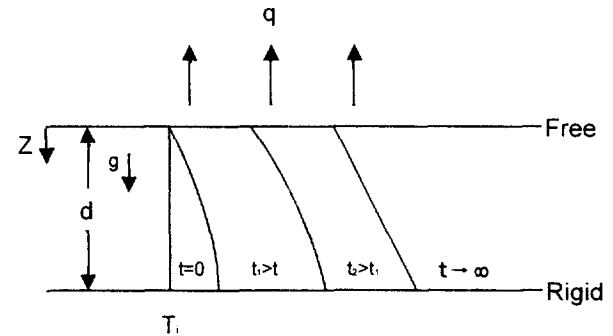


Fig. 1. Schematic diagram of the present system.

여기서 δ 는 무차원 열 침투깊이로 열 수지에 의하면 $\sqrt{10\tau}$ 로 결정되며, $\zeta = z/\delta$ 이다. $H_{\zeta-1}$ 는 $\zeta \geq 1$ 에서 1의 값을 갖는 단위 계단함수이다.

2-2. 지배 방정식

본 연구에서는 부력 및 표면장력의 변화에 의하여 유발되는 자연대류 발생을 해석한다. 이 경우에 계를 지배할 지배 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (6)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \right\} \vec{U} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{U} + \rho \vec{g} \quad (7)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \right\} T = \alpha \nabla^2 T \quad (8)$$

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_r)] \quad (9)$$

$$S = S_0 [1 - \gamma(T - T_r)] \quad (10)$$

여기서 \vec{U} , ρ , μ , \vec{g} , α , β , S 는 각각 속도벡터, 밀도, 압력, 점도, 중력 가속도, 열 확산 계수, 부피 팽창 계수, 표면장력을 나타낸다. $\gamma = -\frac{dS}{dT}$ 이고, 하첨자 "r"은 기준상태를 나타낸다. 식 (9)는 Boussinesq 가정을 나타내고, 식 (10)은 표면장력을 온도에 선형적으로 변함을 나타내는 식으로 Pearson[3] 이래로 표면장력의 변화에 의하여 유발되는 자연대류 현상을 해석하는데 쓰여왔다.

안정성 해석을 하기 위하여 잘 알려진 선형 안정성 이론을 적용하면 아래와 같은 교란 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right\} \nabla^2 W_1 = g \beta \nabla_1 T_1 \quad (11)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \nabla^2 \right\} T_1 = -W_1 \frac{\partial T_0}{\partial z} \quad (12)$$

여기서 "0"과 "1"은 각각 기본량과 교란량을 나타낸다. 밑면은 일정 온도가 유지되는 고정 경계면이므로 다음과 같은 통상적인 경계조건을 적용할 수 있다.

$$W_1 = \frac{\partial W_1}{\partial z} = T_1 = 0 \quad \text{at } Z = d \quad (13)$$

그러나 윗면은 자유 경계면이므로 표면장력을 고려하는 힘의 수지식을 도입하여 다음과 같은 경계조건을 사용한다.

$$W_1 = \frac{\partial T_1}{\partial z} = 0 \text{ and } \gamma \nabla_1 T_1 = \mu \frac{\partial^2 W_1}{\partial z^2} \quad \text{at } Z = 0 \quad (14)$$

여기서 사용된 경계조건들은 Pearson[3]이 사용한 경계조건과 동일하다.

윗식들을 무차원화하기 위해 α/d , $(\alpha\nu/g\beta d^3)$ 을 각각 속도교란 및 온도교란의 무차원 척도로 사용한다. 온도교란의 무차원 척도가 기본 온도와 다른 것은 자연대류 발생시점에서 교란의 크기는 온도차에 무관하며 단지 유체의 물리적 특성에만 의존한다는 가정을 포함하고 있다. 이와 같은 척도로 무차원화하면 아래와 같은 무차원화된 교란 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\nabla}^2 - \bar{\nabla}^4\right) \mathbf{w} = \bar{\nabla}_1^2 \theta \quad (15)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \mathbf{Ra} \mathbf{w} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \bar{\nabla}^2 \theta \quad (16)$$

경계조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \text{ and } \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial z^2} = \frac{\mathbf{Ma}}{\mathbf{Ra}} \bar{\nabla}_1^2 \theta \quad \text{at } z = 0 \quad (17a)$$

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} = \theta = 0 \quad \text{at } z = 1 \quad (17b)$$

