

수평으로 인접한 유체층과 공극률이 변하는 다공질층에서 열적 불안정성

변석훈 · 황인국* · 최창균†

서울대학교 공과대학 화학공학과

*수원대학교 공과대학 화학공학과

(1997년 7월 7일 접수, 1997년 10월 7일 채택)

Thermal Instabilities in Horizontally Superposed Fluid and Porous Layers with Variable Porosity

Suk Hoon Byun, In Gook Hwang* and Chang Kyun Choi†

Department of Chemical Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742

*Department of Chemical Engineering, The University of Suwon, Kyungki-Do 445-643

(Received 7 July 1997; accepted 7 October 1997)

요 약

수평으로 인접하고 있는 유체층과 유체로 포화된 다공질층이 밀면으로부터 가열되고 있는 계에 대해 다공질층의 공극률의 변화를 고려하여 자연대류의 임계조건을 조사하였다. 선형안정성 이론을 적용하여 다공질층의 깊이와 다공질층을 구성하는 입자직경의 비 d_m/d_p , 다공질층과 유체층 깊이의 비 d 가 대류발생 임계조건에 주는 영향을 수치해법으로 구하였다. d_m/d_p 가 10^3 보다 작을 때에는 공극률의 변화로 인해 임계조건이 영향받는다라는 결과를 얻었다. d 가 큰 경우에는 대류발생은 다공질층에서 지배적이며 d_m/d_p 가 감소함에 따라 임계 Darcy-Rayleigh 수는 감소하였다. 이는 다공질층의 입자 직경이 커짐에 따라 벽면에서의 공극률이 증가하여 유동이 더 자유로워지기 때문에 다공질층이 열적으로 더 불안정해짐을 나타낸다.

Abstract—The critical conditions to mark the onset of natural convection in the horizontally superposed fluid and porous layers, cooled from below, with variable porosity were investigated. By using the linear stability theory the effects of d_m/d_p (ratio of porous layer thickness to particle diameter) and d (ratio of porous layer thickness to fluid layer thickness) on the critical conditions are obtained numerically. The results show that the critical conditions are influenced by the variation of porosity when the value of d_m/d_p is smaller than 10^3 . For large values of d the onset of convection is dominant in the porous layer and the critical Darcy-Rayleigh number decreases with decreasing the value of d_m/d_p . It means that as the particle diameter becomes larger, the porosity becomes larger near the surface and the fluid in the porous layer becomes more mobile, i.e., more unstable.

Key words: Natural Convection, Porous Layer, Variable Porosity, Linear Stability Theory, Darcy-Rayleigh Number

1. 서 론

중력장하에 있는 수평 유체층을 밀면으로부터 가열하면 밀도 변화가 생기고, 임계조건을 넘으면 부력이 점성력 및 확산력을 극복하게 되어 자연대류가 발생하게 된다. 유체로 포화된 다공질층과 유체층이 수평으로 인접한 경우에도 자연대류가 발생할 수 있다. 유체층과 다공질층이 있는 계는 열 에너지 저장 시스템, 다공질 흡수층을 가진 태양열 축전기, 금속합금 용고계의 다공질 mush층 등이 있다. 충전층(packed bed) 열교환기에서는 다공질층의 공극률(porosity)이 균일하지 않아 벽쪽에서는 공극률이 크고, 벽면으로부터 멀어질수록 공극률이 작아지는 것으로 알려져 있다. 이와 같은 공극률의 변화는 벽면에서 열전달을 증가시키는 효과를 주게 된다.

1901년 Benard[1]가 수평 유체층에서 자연대류에 대한 실험결과를 발표하였고 1916년 Rayleigh[2] 경이 선형안정성 이론을 발표한다. 이래 수많은 연구진들에 의해서 자연대류에 대한 연구가 이루어졌다. Horton과 Rogers[3]는 수평 다공질 유체층에서의 대류문제가 Benard-Rayleigh 대류문제의 일환임을 지적하였고, Lapwood[4]는 선형안정성 이론을 적용하여 유체로 포화되어 있는 수평 다공질층의 자연대류 발생조건을 조사하였다. 다공질층에서의 대류문제는 최근까지 주목받고 있는 연구 대상 중의 하나이다. 유체층과 다공질층이 수평으로 인접하고 있는 계에 대해 Nield[5, 6]는 Beavers와 Joseph[7]의 조건을 사용하여 일정열속이 있는 경우에 선형안정성 이론으로 대류발생을 연구하였다. Pillatsis 등[8]과 Taslim과 Narusawa[9]는 열전도도의 비, 유체층과 다공질층 깊이의 비 등의 영향에 대해 안정성

해석을 하였다. Chen 등[10]은 유체층과 다공질층이 수평으로 인접하고 있는 계에서 수직방향으로 비등방성(anisotropic) 투과도와 열확산도를 고려하여 열적 불안정성을 해석하였다.

