

위로부터 응고되는 점도변화 용융액의 열적 불안정성

황인국 · 최창균*

서울대학교 공과대학 화학공학과
(1996년 3월 13일 접수, 1996년 6월 17일 채택)

Thermal Instability of a Variable-Viscosity Melt Solidified from Above

In Gook Hwang and Chang Kyun Choi*

Department of Chemical Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742
(Received 13 March 1996; accepted 17 June 1996)

요 약

전파이론에 근거하여 위로부터 순수한 단일성분 용융액이 냉각되어 응고될 때 열적 불안정성에 대해 선형안정성 이론으로 조사하였다. 열경계층의 두께를 길이척도로 설정하여 선형 교란방정식을 유사변환하였다. 용융액에서 온도에 따른 점도변화를 고려하여 부력에 의한 대류발생조건을 수치해법으로 구하였다. 본 연구결과, 임계 열 Rayleigh 수의 값은 고체-액체 무차원 상변화율이 증가함에 따라 증가하지만, Prandtl 수와 Stefan 수가 증가하면 임계값은 감소하는 것을 알 수 있었다. 또한 점도변화의 효과는 계를 안정하게 하고, 대류발생시에 응고계면 바로 아래에 정체층이 생기게 됨을 알 수 있었다.

Abstract—Thermal instability during solidification of a pure melt cooled from above was investigated under a linear stability theory by using the propagation theory. The linearized disturbance equations were transformed similarly by using the thermal boundary-layer thickness as the length scaling factor. The onset conditions of buoyancy-driven convection of the melt with temperature-dependent viscosity were obtained numerically. The results showed that the critical thermal Rayleigh number increases with increasing the dimensionless phase-change rate of a solid-liquid interface, while it decreases with increasing the Prandtl number and Stefan number. Also, it was found that the effect of variable viscosity makes the system more stable and a stagnant layer forms beneath the interface at the onset of convection.

Key words: Propagation Theory, Rayleigh Number, Solidification, Thermal Instability, Variable Viscosity

1. 서 론

응고시 자연대류에 관한 연구는 자연계에서 쉽게 찾아볼 수 있는 호수나 강의 결빙, 지표의 냉각으로 인한 마그마의 응고 등으로부터 산업계의 금속재료공정, 에너지 저장, 금속합금 분야 및 결정성장 등의 응고공정 등에서 중요한 역할을 하고 있다. 자연대류는 생성되는 고체재료의 균일성 등에 좋지 않은 영향을 준다고 알려져 있다. 이와 관련하여 용융액의 밀도 차이로 인한 응고시의 자연대류는 실험과 이론의 측면에서 연구가 이루어져 왔다[1-5].

위로부터 냉각되는 시간의존성 응고계에서는 응고계면 아래의 열경계층에서 용융액의 밀도차이가 있으므로 중력장 하에서 자연대류가 일어난다. 본 연구의 관심은 이와 같은 Stefan 유형의 응고문제[6]에서 고체층이 성장하여 용융액에서의 온도분포가 시간에 따라 변하게 될 때 열적 불안정성에 대한 것이다.

시간의존형 계에서 대류 불안정성 문제는 동결시간모델(frozen-time model)[7], 증폭이론(amplification theory)[8], 추계모델(stochastic model)[9], 에너지법(energy method)[10] 등의 여러 해석 방법으

로 조사되어 왔다. 시간의존형 계에 대한 이러한 모델들은 다소 복잡한 반면에 전파이론(propagation theory)은 교란량들의 시간의존성을 고려하기 위해 열경계층의 두께를 길이척도로 하여 교란식을 유사변환하고 임계조건을 결정한다. 전파이론은 시간의존성 비선형 온도분포 하에서 안정성 해석에 적용하는 이론으로 여러 계에서 그 타당성이 입증되었다. 전파이론은 열침투 깊이를 활용하여 급격한 가열이나 일정한 온도 가열계 등의 해석에서 좋은 결과를 얻고 있으며, 기존의 실험결과들과 잘 일치하는 대류발생시점을 예측할 수 있었다[11-13].

본 연구에서는 위로부터 냉각되는 응고계에서 용융액의 온도에 따른 점도변화의 영향을 선형안정성 이론과 전파이론을 적용하여 수치해법으로 조사하였다. 점도변화 유체층에 대한 대류 불안정성의 연구는 Rayleigh-Benard 대류 문제를 확장하여 이루어져 왔다[14-19]. 응고속도가 일정한 계인 Smith[19]의 연구와는 달리 본 연구는 시간의존성 응고계에 대해 대류발생 임계조건과 관련인자의 효과를 조사하였다. 본 연구는 응고공정에서 생산되는 제품의 질적 향상에 유용할 것이며, 온도에 따른 점도변화가 큰 고분자 유체의

재료공정과 맨틀의 대류 등을 다루는 지구물리학 등에 그 응용성을 가질 수 있다.

2. 안정성 해석

2-1. 지배방정식 및 기본온도분포

위로부터 냉각되는 순 물질의 응고계를 Fig. 1에 개략적으로 나타내었다. 초기에 온도 T_∞ 로 유지되고 있는 용융액을 시간 $t=0$ 에서 윗면으로부터 온도 T_A 로 갑자기 냉각시킨다. T_A 가 녹는점보다 낮으면 시간이 지남에 따라 냉각계면으로부터 응고가 진행된다. 응고계면의 위치 $H(t)$ 는 시간에 따라 변하는 이동계면이며, 이 고체-액체 계면은 평평하다고 가정한다. 응고계면의 온도는 녹는점으로써 일정하게 T_H 로 유지된다. 용융액의 점도변화를 고려하여 고체상과 액체상에서의 지배방정식을 적어보면 다음과 같다.