여기서 $\bar{\nabla}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, $\bar{\nabla}_1^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 이며, Prandtl 수 Pr, Rayleigh 수 Ra, Marangoni 수 Ma는 아래와 같이 정의되는 무차원 수들로 부력 및 표면장력의 변화에 의한 자연대류 발생을 해석하는데 중요한 인자들이다.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Ra = \frac{g\beta q d^4}{k\alpha\nu} \text{ and } Ma = \frac{\gamma q d^2}{k\alpha\mu} \quad (18)$$

2-3. 안정성 방정식

본 연구에서는 주어진 Pr, Ra, Ma에서 자연대류 발생 시점을 찾는 것을 주 목적으로 한다. 따라서 deep-pool계에서 안정성 해석을 하기 위하여 교란량들을 무차원 열 침투 깊이를 새로운 길이차원으로 하여 교란량들을 유사변환하는 전파이론을 사용하여 교란량들을 아래와 같이 변환한다.

$$[\mathbf{w}(\tau, x, y, z), \theta(\tau, x, y, z)] = [\delta^2 \mathbf{w}'(\zeta), \theta'(\zeta)] \exp[i(a_x x + a_y y)] \quad (19)$$

여기서 "i"는 허수부를 나타내고 "*"는 교란의 진폭함수를 나타낸다. a_x 와 a_y 는 각각 x, y 방향으로의 주기성을 나타내는 무차원 파수이다.

윗식을 식 (15)-(16)에 대입하고 $a^2 = a_x^2 + a_y^2$ 의 관계를 이용하면 아래와 같은 안정성 방정식을 얻을 수 있다.

$$(D^2 - a^2)^2 \mathbf{w}' + \frac{1}{Pr} (5\zeta D^3 - 5a^2 \zeta D + a^2) \mathbf{w}' = a^2 \theta' \quad (20)$$

$$(D^2 + 5\zeta D - a^2) \theta' = \mathbf{Ra}' \mathbf{w}' D \theta' \quad (21)$$

경계조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{w}' = D \theta' = 0 \text{ and } D^2 \mathbf{w}' = -\frac{\mathbf{Ma}'}{\mathbf{Ra}'} a^2 \theta' \quad \text{at } \zeta = 0 \quad (22a)$$

$$\mathbf{w}' = D \mathbf{w}' = \theta' = 0 \quad \text{at } \zeta = 1/\delta \quad (22b)$$

여기서 $\mathbf{Ra}' = \mathbf{Ra} \delta^4$, $\mathbf{Ma}' = \mathbf{Ma} \delta^5$, $a' = a \delta$, $\theta_0' = \theta_0 / \delta$, $D = d/d\zeta$ 이다. $\delta = \sqrt{10\tau_0}$ 이므로 \mathbf{Ra}' , \mathbf{Ma}' , a' 는 시간 의존적인 특징을 갖고 있지만, 전파이론에서는 이들을 상수로 놓는다. 많은 실험적 결과들로부터 \mathbf{Ra}' 와 \mathbf{Ma}' 를 상수로 간주할 수 있는 타당성을 볼 수 있다[12, 15, 23].

2-4. 안정성 방정식의 해법

앞에서 유도된 안정성은 수학적 어려움을 내포하고 있기 때문에 $Pr \rightarrow \infty$ 인 극한의 경우에 대하여 안정성 해석을 진행한다. $Pr \geq 7$ 인 경우는 Prandtl 수는 안정성 조건에 큰 영향을 미치지 않으므로[19],

$Pr \rightarrow \infty$ 의 해석결과는 보통의 액체의 경우에 적용할 수 있을 것이다.

Prandtl 수가 매우 큰 유체에서 관성항은 대류항에 비해서 무시할 수 있다. 따라서 Prandtl 수가 매우 큰 경우에 식 (20)과 (21)에서 온도교란을 소거하여 식을 정리하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$(D^2 + 5\zeta D - a^2)(D^2 - a^2)^2 \mathbf{w}' = \mathbf{Ra}' a^2 \left(1 - \frac{3}{2}\zeta + \frac{1}{2}\zeta^2\right) \mathbf{w}' \quad \text{for } \zeta \leq 1 \quad (23a)$$

$$(D^2 + 5\zeta D - a^2)(D^2 - a^2)^2 \mathbf{w}' = 0 \quad \text{for } \zeta \geq 1 \quad (23b)$$

여기서 하첨자 "i"는 열 침투 깊이 이내($\zeta \leq 1$)에서의 해를 "o"는 열 침투 깊이 밖($\zeta \geq 1$)에서의 해를 나타낸다.