다공질층에서의 공극률 변화는 벽면에서 멀어짐에 따라 공극률이 지수적으로 감소하는 것으로 알려져 있다. Vortmeyer와 Schuster[11], Cheng과 Vortmeyer[12], Mueller[13], Chandrasekhara 등[14]은 지수적으로 감소하는 공극률과 투과도의 변화에 대한 식을 제안하였다. 그리고 Zehner와 Schlünder[15], Kunii와 Smith[16], Schlünder[17] 등은 유효 열확산도의 비와 공극률간의 상관식을 제시하였다. 이러한 식들을 이용하여 공극률이 변하는 다공질 유체층에서 자연대류 발생에 대해 Chandrasekhara와 Nambodiri[18], Hong 등[19], Jang과 Chen[20] 등이 연구를 수행하였다.

본 연구에서는 유체층과 이 유체층으로 포화된 다공질층이 수평으로 인접한 경우에 대해서 다공질층의 공극률 변화를 고려하여 자연대류 임계조건을 선형 안정성 이론으로 조사하였다. 기존의 수평으로 인접한 유체층과 다공질층에 관한 연구들은 다공질층에서 균일한 공극률을 가정하고 있으나 본 연구는 이를 확장하여 공극률 변화가 계의 임계조건에 미치는 영향을 해석하였다.

2. 지배방정식

2-1. 지배방정식과 경계조건

본 연구에서는 Fig. 1과 같이 고정 경계면 사이에 두께 d 의 유체층과 그 유체로 포화된 두께 d_m 의 다공질층이 수평으로 인접한 계를 고려하였다. 다공질층은 일정한 직경의 구형입자로 구성되어있으며 공극률은 수직방향으로만 변한다고 가정하였다. 윗면은 T_u 로 유지되고 있고, 아랫면은 T_l 의 온도로 일정하게 가열되고 있다. 유체는 비압축성 뉴튼유체이며 다공질층내의 고체입자와 유체는 열적으로 평형을 이루고 있다.

자연대류의 기본 구동력인 부력은 온도변화에 따른 밀도의 변화에 의해 발생하는데 이에 대한 상태방정식은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\rho_f = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \quad (1)$$

여기서 ρ_f 는 유체의 밀도를 나타내며 α 는 유체의 온도에 따른 부피팽창계수이다. 아래첨자 0은 기준점을 뜻하며 온도가 T_0 일 때 유체의 밀도는 ρ_0 이다. 순수한 유체만 존재하는 유체층과 유체로 포화된 다공질층에 대한 정상상태의 연속식, 운동량식, 에너지식은 다음과 같다.

(유체층)

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (2)$$

$$\rho_f \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} = -\nabla P + \rho_f \vec{g} + \mu_f \nabla^2 \vec{U} \quad (3)$$

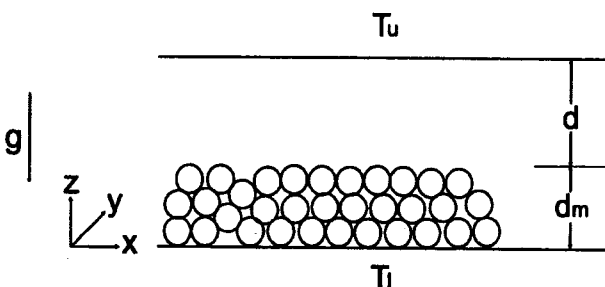


Fig. 1. Schematic diagram of horizontally superposed fluid and porous layers.

$$\vec{U} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\kappa_f \nabla T) \quad (4)$$