고체의 경우:

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \kappa_s \nabla^2 T_s \quad (1)$$

액체의 경우:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) T_L = \kappa_L \nabla^2 T_L \quad (2)$$

$$\rho_\infty \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) \mathbf{U} = -\nabla P + \rho g \mathbf{e}_z + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)] \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (4)$$

$$\rho = \rho_\infty [1 - \alpha (T_L - T_\infty)] \quad (5)$$

여기서 고체와 액체의 밀도는 같다고 가정하였으며, 액체는 비압축성 뉴턴 유체이다. t 는 시간, T 는 온도, \mathbf{U} 는 속도벡터, P 는 압력이다. κ , ρ , μ , g , \mathbf{e}_z , α 는 각각 열확산계수, 밀도, 점도, 중력 가속도, 수직방향 단위벡터, 열팽창계수를 나타낸다. 하첨자 'S', 'L', ' ∞ '는 각각 고체상, 액체상, 계면에서 먼 지점을 나타내고, 상첨자 'T'는 전치행렬을 표시한다. 식 (3)에는 점도변화가 고려되었고, Boussinesq 근사법이 적용되었다. 온도에 따라 변하는 점도를 나타내는 상태식은 다음과 같다.

$$\mu = \mu_\infty \exp[-C(T_L - T_\infty)] \quad (6)$$

여기서 μ_∞ 는 초기온도 T_∞ 에서 용융액의 점도이며, C 는 상수이다. 식 (6)은 Stengel 등[16]과 Smith[19]가 사용한 바 있는 지수함수형의 점도에 대한 상태식이다.

고체상과 액체상에서 기본온도는 다음과 같다.

$$T_{S,0} = T_A + \frac{(T_H - T_A) \operatorname{erf}(\eta/\sqrt{\kappa_L})}{\operatorname{erf}(\lambda/\sqrt{\kappa_L})} \quad \text{for } \eta < \lambda \quad (7)$$

$$T_{L,0} = T_\infty + \frac{(T_H - T_\infty) \operatorname{erfc}(\eta)}{\operatorname{erfc}(\lambda)} \quad \text{for } \eta > \lambda \quad (8)$$

여기서 $\kappa_L (= \kappa_S/\kappa_L)$ 는 열확산계수의 비이며, $\eta [= Z/2(\kappa_L t)^{1/2}]$ 는 유사변수이다. 하첨자 '0'는 기본상태를 나타낸다. 계면의 위치 H 는 $H(t) = 2\lambda(\kappa_L t)^{1/2}$ 의 관계를 가지며, 여기서 상수 λ 는 고체-액체 무차원 상변화율(dimensionless phase-change rate)을 나타낸다. 응고계면에서 에너지 보존에 관한 조건은 다음과 같다.

$$La \frac{dH}{dt} = \kappa_S \left(\frac{\partial T_{S,0}}{\partial Z} \right) - \kappa_L \left(\frac{\partial T_{L,0}}{\partial Z} \right) \quad (9)$$

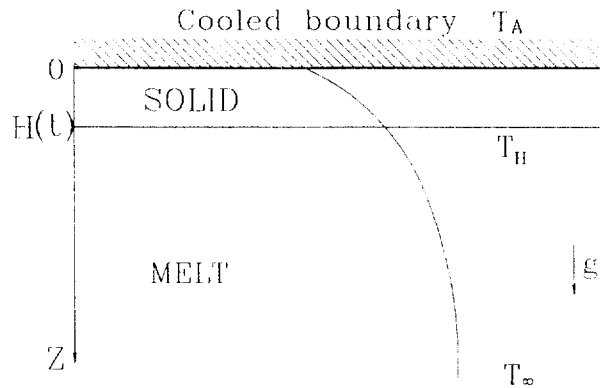


Fig. 1. Schematic diagram of directional solidification system cooled from above.

여기서 La 는 고체 단위부피당 잠열을 나타내며, dH/dt 는 계면의 속도, κ 는 열전도도이다. 식 (9)를 무차원 변수로 나타내면 다음의 관계를 얻을 수 있고, 이로부터 λ 를 결정할 수 있다.

$$\sqrt{\pi} \lambda St = \frac{\kappa_s}{\theta_\infty \sqrt{\kappa_L}} \frac{e^{-\lambda^2/\kappa_L}}{\operatorname{erf}(\lambda/\sqrt{\kappa_L})} - \frac{e^{-\lambda^2}}{\operatorname{erfc}(\lambda)} \quad (10)$$

여기서 St 는 Stefan 수 $[= La/(C_p \Delta T)]$ 이고, θ_∞ 는 $(T_\infty - T_H)/(T_H - T_A)$ 을 나타낸다. $\Delta T (= T_\infty - T_H)$ 는 액상에서 온도차이며, C_p 는 액체 단위부피당 비열을 나타낸다. $\kappa_L (= \kappa_S/\kappa_L)$ 는 열전도도의 비이다. 액체상에서 무차원화된 기본온도는 다음과 같다.

$$\theta_{L,0} = \frac{T_{L,0} - T_\infty}{\Delta T} = -\frac{\operatorname{erfc}(\eta)}{\operatorname{erfc}(\lambda)} \quad \text{for } \eta > \lambda \quad (11)$$

2-2. 선형안정성 이론

선형안정성 이론에서는 교란상태의 온도, 속도, 압력 등의 물리량을 기본량과 무한소의 교란량의 합으로 나타낸다. 지배방정식으로부터 선형화된 무차원 교란식을 얻으면 다음과 같다.

고체의 경우:

$$\frac{\partial \theta_{S,1}}{\partial \tau} = \kappa_S \nabla^2 \theta_{S,1} \quad (12)$$

액체의 경우:

$$\frac{\partial \theta_{L,1}}{\partial \tau} + R_T w_1 \frac{\partial \theta_{L,0}}{\partial z} = \nabla^2 \theta_{L,1} \quad (13)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla^2 w_1) + \frac{\partial^2 \bar{\mu}}{\partial z^2} \left(\nabla^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w_1 - 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial z} \nabla^2 \frac{\partial w_1}{\partial z} - \bar{\mu} \nabla^4 w_1 = -\nabla_z^2 \theta_{L,1} \quad (14)$$