열 침투 깊이 내부에서의 속도교란을 Sparrow 등[20]이 제안한 다음과 같이 급격히 수렴하는 멱급수의 형태로 나타낸다.

$$\mathbf{w}'_i = \sum_{i=0}^{\infty} H_i f_i(\zeta) \quad (24a)$$

$$f_i(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)} \zeta^n \quad (24b)$$

여기서 H_i ($i=0, 1, 2, 3, 4, 5$)는 결정한다. $b_n^{(i)}$ 은 반복적인 형태를 갖는 급수의 계수로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} b_n^{(i)} = \frac{(n-6)!}{n!} & \left\{ \left[3a^*(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \right. \right. \\ & - 5(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) \Big] b_{n-2}^{(i)} \\ & + \left[10a^{*2}(n-4)(n-5)(n-6) - 3a^{*4}(n-4)(n-5) \right] b_{n-4}^{(i)} \\ & + \left[a^{*6} - 5a^{*4}(n-6) - \mathbf{Ra}' a^{*2} \right] b_{n-6}^{(i)} + \frac{3}{2} \mathbf{Ra}' a^{*2} b_{n-7}^{(i)} - \frac{1}{2} \mathbf{Ra}' a^{*2} b_{n-9}^{(i)} \Big\} \\ & \text{for } n \geq 6 \end{aligned} \quad (25a)$$

$$b_n^{(i)} = \delta_{n,i} \quad \text{for } n \leq 5, \quad \delta_{n,i}: \text{Kronecker delta} \quad (25b)$$

$$b_n^{(i)} = 0 \quad \text{for } n < 0 \quad (25c)$$

식 (24)와 (25)로 표시되는 열 침투 깊이 내부에서의 속도교란은 경계조건인 식 (22a)를 적용하면 다음과 같이 간략화된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'_i = H_1 & \left\{ f_1(\zeta) - \frac{a^{*4}}{5!} f_5(\zeta) \right\} + H_2 \left\{ f_2(\zeta) + \frac{1}{4!} \left(-\frac{2\mathbf{Ra}'}{\mathbf{Ma}'} + 4a^{*2} \right) f_4(\zeta) \right\} \\ & + H_3 \left\{ f_3(\zeta) + \frac{a^{*2}}{10} f_5(\zeta) \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

열 침투 깊이 외부($\zeta \geq 1$)에서는 식 (23b)가 식 (23a)에 비해 간단한 형태로 주어지므로 열 침투 깊이 외부에서의 속도교란은 열 침투 깊이 내부와는 다른 해법으로 구한다. 우선 새로운 변수 Y를 다음과 같이 도입하여 간편한 해로 유도한다.

$$Y = (D^2 - a^2)^2 \mathbf{w}'_o \quad (27)$$

식 23(b)는 식 (25)를 사용하면 다음과 같이 간략화된다.

$$(D^2 + 5\zeta D - a^2) Y = 0 \quad (28)$$

Deep-pool계에서는 열 침투 깊이 δ 가 매우 작으므로 $1/\delta$ 은 무한대에 해당한다. 따라서 경계조건인 식 (22b)는 ζ 가 무한대인 경우에 적용된다고 할 수 있다. 따라서 식 (28)과 같은 형태에 많이 적용되는 WKB 방법[21]으로 Y의 근사해를 구하고, 식 (22b)의 경계조건을 적용하면 Y는 다음과 같이 된다.

$$Y(\zeta) = \frac{H_6}{\sqrt[4]{\frac{100}{16}\zeta^2 + \frac{5}{2} + a^{*2}}} \exp \left\{ -\frac{5}{4}\zeta^2 - \int_1^\zeta \left(\frac{100}{16}\chi^2 + \frac{5}{2} + a^{*2} \right) d\chi \right\} \quad (29)$$

$\zeta \geq 1$ 인 범위에서 해를 구해야 하므로 전산기의 수렴성을 고려하여 ζ 를 다음과 같이 s 로 전환시킨다.

$$s = \zeta - 1 \quad (30)$$

w_o^* 의 특별해를 구하기 위하여 새로운 변수 s 를 사용하여 Y 를 다음과 같이 두 가지 형태의 멱급수로 정의한다.

$$Y(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(s)e^{as^*} \quad \text{or} \quad \sum_{n=0}^{\infty} q_n(s)e^{-as^*} \quad (31)$$