(다공질층)

$$\nabla \cdot \vec{U}_m = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\mu_f}{K} \vec{U}_m = -\nabla P_m + \rho_f \vec{g} \quad (6)$$

$$\vec{U}_m \cdot \nabla T_m = \nabla \cdot (\kappa_e \nabla T_m) \quad (7)$$

식 (6)은 다공질층에 대한 Darcy 식을 나타낸다. \vec{U} 는 속도, P 는 압력, T 는 온도를 나타낸다. \vec{g} 는 중력가속도, μ_f 는 유체의 점도, K 는 다공질층의 투과도(permeability)이다. $\kappa_f = [k/(\rho C_p)]$ 는 유체의 열확산도, $\kappa_e = [k_e/(\rho C_p)]$ 는 다공질층의 유효 열확산도이다. 여기에서 k 는 열전도도, C_p 는 비열을 나타낸다. 하첨자 m , e , f 는 각각 다공질층, 유효값, 유체를 나타낸다.

경계조건으로 유체층의 윗면과 다공질층의 아랫면에는 일정온도 조건과 no-slip 조건을 적용한다.

at $Z=d+d_m$:

$$T = T_u, \quad W = \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (8)$$

at $Z=0$:

$$T_m = T_l, \quad W_m = 0 \quad (9)$$

여기서 W 는 수직속도성분이다. 유체층과 다공질층이 접하고 있는 계면에서는 다음과 같이 온도, 열속, 수직속도, 수직응력의 연속조건과 Beavers-Joseph 경계조건[7]을 적용한다.

at $Z=d_m$

$$T = T_m, \quad k_f \frac{\partial T}{\partial Z} = k_e \frac{\partial T_m}{\partial Z} \quad (10a,b)$$

$$W = W_m, \quad -P + 2\mu_f \frac{\partial W}{\partial Z} = -P_m \quad (10c,d)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} = \frac{\gamma}{K^{1/2}} \left(\frac{\partial W}{\partial Z} - \frac{\partial W_m}{\partial Z} \right) \quad (10e)$$

여기서 γ 는 slip 정도를 나타내는 Beavers-Joseph 조건에서 상수이다. $\gamma=0$ 이면 Darcy 유동의 특징인 자유경계조건이 된다.

2-2. 기본상태

윗면과 아랫면이 T_u , T_l 로 일정하게 유지되고 유체층과 다공질층이 접하는 계면에서 두 층의 온도가 같고 열속이 같다는 조건을 이용하여 식 (4)와 (7)로부터 유동이 없는 상태에서 유체층과 다공질층의 기본 온도분포 T_b 와 T_{mb} 를 다음과 같이 구하였다.

$$T_b = T_u - \frac{\Delta T}{d} (Z - d_m - d) \quad \text{for } d_m \leq Z \leq d_m + d \quad (11)$$

$$T_{mb} = T_l - \frac{\Delta T}{d} \int_0^Z \frac{\kappa_f}{\kappa_e} dZ \quad \text{for } 0 \leq Z \leq d_m \quad (12)^*$$

여기서 $\Delta T (=T_l - T_u)$ 는 유체층의 온도차를 나타낸다. T_l 는 유체층과 다공질층이 접하고 있는 계면의 온도이다. 유체층의 온도차 ΔT 와 다공질층의 온도차 $\Delta T_m (=T_l - T_b)$ 는 다음의 관계를 갖는다.

$$\Delta T = \frac{T_l - T_u}{1 + \frac{1}{d} \int_0^{d_m} \frac{\kappa_f}{\kappa_e} dZ} \quad (13)$$

$$\Delta T_m = \frac{\Delta T}{d} \int_0^{d_m} \frac{\kappa_f}{\kappa_e} dZ \quad (14)$$

2.3. 공극률과 투과도의 변화

다공질층의 공극률과 투과도의 변화는 벽면에서 멀어질수록 지수적으로 감소하는 것으로 알려져 있으며, 아래의 식 (15), (16)과 같이 표현된다. 각 상수값은 공극률과 투과도의 변화를 측정할 여러 실험 결과를 잘 설명할 수 있는 값으로 Vortmeyer와 Schuster[11], Cheng과 Vortmeyer[12]에 의해 $(b, b', c, c')=(1, 20, 2, 4)$ 로 제안되었다.

$$\psi(z) = \psi_{\infty} \left[1 + b \exp \left(-c \cdot \frac{d_m}{d_p} \cdot z_m \right) \right] \quad (15)$$

$$K(z) = K_{\infty} \left[1 + b' \exp \left(-c' \cdot \frac{d_m}{d_p} \cdot z_m \right) \right] \quad (16)$$