여기서 하첨자 '1'은 교란상태를 나타내며, $\bar{\mu} (= \mu/\mu_\infty)$ 는 μ_∞ 로 무차원화된 점도를 나타낸다. $\nabla_z^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 는 이차원 라플라스 연산자이다. $\theta_{L,1} \left(= \frac{g \alpha \Delta T L^3}{\kappa_L v} T_{L,1} \right)$ 은 온도교란을 $\Delta T/R_T$ 의 척도를 사용하여 무차원화한 것이다. L 은 임의의 길이척도이며, v 는 동점도이다. z , w , τ 는 각각 L , κ_L/L , L^2/κ_L 로 무차원화되었다. $R_T [= g \alpha \Delta T L^3/(\kappa_L v)]$ 는 열 Rayleigh 수를 나타내며, $Pr (= v/\kappa_L)$ 은 Prandtl 수를 나타낸다. 무차원 교란식 (12)-(14)에서 나타나는 교란량들을 정규형태로 표시하면 다음과 같다.

$$(w_1, \theta_{s,1}, \theta_{t,1}) = [w_1^*(\tau, z), \theta_{s,1}^*(\tau, z), \theta_{t,1}^*(\tau, z)] \exp[i(a_1 x + a_2 y)] \quad (15)$$

여기서 상첨자 '*'는 교란의 진폭을 나타내며, i 는 허수이다. 식 (15)는 임의의 교란이 파수 $a=(a_1^2 + a_2^2)^{1/2}$ 를 가지는 2차원 주기파의 특성을 보인다는 것을 뜻한다. 식 (15)를 앞의 무차원 교란식 (12)-(14)에 대입하면 다음의 무차원 교란식들을 얻는다.

고체의 경우:

$$\left[\frac{1}{\kappa_r} \frac{\partial}{\partial \tau} - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right) \right] \theta_{s,1}^* = 0 \quad (16)$$

액체의 경우:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right) \right] \theta_{t,1}^* = -R_T w_1^* \frac{\partial \theta_{t,0}}{\partial z} \quad (17)$$

$$\left[\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau} - \bar{\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right) - 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right] \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right) w_1^* - \frac{\partial^2 \bar{\mu}}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + a^2 \right) w_1^* = a^2 \theta_{t,1}^* \quad (18)$$

2-3. 전파이론

무차원 교란식에는 시간의존성을 나타내는 $\partial(\cdot)/\partial\tau$ 의 항이 들어있다. 시간의존형 안정성 문제와 관련하여, 동결시간모델[7]은 교란식에서 $\partial(\cdot)/\partial\tau$ 를 무시하고 기본상태의 시간의존성만을 고려한다. 증폭이론[8]과 추계모델[9]은 교란량들의 시간에 따른 변화를 고려하기 위해 교란식을 초기치 문제로 해석하기 때문에 $\tau=0$ 에서 적절한 초기조건이 필요하다. 그러나 전파이론은 대류발생시의 교란이 주로 열경계층내에서 전파된다는 가정 아래 유사변수를 사용하여 임계조건을 찾는다.

대류발생 임계조건에서 열경계층의 두께 Δ_T 를 사용하여 지배방정식 (2)와 (3)으로부터 각각 다음과 같은 척도해석(scale analysis)을 가정할 수 있다.

$$\frac{\partial T_{L,1}}{\partial \tau} \sim W_1 \frac{\partial T_{L,0}}{\partial Z} \sim \kappa_L \nabla^2 T_{L,1} \sim \frac{\kappa_L T_{L,1}}{\Delta_T^2} \quad (19)$$

$$\rho_\infty g \alpha T_{L,1} \sim \mu \nabla^2 W_1 \sim \mu \frac{W_1}{\Delta_T^2}, \quad W_1 \sim \frac{\rho_\infty g \alpha \Delta_T^2}{\mu} T_{L,1} \quad (20)$$

위의 식 (19)의 두 번째 항으로부터 다음의 새로운 관계를 얻는다.

$$\frac{\partial T_{L,0}}{\partial Z} \sim \frac{\kappa_L v}{g \alpha \Delta_T^2} = \frac{\Delta T}{\Delta_T} \left(\frac{g \alpha \Delta T \Delta_T^3}{\kappa_L v} \right)^{-1} = \frac{\Delta T}{\Delta_T} R_{\Delta_T}^{-1} \quad (21)$$

여기서 R_{Δ_T} 는 Δ_T 에 근거한 열 Rayleigh 수이다. 식 (20)을 보면 임계 시간 t_c 에서 Δ_T 가 작아지면 수직 속도교란 W_1 도 작아질 것이라고 생각할 수 있다. R_T 가 증가하면 무차원 임계시간 τ_c 와 해당하는 열 경계층의 두께 Δ_T 도 작아질 것이고 $R_T(\Delta_T/L)^3$, 즉, R_{Δ_T} 는 상수가 될 것이다. 또한 임계시점에서 $R_T \tau_c^{3/2}$ 도 상수가 될 것이다. 이와 관련하여 실험적 증거들은 Foster[8]가 시간의존형 등은 가열계에서 Rayleigh-Benard 대류를 연구한 이래, Gresho와 Sani[7], Jhaveri와 Homsy[9], Blair와 Quinn[20], Patrick과 Wragg[21], Davaille와 Jaupart[14] 등의 연구에서 찾을 수 있다.

이와 같은 척도해석 하에 전파이론은 무차원 열경계층 두께에 비

례하는 길이 척도로 $\delta=2\tau^{1/2}$ 을 도입하고, 유사변수로서는 기본온도분포를 구하는데 사용된 $\eta[=Z/2(\kappa_L t)^{1/2}=z/\delta]$ 를 도입한다. 또한 교란량들의 진폭함수들은 다음과 같은 관계로 변환한다.

$$[w_1^*(\tau, z), \theta_{s,1}^*(\tau, z), \theta_{t,1}^*(\tau, z)] = [\delta^2 w^*(\eta), \theta_s^*(\eta), \theta_t^*(\eta)] \quad (22)$$

w_1^* 는 시간의존형 함수이지만, w^* 는 유사변수의 함수로서 나타내어진다. 식 (22)를 무차원 교란식 (16)-(18)에 대입하면 다음과 같은 안정성 방정식들을 얻는다.