이때 p_n 과 q_n 은 두 가지 형태의 식 (31)을 식 (28)에 각기 따로 대입하여 결정한다. 결정된 p_n 과 q_n 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p_n &= -\frac{1}{n(n-1)} \{ (5+2a^*)(n-1)p_{n-1} + 5(n-2+a^*)p_{n-2} + 5a^*p_{n-3} \} \\ p_1 &= DY(1) - a^*Y(1) \\ p_0 &= Y(1) \\ q_n &= -\frac{1}{n(n-1)} \{ (5-2a^*)(n-1)q_{n-1} + 5(n-2-a^*)q_{n-2} - 5a^*q_{n-3} \} \\ q_1 &= DY(1) + a^*Y(1) \\ q_0 &= Y(1) \end{aligned} \quad (32)$$

식 (31)과 (32)와 같이 두 가지 계수를 갖는 Y 의 급수해에 대하여 연산자 기법을 통하여 w_o^* 의 특별해를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} w_{o,p}^* &= \frac{H_6}{4a^*} \left\{ e^{as^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} p_n s^{n+2} + e^{-as^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} q_n s^{n+2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{a^*} \left(e^{as^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} p_n s^{n+1} - e^{-as^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} q_n s^{n+1} \right) \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

위와 같이 주어진 w_o^* 의 특별해와 일반해를 결합하여 다음과 같은 해를 유도한다.

$$w_o^* = w_{o,p}^* + H_7 e^{-as^*} + H_8 e^{as^*} + H_9 s e^{-as^*} + H_{10} s e^{as^*} \quad (34)$$

위의 식에 경계조건인 식 (22b)를 적용하면 속도교란은 다음과 같은 해를 갖는다.

$$w_o^* = w_{o,p}^* + H_7 e^{-as^*} + H_9 s e^{-as^*} \quad (35)$$

위와 같이 열 침투 깊이 내부와 외부에서 각각 구한 속도교란의 해인 식 (26)과 (35)는 열 침투 깊이인 $\zeta=1$ 에서 결합시킨다. 이때 물리적으로는 속도, 응력, 온도 등이 연속이어야 하며, 수학적으로는 속도교란이 해석적인 함수이어야 하므로 다음과 같은 관계가 만족되어야 한다.

$$D^n w_o^* = D^n w_{o,p}^* \quad (n=0, 1, 2, 3, 4, 5) \quad \text{at } \zeta=1 \quad (36)$$

식 (36)의 관계는 다음과 같은 행렬 형태로 표시된다.

$$\begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & -1 & 0 & 0 \\ DF_1 & DF_2 & DF_3 & a^* & -1 & 0 \\ D^2F_1 & D^2F_2 & D^2F_3 & -a^{*2} & 2a^* & 0 \\ D^3F_1 & D^3F_2 & D^3F_3 & a^{*3} & -3a^{*2} & 0 \\ D^4F_1 & D^4F_2 & D^4F_3 & -a^{*4} & 4a^{*3} & -Y \\ D^5F_1 & D^5F_2 & D^5F_3 & a^{*5} & -5a^{*4} & -DY \end{bmatrix}_{\zeta=1} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_7 \\ H_9 \\ H_{10} \end{bmatrix} = 0 \quad (37)$$

$$\text{여기서 } F_1 = f_1(\zeta) - \frac{a^{*4}}{5!} f_5(\zeta), \quad F_2 = f_2(\zeta) + \frac{1}{4!} \left(-\frac{2Ra^*}{Ma^*} + 4a^{*2} \right) f_4(\zeta),$$

$F_3 = f_3(\zeta) + \frac{a^{*2}}{10} f_5(\zeta)$ 이다. 표면장력의 효과가 무시되는 경우, 즉 $Ma^*=0$ 인 경우는 $F_2=f_2(\zeta)$ 가 된다.

식 (37)에서 $H_i(i=1, 2, 3, 6, 7, 9)$ 가 의미있는 값을 갖기 위하여 6×6 행렬의 행렬식의 값이 0이 되어야 한다. 행렬식의 값은 a^* , Ma^* , Ra^* 에 의하여 결정되므로 a^* 와 Ma^* 를 고정시키고 행렬식의 값을 0으로 만드는 Ra^* 의 값을 찾는 계산을 하였다.