여기서 ψ 는 공극률을 나타내며, 하첨자 ∞ 는 경계면으로부터 멀리 떨어진 곳, 즉 다공질층의 중심 부근에서의 값을 나타낸다. d_p 는 다공질층을 구성하는 고체입자의 직경이고, $z_m (=Z/d_m)$ 은 다공질층의 깊이로 무차원화된 수직좌표이다. 본 계에서 다공질층의 공극률 변화는 $z_m=1/2$ 에서 상호 대칭으로 가정하므로 $0 \leq z_m \leq 1/2$ 인 영역에서는 식 (15)와 (16)을 그대로 적용하며, $1/2 \leq z_m \leq 1$ 인 영역에서는 z_m 를 $1 - z_m$ 로 바꾸어 적용하게 된다.

다공질층에서 유효 열확산도는 Zehner와 Schlünder[15]가 제안한 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\frac{\kappa_e}{\kappa_f} = 1 - \sqrt{1 - \psi} + 2 \frac{\sqrt{1 - \psi}}{1 - \lambda B} \left[\frac{(1 - \lambda)B}{(1 - \lambda B)^2} \ln \left(\frac{1}{\lambda B} \right) - \frac{B+1}{2} - \frac{B-1}{1 - \lambda B} \right], \quad B = 1.25 \left(\frac{1 - \psi}{\psi} \right)^{10.9} \quad (17)$$

여기서 $\lambda = k_f/k_s$ 는 유체와 고체입자의 열전도도의 비로서 물/모래나 물/유리구슬은 0.5, 물/쇠구슬은 0.01, 공기/석면은 0.2, 공기/유리섬은 1, 공기/광석섬유(rock wool)는 5의 값을 갖는다.

3. 안정성 해석

3-1. 선형안정성 이론

선형안정성 이론은 온도, 속도, 압력 등의 물리량을 다음과 같이 기본량과 무한소의 교란량의 합으로 나타낸다. 지배방정식으로부터 선형안정성 이론을 적용하여 미소교란의 2차 이상의 누승항을 무시하면 다음과 같이 선형화된 무차원 교란 방정식을 얻을 수 있다.

(유체층)

$$\nabla^4 w + Ra \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \theta = 0 \quad (18)$$

$$w + \nabla^2 \theta = 0 \quad (19)$$

(다공질층)

$$\nabla_m \cdot \left(\frac{K_{\infty}}{K} \nabla_m w_m \right) - Ra_m \left(\frac{\partial^2}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_m^2} \right) \theta_m = 0 \quad (20)$$

$$w_m + \frac{\kappa_e}{\kappa_{\infty}} \nabla_m \cdot \left(\frac{\kappa_e}{\kappa_{\infty}} \nabla_m \theta_m \right) = 0 \quad (21)$$

여기서 κ_{∞} 는 공극률이 ψ_{∞} 일 때의 유효 열확산도를 나타낸다. 위 식들은 다음과 같은 변수를 도입하여 무차원화한 것이다.

$$(x, y, z) = \frac{1}{d} (X, Y, Z - d_m) \quad (22a)$$

$$(x_m, y_m, z_m) = \frac{1}{d_m} (X, Y, Z) \quad (22b)$$

$$(w, w_m) = \left(\frac{d}{\kappa_f} W', \frac{d_m}{\kappa_{\infty}} W'_m \right) \quad (22c)$$

$$(\theta, \theta_m) = \frac{1}{\Delta T} \left(T', \frac{\kappa_{\infty}}{\kappa_f} \frac{d}{d_m} T'_m \right) \quad (22d)$$

여기서 상첨자 '는 교란량을 나타낸다. Ra 는 Rayleigh 수, Ra_m 은 Darcy-Rayleigh 수이며 다음과 같이 정의된다.

$$Ra = \frac{g \beta d^3 \Delta T}{\nu_f \kappa_f}, \quad Ra_m = \frac{g \beta K_{\infty} d_m}{\nu_f \kappa_{\infty}} \left(\Delta T \frac{\kappa_f}{\kappa_{\infty}} \frac{d}{d_m} \right) \quad (23)$$

여기서 $\nu_f (= \mu / \rho_o)$ 는 유체의 동점도이다. Ra_m 의 정의에서 $\Delta T \kappa_d / (\kappa_{\infty} d)$ 는 유효 열확산계수가 κ_{∞} 로 일정할 때의 ΔT_m 을 나타낸다. 이는 기본온도식 (14)를 보면 알 수 있다.