고체의 경우:

$$(D^2 + \frac{2}{\kappa_r} \eta D - a^2) \theta_s^* = 0 \quad (23)$$

액체의 경우:

$$(D^2 + 2\eta D - a^2) \theta_t^* = R_T^* w^* D \theta_{t,0} \quad (24)$$

$$[\bar{\mu}(D^2 - a^2) + 2D\bar{\mu}D](D^2 - a^2) w^* + \frac{2}{Pr}(\eta D^3 - a^2 \eta D + 2a^2) w^* + D^2 \bar{\mu}(D^2 + a^2) w^* = -a^2 \theta_t^* \quad (25)$$

여기서 $D=d/d\eta$, $a^*=a\delta$, $R_T^*=R_T \delta^3$ 이다. 고유치로 얻어지는 보정된 열 Rayleigh 수 R_T^* 와 보정된 무차원 파수 a^* 는 열경계층 두께를 길이 척도로 가진다.

무차원 점도식은 식 (6)과 (11)로부터 다음과 같이 나타내어진다.

$$\bar{\mu} = \exp \left(\mu_r \frac{\text{erfc}(\eta)}{\text{erfc}(\lambda)} \right) \quad (26)$$

여기서 $\mu_r = C\Delta T = \ln(\mu_\infty/\mu_0)$ 은 액체에서 점도차이를 나타내는 매개변수이다. μ_∞ 는 응고계면의 온도 T_H 에서 점도를 나타낸다. 무차원 교란량들에 대한 경계조건은 다음과 같이 적용한다.

$$(\eta=0)$$

$$\theta_s^* = 0 \quad (27)$$

$$(\eta=\lambda)$$

$$\theta_s^* = \theta_t^*, \quad \kappa_r D \theta_s^* = D \theta_t^* \quad (28)$$

$$w^* = D w^* = 0 \quad (29)$$

$$(\eta=\infty)$$

$$\theta_t^* = w^* = D^2 w^* = 0 \quad (30)$$

여기서 식 (27)은 냉각면에서 일정온도조건을 나타내며, 식 (28)-(29)는 고체-액체 계면에서 온도의 연속조건, 열속의 연속조건, 속도에 대해 고정경계조건을 사용한 것이다. 식 (30)은 액체층의 깊이가 한정되지 않는 반무한(semi-infinite) 영역에서 일정온도조건과 속도에 대해 자유조건을 나타낸다.

3. 결과 및 토론

3-1. 수치해법

자연대류의 임계조건을 구하기 위해서 안정성 방정식과 경계조건을 만족하는 고유치 R_T^* , a^* 를 구하여 그 최소값을 찾아야 한다. 본 연구에서는 수치해법으로 Runge-Kutta-Gill의 방법을 사용하였다. 우선 고체층의 안정성 방정식은 다른 식들과 결부되어 있지 않으므로 $\eta=\lambda$ 에서 θ_s^* , $D\theta_s^*$ 를 가정하여 초기치 문제로 해를 구할 수 있다. 액체층으로 적분을 위해 $\eta=\lambda$ 에서 k_r 을 주면 다시 경계조건에 의해

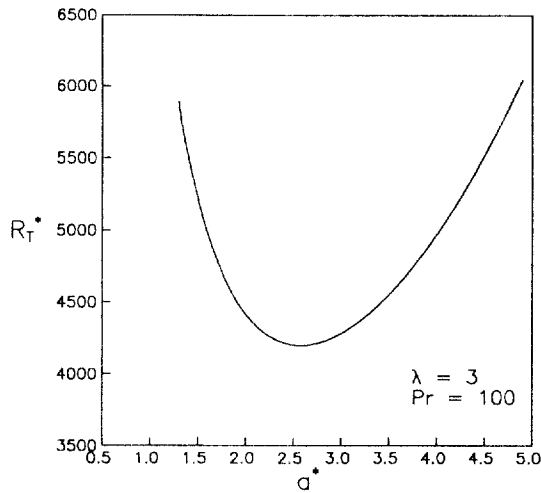


Fig. 2. Marginal stability curve with $\lambda=3$ and $Pr=100$.

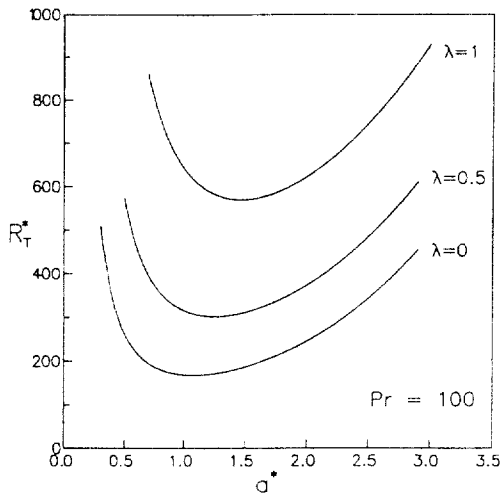


Fig. 3. Marginal stability curves for various values of dimensionless phase-change rate λ with $Pr=100$.

θ_1^* , $D\theta_1^*$ 의 값으로 지정되게 된다. 본 연구에서 λ 는 유사변수 η 를 사용했을 때, 응고계면의 위치를 정해주는 상수이므로 안정성 방정식을 풀 때 매개변수로 취급하였다. κ , Pr , a^* 를 주고 고유치의 크기를 고정하기 위해서 D^2w^* 를 임의의 값으로 놓고, R_T^* , θ_1^* , $D\theta_1^*$, D^3w^* 를 가정 한 후에 $\eta=\lambda$ 에서 $\eta=0$ 까지 고체층의 안정성 방정식을 적분하고, $\eta=\lambda$ 에서 $\eta=\infty$ 까지 액체의 안정성 방정식을 적분하게 된다. $\eta=0$ 과 $\eta=\infty$ 의 경계 조건을 만족시킬 때까지 Newton-Raphson 방법으로 4개의 가정값을 다시 가정하여 계산한다. $\eta=\infty$ 의 조건을 위해 η 의 값을 η_a 변화도 컴퓨터 계산결과가 변하지 않는 8-10 정도의 값으로 충분하게 놓았다. 경계조건과의 오차를 10^{-10} 정도로 무시할 수 있을 때까지 계산을 반복하여 수행하였다.