3. 결과 및 검토

앞의 절차에 따라 본 연구에서는 윗면이 일정 열속으로 냉각되고 있는 수평 유체층에서 부력 및 표면 장력의 변화에 의하여 발생하는 자연대류의 발생 시점을 구하였다. 표면장력의 효과가 무시되는 경우, 즉 $Ma^*=0$ 인 경우의 한계 안정성 곡선(marginal stability curves)은 Fig. 2에 나타나 있다. 한계 안정성 곡선의 밑부분은 대류 유동이 없

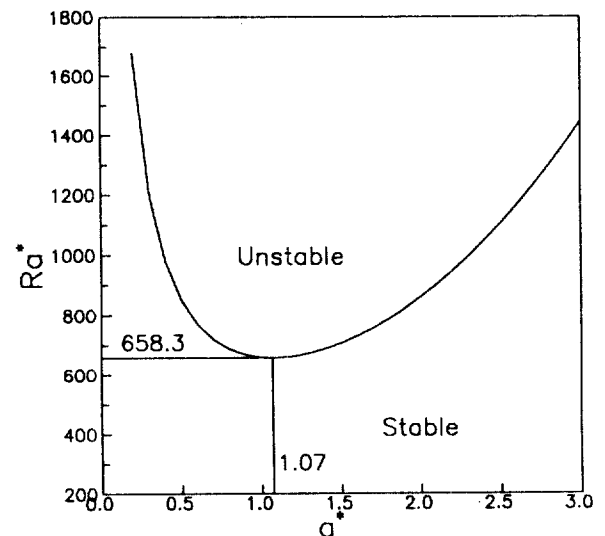


Fig. 2. Neutral stability curve without Marangoni effects.

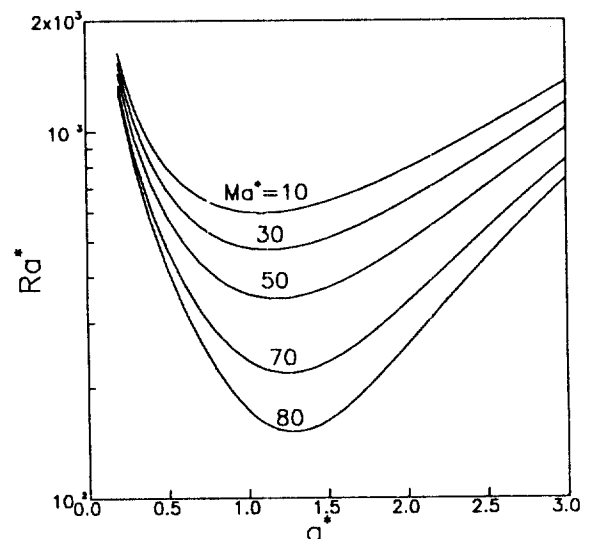


Fig. 3. Neutral stability curves considering Marangoni effects.

Table 1. Numerical values of critical conditions

Ma*	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	102.2
Ra*	658.3	598.0	537.0	475.3	412.7	349.2	284.7	219.2	152.5	84.2	15.0	0

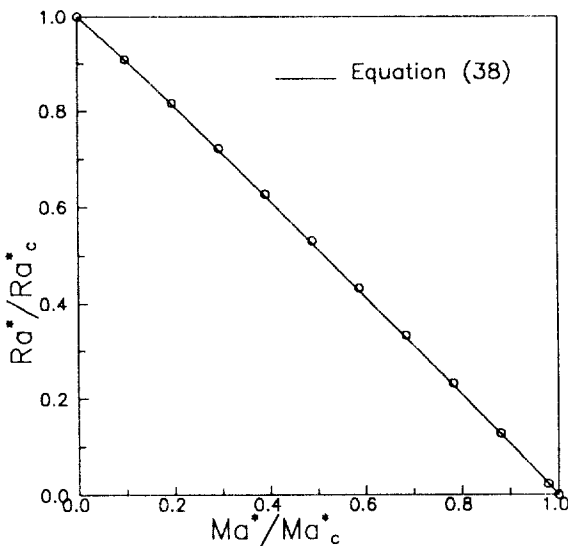


Fig. 4. Critical conditions for the onset of natural convection.

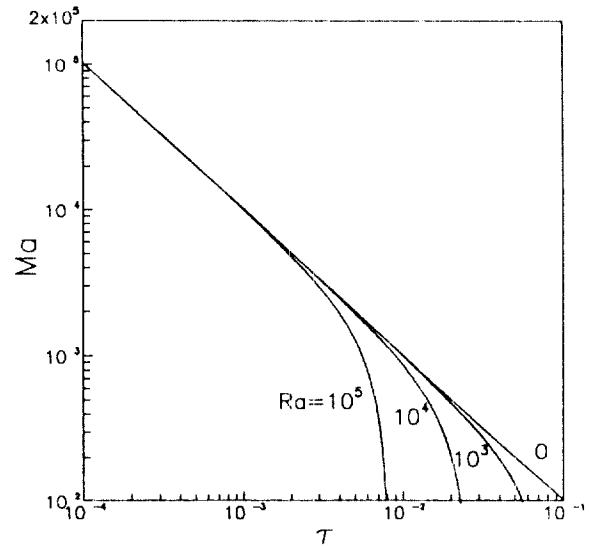


Fig. 6. Predicted times for the critical condition of natural convection.