3-2. 무차원 교란식

무차원 교란식에서 나타나는 교란량들을 정규형태(normal modes)로 표시하면 다음과 같다.

$$(w, \theta) = (w^*, \theta^*) \exp[i(a_x x + a_y y)] \quad (24a)$$

$$(w_m, \theta_m) = (w_m^*, \theta_m^*) \exp[i(a_{xm} x_m + a_{ym} y_m)] \quad (24b)$$

여기서 상첨자 *는 교란의 진폭을 나타내며, i 는 허수이다. 위의 식 (24a,b)는 교란이 2차원 주기파의 특성을 보인다는 것을 나타낸다. 파수 $a = (a_x^2 + a_y^2)^{1/2}$ 는 유체층의 깊이로 무차원화되었고, $a_m = (a_{xm}^2 + a_{ym}^2)^{1/2}$ 는 다공질층의 깊이로 무차원화되었다. 하첨자 x, y 는 각각 x 방향, y 방향을 나타낸다. 식 (24a,b)를 무차원 교란식 (18)-(21)에 대입하면 다음과 같은 안정성 방정식을 얻을 수 있다.

$$(0 \leq z \leq 1)$$

$$(D^2 - a^2)^2 w = a^2 Ra \theta \quad (25)$$

$$(D^2 - a^2) \theta = -w \quad (26)$$

$$(0 \leq z_m \leq 1)$$

$$D_m \left(\frac{K_{\infty}}{K} D_m w_m \right) - a_m^2 \frac{K_{\infty}}{K} w_m = -a_m^2 Ra_m \theta_m \quad (27)$$

$$D_m \left(\frac{\kappa_m}{\kappa_{\infty}} D_m \theta_m \right) - a_m^2 \frac{\kappa_m}{\kappa_{\infty}} \theta_m = -\frac{\kappa_{\infty}}{\kappa_m} w_m \quad (28)$$

여기서 상첨자 *는 생략되었고, D, D_m 은 각각 z 와 z_m 에 대한 미분을 나타낸다. 경계조건은 다음과 같이 정리된다.

at $z=1$:

$$\theta=0, \quad w=Dw=0 \quad (29)$$

at $z=0$ or $z_m=1$:

$$\theta = d \frac{\kappa_f}{\kappa_{\infty}} \theta_m, \quad D\theta = \frac{\kappa_f}{\kappa_{\infty}} D_m \theta_m \quad (30a,b)$$

$$d \frac{\kappa_f}{\kappa_{\infty}} w = w_m \quad (30c)$$

$$\delta^2 \frac{K}{K_\infty} (D^3 w - 3a^2 Dw) = D_m \left(\frac{K_\infty}{K} \right) w_m - \frac{K_\infty}{K} D_m w_m \quad (30d)$$

$$\hat{d}^2 \frac{K}{K_\infty} \left(Dw - \frac{\delta \hat{d}}{\gamma} \sqrt{\frac{K}{K_\infty}} D^2 w \right) = D_m w_m \quad (30e)$$

at $z_m=0$:

$$\theta_m = 0, \quad w_m = 0 \quad (31a,b)$$

여기서 $\hat{d} = d_m/d$, $\delta = \sqrt{K_\infty}/d_m$ 이고, 하첨자 i 는 계면에서의 값을 나타낸다.

3-3. 수치해법

자연대류의 임계조건을 구하기 위해서는 안정성 방정식과 경계조건을 만족하는 최소의 Ra , a 또는 Ra_m , a_m 을 구해야 한다. Ra 와 Ra_m , a 와 a_m 은 서로 다음과 같은 연관성을 갖는다.

$$Ra_m = \delta^2 \hat{d}^4 \frac{K}{K_\infty} Ra, \quad a_m^2 = \hat{d}^2 a^2 \quad (32)$$

따라서 안정성 방정식에 위의 식 (32)를 대입하고 Ra , a 를 구하거나 Ra_m , a_m 을 구하면 된다. 본 연구에서는 수치해법으로 Runge-Kutta 4차의 방법과 shooting 방법을 사용하였다. a (또는 a_m), λ , d_m/d , \hat{d} , δ , γ 의 값을 주고 경계치 문제를 초기치 문제로 바꾸기 위해 $z=0(z_m=1)$ 에서 w_m , θ_m , $D_m w_m$, $D_m \theta_m$ 의 값을 가정하였다. 고유치의 크기를 고정하기 위해서 $D^2 w$ 는 임의의 값으로 지정하고, 계면의 경계조건으로부터 나머지 초기조건을 구하였다. Ra (또는 Ra_m)을 가정한 후, 유체층 방향과 다공질층 방향으로 각각 안정성 방정식을 적분하였다. $z=1$ 과 $z_m=0$ 의 경계조건을 상대오차가 10^{-10} 이내로 만족시킬 때까지 Newton-Raphson 방법으로 가정값을 수정하여 반복 계산하였다.