3-2. $\mu_s=0$ 일 때 임계조건

지배 방정식과 경계조건에 나오는 주요 매개변수는 Pr , κ , k_s , λ , μ_s 이다. 본 연구에서는 수치계산을 위해 매개변수의 값으로 $\kappa=1$, $k_s=1$ 을 기본적인 값으로 두었다. 우선 점도변화가 없는 경우인 $\mu_s=0$ 일 때 임계조건을 조사하였다. Fig. 2에 $Pr=100$ 일 때, λ 의 값이 3인 경우에 대해 한계 안정성 곡선을 나타내었다. 이 한계 안정성 곡선은 주어진 파수 a^* 에 대하여 고유치로 구해진 R_T^* 들로부터 얻어졌다. 임

Table 1. Predicted values of $R_{T,c}^*$ and a_c^* for various values of dimensionless phase-change rate λ with $Pr=100$

λ	0	0.5	1	3
$R_{T,c}^*$	167.8	302.2	569.62	4207.3
a_c^*	1.08	1.25	1.47	2.58

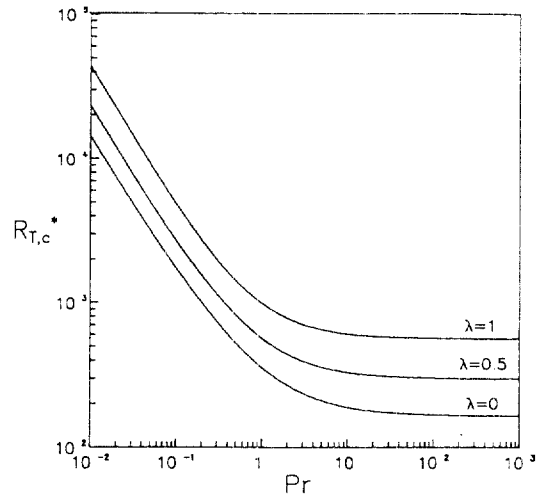


Fig. 4. Effect of Prandtl number Pr on modified critical thermal Rayleigh number $R_{T,c}^*$ for various values of λ .

계 열 Rayleigh 수 $R_{T,c}^*$ 는 파수 a^* 에 대해 구해진 최소의 열 Rayleigh 수이다. Fig. 3에는 $Pr=100$ 일 때, λ 의 값이 0, 0.5, 1인 경우에 대해 한계 안정성 곡선을 나타내었다. λ 를 증가시키면 $R_{T,c}^*$ 가 증가함을 알 수 있다. 본 연구에서 $\lambda=0$ 이면 윗면이 일정온도로 냉각되는 계 혹은 밑면이 일정온도로 가열되는 계와 같아진다. Table 1에 λ 에 따른 임계값들을 나타내었다. λ 는 무차원 상변화율을 나타내므로 상변화율이 클수록, 즉 응고속도가 클수록 대류는 더 늦게 발생한다고 생각할 수 있다. 이는 상변화율이 더 증가하면 계면 근처에서 열경계층의 발달이 지연되어 대류발생시점이 더 늦어진다고 물리적으로 설명할 수 있다. Smith[19]는 위로부터 응고가 일정한 속도로 진행되는 계에서 열적 대류에 대해 조사하여, 응고속도가 증가하면 계는 안정해진다고 하였다. 이는 본 연구의 결과와 같은 추세를 보이는 내용이다.

Prandtl 수의 영향을 알아보기 위해 여러 Pr 값에 대해서 구해진 임계값을 Fig. 4와 5에 도시하였다. λ 값은 0, 0.5, 1에 대해 계산을 수행하였다. Prandtl 수가 커질수록 임계값 $R_{T,c}^*$ 와 a_c^* 는 더 작아짐을 알 수 있으며, Pr 이 100 이상이면 임계값의 변화가 거의 없음을 알 수 있다. λ 의 값이 달라도 Prandtl 수에 따라 임계값이 변하는 경향은 비슷하다. Fig. 4에서 $\lambda=1$ 인 경우에 $R_{T,c}^*$ 를 다음과 같이 Pr 에 대한 상관식으로 표현할 수 있다.

$$R_{T,c}^* = 565 \left(1 + \frac{0.768}{Pr} \right) \quad \text{for } \lambda = 1 \quad (31)$$

위의 상관식은 $R_{T,c}^*$ 와 Pr 의 곱을 Pr 에 따라 도식해 본 결과, 선형으로 비례한다는 것을 확인하고 얻어진 것이다. 위의 상관식으로 얻어지는 $R_{T,c}^*$ 를 실제 계산값과 비교하면 오차는 1% 이내이다. Pr 값이 커지면 상대적으로 열확산이 운동량확산보다 작아지므로, 불안정한 열경계층의 발달로 인해 대류발생 가능성이 커진다고 볼 수 있다. 또한 Pr 은 식 (18)에서 보듯이 교란의 성장률과 관련된 $\partial w_1^* / \partial \tau$ 의 항에 있는 매개변수이다. 선형온도분포를 갖는 Rayleigh-Bernard계나

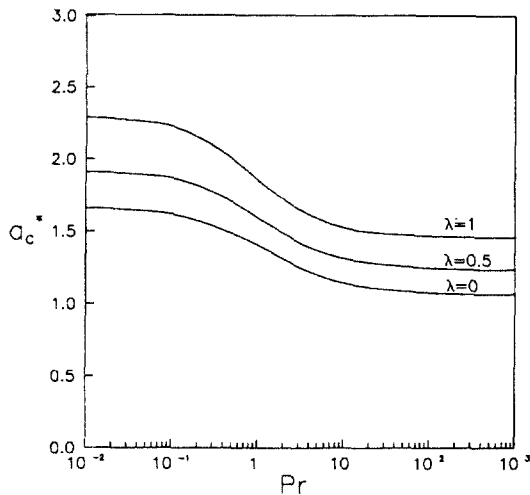


Fig. 5. Effect of Prandtl number Pr on modified critical wave number a_c^* for various values of λ .