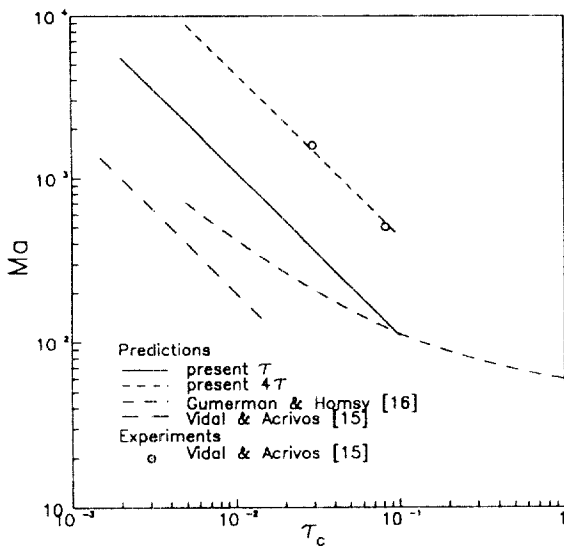


Fig. 5. Critical times for the onset of natural convection.

고 전도에 의해서만 열이 전달되는 안정한 영역이고, 곡선의 윗부분으로 갈수록 점차 심한 유동을 갖는 불안정한 상태가 된다. 이때 이 곡선의 최소값이 자연대류 발생을 나타내는 임계값이 된다. 표면장력의 효과가 존재하는 경우의 한계 안정성 곡선이 Fig. 3에 나타나 있다. Ma^* 를 매개인자로 한 임계 Ra^* 값이 Table 1에 나타나 있다. Ma^* 가 0일 때의 Ra^* 의 값은 표면장력의 효과를 무시할 수 있을 경우에 부력에 의한 자연대류 발생조건을 나타내고, Ra^* 가 0일 때의 Ma^* 값은 부력 효과를 무시할 수 있을 경우의 표면장력의 변화에 의한 자연대류 발생조건을 나타낸다.

Fig. 4에는 Ra^* 와 Ma^* 를 각각의 최대값으로 정규화한 결과가 나타나 있다. 이때의 $Ra_{c,0}^*$ 는 Ma^* 가 0일 때의 Ra^* 값이고 $Ma_{c,0}^*$ 는 Ra^* 값이 0인 경우의 Ma^* 값이다. 그림에서 보듯이 부력과 표면장력의 변화는 자연대류를 일으키는데 서로 상승작용을 함을 알 수 있으며,

각각의 인자의 상관관계는 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$(Ma^*/Ma_{c,0}^*)^{1.02} + (Ra^*/Ra_{c,0}^*)^{1.02} = 1 \quad (38)$$

윗식은 Nield[6]가 정상상태에서 부력 및 표면장력의 변화에 의해 발생하는 자연대류 발생에 대한 연구에서 얻은 결과인 $Ma/Ma_{c,0} + Ra/Ra_{c,0}=1$ 의 관계와 비슷하다고 할 수 있다.

본 연구에서 다루어지고 있는 계에 대해서 Vidal과 Acrivos[15]는 프로판올(Propanol; $Pr=30$)에 대해서 실험을 하였고, 유체층의 깊이가 매우 얇아 부력 효과를 무시할 경우 표면장력의 변화에 의한 자연대류 발생에 대한 해석을 동결시간 모델(frozen-time model)을 사용하여 수행하였다. 또한 Gummertan과 Homsy[16]는 에너지법(energy method)을 사용하여, 역시 부력 효과를 무시하여 안정성 해석을 하였다. $Pr \geq 7$ 인 경우에는 Prandtl 수는 안정성 조건에 거의 영향을 미치지 않으므로[9], 본 연구의 $Pr \rightarrow \infty$ 의 결과를 $Pr=30$ 인 프로판올의 실험결과와 비교하는데 큰 문제는 없을 것이다. 위에서 언급된 이론적 해석결과들과 본 연구의 해석결과를 비교하기 위해 본 연구의 결과에서 부력효과를 무시한 경우의 자연대류 발생시점은 $Ma_{c,0}^*$ 로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tau_c = 10.22 Ma^{-1} \quad (39)$$