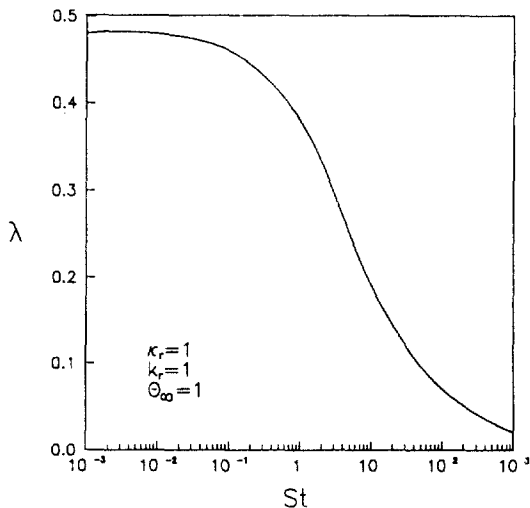


Fig. 6. Variation of dimensionless phase-change rate λ with Stefan number St .

동결시간모델에서는 이러한 Pr 의 효과를 볼 수 없는데, 본 연구는 시간의존형 계를 다루고 있기 때문에 Pr 의 영향을 볼 수 있다.

주요한 무차원 수인 Stefan 수는 식 (10)에 보듯이 λ 를 결정하는 매개인자이다. 응고는 고체상 쪽으로 잠열을 신속히 제거해 줌으로써 이루어지는데, Stefan 수는 응고시의 잠열을 포함하고 있다. Fig. 6에 식 (10)으로부터 $\kappa_r=1$, $k_c=1$, $\theta_\infty=1$ 일 때 얻어진 λ 와 St 의 관계를 나타내었다. St 값이 증가할수록 λ 가 감소하며, λ 의 차수(order)는 0.1 정도임을 알 수 있다. Fig. 6의 λ 와 St 의 관계로부터 $R_{T,c}^*$ 와 St 의 관계를 구하면 Fig. 7과 같다. St 가 증가할수록 $R_{T,c}^*$ 는 감소한다. 따라서 응고시에 잠열이 크면 상변화율이 작아지고 액체층에서 열경계층의 발달로 인해 계가 더 불안정해진다고 추측할 수 있다.

3-3. 점도변화의 효과

다음으로 위의 연구를 확장하여 온도에 따른 용융액의 점도변화의 효과를 알아보았다. Fig. 8에 $Pr=1000$, $\lambda=0$ 일 때, μ_r 의 변화에 따른 중립 안정성 곡선을 나타내었다. μ_r 이 증가할수록, 즉 액체에서 점도차이가 클수록 임계 열 Rayleigh 수가 증가함을 알 수 있다. 이

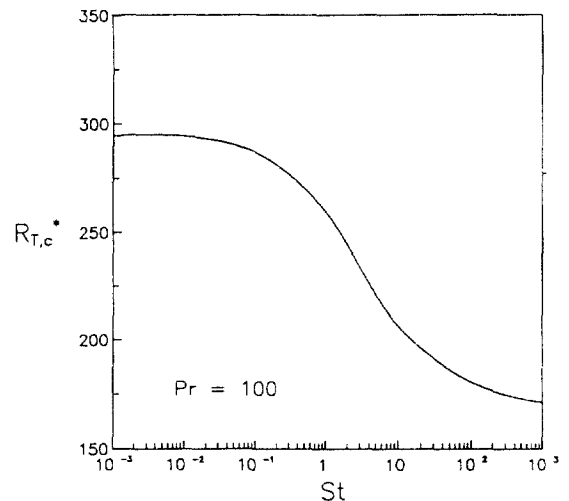


Fig. 7. Effect of Stefan number St on modified critical thermal Rayleigh number $R_{T,c}^*$ with $Pr=100$.

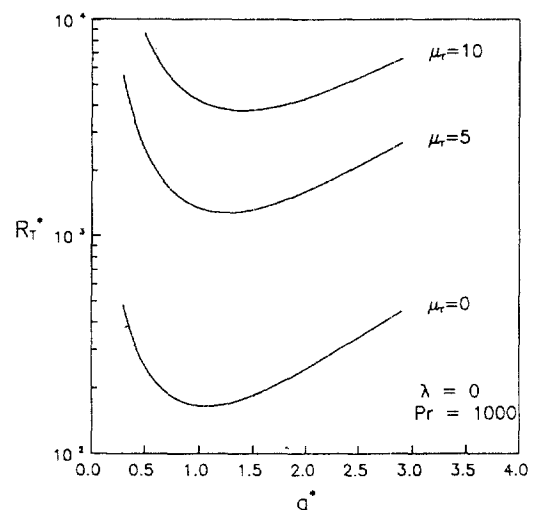


Fig. 8. Marginal stability curves for various values of parameter μ_r with $\lambda=0$ and $Pr=1000$.

Table 2. Predicted values of $R_{T,c}^*$ and a_c^* for various values of parameter μ_r with $Pr=1000$ and $\lambda=0$

λ	0	1	5	10
$R_{T,c}^*$	165.6	262.6	1281.0	3809.6
a_c^*	1.08	1.11	1.26	1.40

는 윗면이 냉각되어 유체층의 위쪽의 점도가 증가하면 전체적으로 계가 더 안정하게 됨을 의미한다. $\mu_r=0$ 이면 온도에 따른 점도변화가 없는 계에 해당한다. Table 2에 μ_r 에 따른 임계값들을 나타내었다.

윗면이 냉각되어 응고가 진행되는 경우인 $\lambda=1$ 일 때, $Pr=1000$ 으로 놓고 속도 및 온도 교란량들의 분포를 $\mu_r=0$ 과 $\mu_r=10$ 에 대해 비교하여 Fig. 9와 10에 나타내었다. 교란량들의 크기는 각각의 최대값으로 정규화하여 나타내었다. Fig. 9에서 $\mu_r=10$ 이면 $\mu_r=0$ 일 때보다 윗면 부근에서 속도교란량이 약해짐을 알 수 있다. 속도교란과 온도교란의 분포를 보면 대류가 발생하는 깊이는 약 $\eta=7$ 까지이고, 온도가 교란되는 깊이는 약 $\eta=3$ 까지이다. $\lambda=1$ 이면 $\eta=1$ 이상이 액체영역이므로

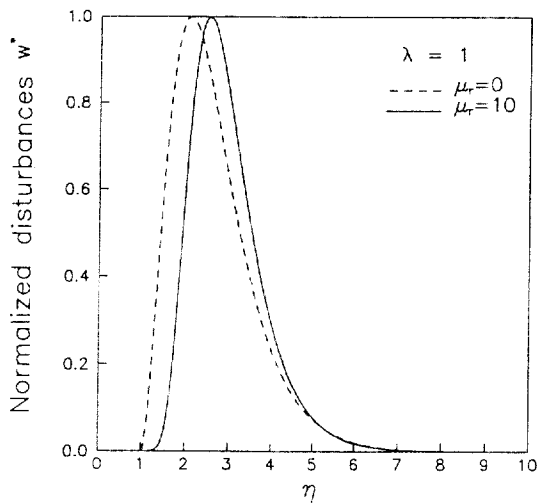


Fig. 9. Distributions of velocity disturbances for two different values of parameter μ_r , with $\lambda=1$ and $Pr=1000$.

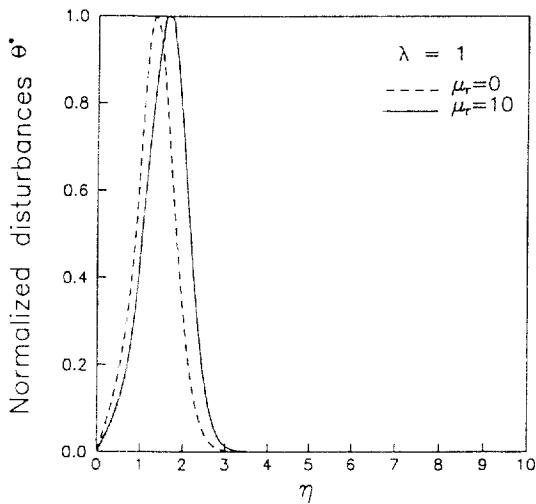


Fig. 10. Distributions of temperature disturbances for two different values of parameter μ_r , with $\lambda=1$ and $Pr=1000$.

로, 속도교란의 분포는 $\eta=1$ 이상에서 존재한다. $\lambda=1$, $\mu_r=10$ 에 해당하는 2차원 대류 roll의 유선(streamline)의 윤곽선을 Fig. 11에 나타내었다. $\lambda=1$, $\mu_r=10$, $Pr=1000$ 일 때 임계값은 $R_{Tc}^*=8209.4$, $a_c^*=1.74$ 이다. 임계시점에서 응고계면 바로 아래에서 높은 점도를 갖는 유체층이 있기 때문에 대류가 생기지 않는 정체층이 나타남을 알 수 있다. 이와 같은 결과는 Smith[19]의 이론적 연구결과나 Davaille와 Jaupt[14]의 실험적 연구결과에서도 찾아볼 수 있다.

Prandtl 수의 영향을 조사하기 위하여 Fig. 12에는 $\lambda=1$, $\mu_r=10$, $Pr=1$ 일 때 속도 및 농도교란의 분포를 나타내었다. $Pr=1$ 일 때 임계값은 $R_{Tc}^*=11386$, $a_c^*=2.03$ 로서 $Pr=1000$ 일 때의 임계값보다 더 크다. 또한 Fig. 12를 Fig. 9와 10의 $\mu_r=10$ 인 경우와 비교하면 온도교란은 Prandtl 수에 별로 영향받지 않으나, 속도교란은 다소 영향을 받는 것을 알 수 있다. 즉 Pr 값이 감소하면 대류가 발생하는 깊이가 작아지는 경향을 찾을 수 있다. Prandtl 수는 동점도와 열확산계수의 비이다. Prandtl 수가 작아지면 운동량 전달능력이 상대적으로 작아지기 때문에 대류가 발생하는 깊이도 작아진다고 생각된다.

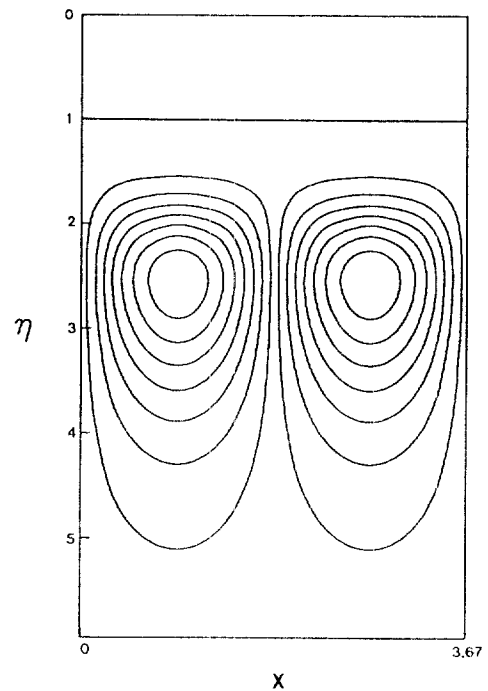


Fig. 11. Streamlines of two-dimensional convective rolls with $\lambda=1$, $\mu_r=10$ and $Pr=1000$.

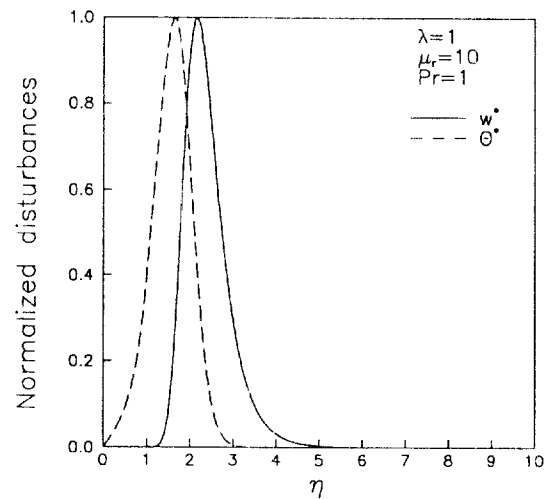


Fig. 12. Distributions of disturbances with $\lambda=1$, $\mu_r=10$ and $Pr=1$.