Foster[22]는 열 침투 깊이를 길이차원으로 하여 자연대류 발생시점을 예측할 경우, 예측된 해석결과는 실험적으로 측정된 자연대류 발생시점보다 4배 정도의 차이가 있다고 하였다. 이와 같은 관계는 전파이론을 적용하여 자연대류 발생시점을 해석한 많은 경우에서 볼 수 있는 현상이다[12, 23]. 이는 τ_c 에서 발생된 무한소의 교란이 실험적으로 관측될 수 있을 정도의 크기로 성장하는데 시간이 필요하다 것을 나타낸다고 추측되어진다. 이와 같은 현상을 본 연구에 적용하면 자연대류가 가시화되는 시간인 $4\tau_c$ 를 τ_c 라 하면, 표면장력의 변화에 의한 자연대류가 발생하는 시간 τ_c 는 같이 나타낼 수 있다.

$$\tau_c = 40.88 Ma^{-1} \quad (40)$$

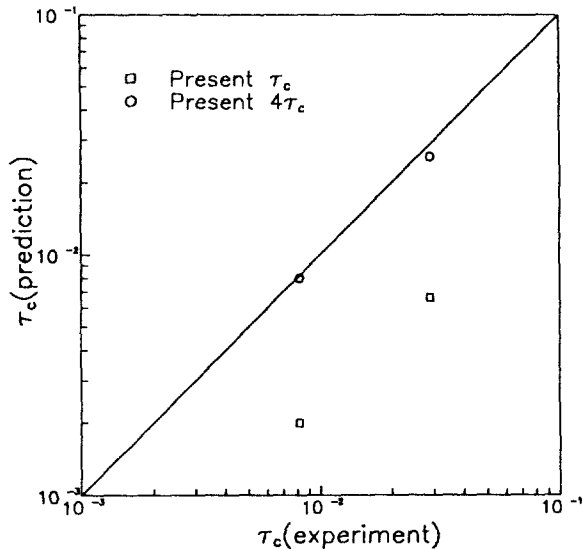


Fig. 7. Comparison of predicted times with experiments.

Fig. 5에는 위의 결과들이 종합되어 있다. 그림에서 보듯이 본 연구의 해석결과가 Vidal과 Acrivos[15]의 동결시간 모델이나 Gummermann과 Homsy[16]의 에너지법보다 실험결과를 잘 예측하고 있으며, $\tau_c=4\tau_c$ 의 관계도 성립하고 있음을 알 수 있다.

Vidal과 Acrivos[15]의 실험은 부력효과가 존재하는 영역에서 실험이다. 그러나, Vidal과 Acrivos[15]와 Gummermann과 Homsy[16]는 부력 효과를 무시한 경우에 대한 해석을 진행하였다. 본 연구에서는 실험결과를 좀더 엄밀히 설명하기 위하여 부력효과를 고려하는 해석을 진행하였다. 부력 및 표면장력의 변화는 자연대류를 일으키는데 서로 상승작용을 하므로 부력효과를 고려한 경우의 해석결과와 부력효과를 무시한 경우보다 자연대류 발생시점을 좀더 빨리 예측할 것이다. 이 경우의 해석결과는 Fig. 6에 나타나 있다. 부력 효과를 고려한 경우의 해석결과와 실험결과를 비교한 것이 Fig. 7에 나타나 있다. 그림에서 x축은 실험적으로 측정된 시간을 나타내며, y축은 실험조건에서 예측된 시간을 나타낸다. 그리고 그림에서 그려진 실선은 실험결과와 예측결과가 일치함을 나타내는 선이다. 그림에서 보듯이 본 연구의 해석결과는 실험결과를 잘 설명하여 주고 있다.

4. 결 론

윗면이 증발에 의해 일정 열속으로 냉각되는 수평유체층에서 부력 및 표면장력의 변화에 의하여 유발되는 자연대류 발생시점을 이론적으로 해석하였다. 열 침투 깊이를 길이차원으로 하고 교란량들의 시간에 따른 변화를 고려하는 전파이론을 적용하여 새로운 안정성 방정식을 유도하였고 이로부터 자연대류 발생시점을 해석하였다. 이 경우 자연대류 발생시점은 Prandtl 수, Rayleigh 수, Marangoni 수에 의하여 결정되었고 부력과 표면장력의 변화는 자연대류를 일으키는데 서로 상승작용을 함을 알 수 있었다. 전파이론에 의한 해석결과는 기존의 프로판올에 대한 실험결과를 잘 설명하여 주었다. 따라서 전파이론은 부력 및 표면장력의 변화에 의한 자연대류 현상을 해석하는데 유용한 방법이라 할 수 있다.