4. 결 론

순수한 단일성분 용융액이 위로부터 냉각되어 응고가 진행될 때 용융액에서 점도변화를 고려하여 열적 불안정성에 대해서 전파이론을 적용하여 조사하였다. 고체층과 액체층에서 유도된 교란방정식을 열경계층의 두께를 길이척도로 하여 유사변환하였다. 수치해석 결과, 무차원 상변화율 λ 가 증가함에 따라 보정된 임계 열 Rayleigh 수 R_{Tc}^* 는 증가하였다. Prandtl 수가 증가하면 임계값 R_{Tc}^* 와 a_c^* 가 감소하였고, $Pr > 100$ 이면 Pr 의 영향은 거의 없었다. Stefan 수가 증가하면 계는 더 불안정해졌다. 또한 액체의 온도에 따른 점도변화를 고려하여 대류발생조건을 조사한 결과, 점도변화의 효과는 계를 안

정하게 하였고, 응고계면 바로 아래에 대류가 없는 정체층이 나타남을 알았다.

감 사

본 연구를 지원한 주식회사 유공에 감사를 드립니다.

사용기호

a	: dimensionless horizontal wave number, $(a_x^2 + a_y^2)^{1/2}$ [-]
a^*	: modified dimensionless horizontal wave number [-]
C	: constant in Eq. (6) [-]
C_p	: specific heat per unit volume of liquid [$J/(m^3 \cdot K)$]
D	: differential operator [$=d/d\eta$]
e_z	: unit vector in vertical direction [-]
g	: gravitational acceleration constant [m/s^2]
H	: position of solid-liquid interface [m]
i	: imaginary number [-]
k	: thermal conductivity [$J/(s \cdot K \cdot m)$]
k_r	: ratio of thermal conductivities [-]
L	: length scale [m]
La	: latent heat per unit volume of solid [J/m^3]
P	: pressure [N/m^2]
R_T^*	: modified thermal Rayleigh number, $R_T \delta^3$ [-]
R_T	: thermal Rayleigh number, $g\alpha\Delta TL^3/(\kappa_L \nu)$ [-]
T	: temperature [K]
t	: time [s]
U	: velocity vector [m/s]
W	: vertical velocity [m/s]
w	: dimensionless vertical velocity [-]
Z	: vertical coordinate [m]
x, y, z	: dimensionless coordinate [-]

그리스 문자

α	: thermal expansion coefficient [K^{-1}]
ΔT	: temperature difference [K]
δ	: dimensionless thermal boundary-layer thickness [-]
η	: similarity variable [-]
θ	: dimensionless temperature [-]
θ_∞	: parameter in Eq. (10), $(T_\infty - T_H)/(T_H - T_A)$ [-]
κ	: thermal diffusivity [m^2/s]
κ_r	: ratio of thermal diffusivities, κ_S/κ_L [-]
λ	: dimensionless phase-change rate [-]
μ	: viscosity [$kg/(m \cdot s)$]
μ_r	: parameter in Eq. (26), $\ln(\mu_H/\mu_\infty)$ [-]
$\bar{\mu}$: dimensionless viscosity [-]
ν	: kinematic viscosity [m^2/s]

ρ	: density [kg/m^3]
τ	: dimensionless time [-]

상첨자

T	: transpose of matrix
$*$: amplitude function for perturbation quantity

하첨자

c	: critical state
S	: solid state
L	: liquid state
0	: basic state
1	: perturbed state
∞	: initial state or bulk state

참고문헌

- Glicksman, M. E., Coriell, S. R. and McFadden, G. B.: *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **118**, 307(1986).
- Davis, S. H.: *J. Fluid Mech.*, **212**, 241(1990).
- Dietshe, C. and Muller, U.: *J. Fluid Mech.*, **161**, 249(1985).
- Guerin, R. Z., Billia, B., Haldenwang, P. and Roux, B.: *Phys. Fluids*, **31**, 2086(1988).
- Neilson, D. G. and Incropera, F. P.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **34**, 1717(1991).
- Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C.: "Conduction of Heat in Solids", 2nd ed., Oxford University Press, London(1959).
- Gresho, P. M. and Sani, R. L.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **14**, 207(1971).
- Foster, T. D.: *Phys. Fluids*, **8**, 1249(1965).
- Jhaveri, B. S. and Homsy, G. M.: *J. Fluid Mech.*, **114**, 251(1982).
- Wankat, P. C. and Homsy, G. M.: *Phys. Fluids*, **20**, 1200(1977).
- Lee, J. D., Choi, C. K. and Shin, C. B.: *Int. Chem. Eng.*, **30**, 761(1990).
- Yoon, D. Y., Choi, C. K. and Yoo, J. S.: *Int. Chem. Eng.*, **32**, 181(1992).
- 황인국, 최창균: *화학공학*, **32**, 718(1994).
- Davaille, A. and Jaupart, C.: *J. Fluid Mech.*, **253**, 141(1993).
- Chen, Y. M. and Pearlstein, A. J.: *Phys. Fluids*, **31**, 1380(1988).
- Stengel, K. C., Oliver, D. S. and Booker, J. R.: *J. Fluid Mech.*, **120**, 411(1993).
- White, D. B.: *J. Fluid Mech.*, **191**, 247(1988).
- Richter, F. M., Nataf, H. C. and Daly, S. F.: *J. Fluid Mech.*, **129**, 173(1983).
- Smith, M. K.: *J. Fluid Mech.*, **188**, 547(1988).
- Blair, L. M. and Quinn, J. A.: *J. Fluid Mech.*, **36**, 385(1969).
- Patrick, M. A. and Wragg, A. A.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **18**, 1397(1975).