사용기호

- a : dimensionless wave number
a' : modified wave number, $a\delta$

- d : fluid layer thickness
D : differential operator with respect to ζ
g : gravitational acceleration
 H_i : arbitrary constant used in Eq. (24)
 $H_{\zeta-1}$: unit step function
k : thermal conductivity
Ma : Marangoni number, $\gamma q d^4 / k \alpha v$
Ma' : modified Marangoni number, $Ma \delta^2$
P : pressure
Pr : Prandtl number, v/α
q : heat flux
Ra : Rayleigh number, $g \beta q d^4 / k \alpha v$
Ra' : modified Rayleigh number, $Ra \delta^4$
S : surface tension
s : $\zeta - 1$
T : temperature
t : time
U : velocity
W : vertical velocity component
w : dimensionless velocity component of vertical direction
x, y, z : dimensionless Cartesian coordinate
Z : vertical distance

그리스 문자

- α : thermal diffusivity
 β : thermal expansion coefficient
 δ : thermal penetration depth
 δ_{kl} : Kronecker delta
 γ : $-dS/dT$
 ζ : similarity variable, z/δ
 θ : dimensionless temperature
 ν : kinematic viscosity
 μ : viscosity
 ρ : density
 τ : dimensionless time

상첨자

- * : amplitude function for perturbation quantities

하첨자

- c : critical state
o : observable state
r : reference state
0 : base quantities
1 : disturbed quantities

참고문헌

1. Benard, H.: *Ann. Chem. Phys.*, **23**, 14(1901).
2. Lord, R.: *Philos. Mag.*, **32**, 529(1916).
3. Person, J. R. A.: *J. Fluid Mech.*, **4**, 489(1958).
4. Zierep, J. and Ortel, H. Jr.: "Convective Transport and Instability Phenomena", G. Braun, Karlsruhe(1982).
5. Scriven, L. E. and Sterling, C. V.: *J. Fluid Mech.*, **19**, 321 (1964).

6. Nield, D. A.: *J. Fluid Mech.*, **19**, 341(1964).
7. Lee, G. J., Kim, M. C. and Choi, C. K.: Proc 1st Int. Conf. Transport Phenomena in Processing, 774(1993).
8. Foster, T. D.: *Phys. Fluids*, **8**, 1249(1965).
9. Wankat, P. C. and Homsy, G. M.: *Phys. Fluids*, **20**, 1200(1977).
10. Jhavary, B. S. and Homsy, G. M.: *J. Fluid Mech.*, **114**, 251 (1982).
11. Choi, C. K., Shin, C. B. and Hwang, S. T.: Proc. 8th Int. Heat Transfer Conf., **3**, 1389(1984).
12. Yoon, D. Y. and Choi, C. K.: *Korean J. Chem. Eng.*, **6**, 144 (1989).
13. Kim, M. C., Choi, C. K. and Davis, E. J.: *Int. J. Eng. Fluid Mech.*, **3**, 71(1990).
14. Chun, Y. H. and Choi, C. K.: *Hwahak Konghak*, **29**, 381(1991).
15. Vidal, A. and Acrivos, A.: *I&EC Fund.*, **7**, 53(1968).
16. Gummerman, R. J. and Homsy, G. M.: *J. Fluid Mech.*, **68**, 191 (1975).
17. Özisik, M. N.: "Heat Conduction", John-Wiley, New York(1980).
18. Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C.: "Conduction of Heat in Solids", Oxford Univ. Press, England(1959).
19. Davis, E. J. and Choi, C. K.: *J. Fluid Mech.*, **81**, 565(1977).
20. Sparrow, E. M., Goldstein, R. J. and Jonsson, V. K.: *J. Fluid Mech.*, **18**, 513(1964).
21. Mathews, J. and Walker, R. L.: "Mathematical Method of Physics", Benjamin, California(1973).
22. Foster, T. D.: *Phys. Fluids*, **12**, 2482(1969).
23. Lee, J. D., Choi, C. K. and Shin, C. B.: *Int. Chem. Eng.*, **30**, 761(1990).