4. 결과 및 토론

본 연구에서는 다공질층내에서 공극률이 수직방향으로 변하며 그에 따라 다공질층의 투과도 및 유효 열확산도도 변한다. Fig. 2에 d_m/d 의 값에 따라 투과도의 변화를 나타내었다. d_m/d 가 작을 때, 즉 다

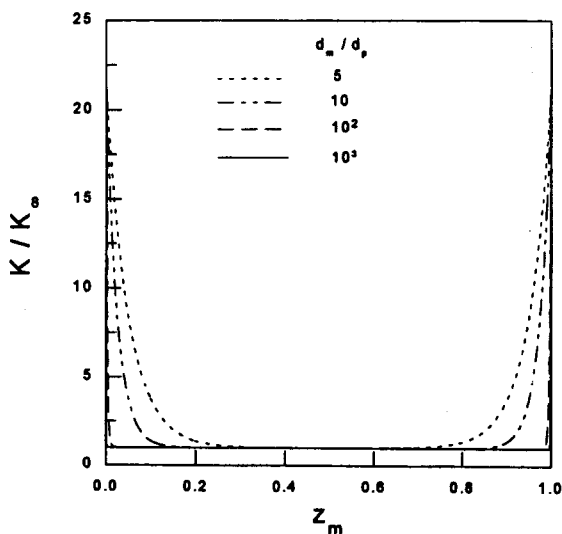


Fig. 2. Variation of K/K_∞ in porous layer with d_m/d .

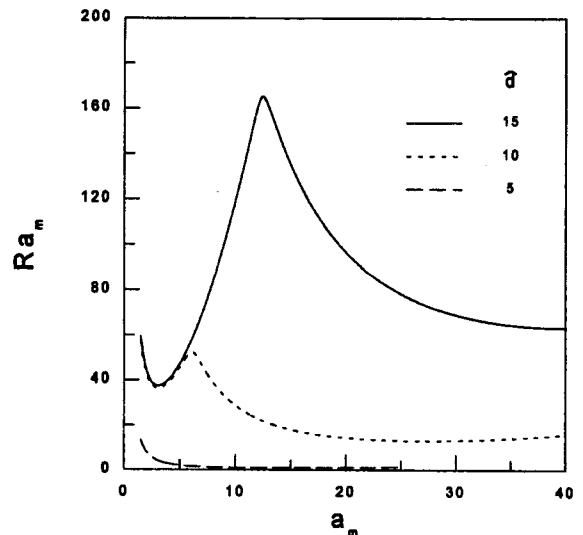


Fig. 3. Neutral stability curves for various values of \hat{d} with $d_m/d=10^3$, $\lambda=1$ and $\delta=10^{-3}$.

공질층을 구성하는 입자의 크기가 클 때, 다공질층의 투과도는 경계면에서 완만하게 변화하면서 중심부의 일정한 값으로 수렴해가고, 중심부보다 경계면에서 투과도가 크게 나타난다. d_m/d 가 상당히 클 때, 즉 입자의 크기가 아주 작을 때, 투과도는 계면 가까운 곳에서 급격히 변하고 전체적으로 일정한 값을 갖는다. $d_m/d=10^3$ 이면 다공질층을 구성하는 입자의 크기가 매우 작아 균일한 공극률을 가진 계에 가깝다고 볼 수 있다.

본 연구에서는 식 (10e)에 보이는 Beavers-Joseph 조건의 상수의 값을 $\gamma=1$ 로 놓았다. γ 는 0.1에서 4의 값을 갖는 것으로 알려져 있다 [10]. 그러나 Kim 등[21]에 의하면 $\gamma \approx 0.01$ 의 작은 값을 보이기도 하여 여전히 연구의 대상으로 남아 있다. 일반적으로 γ 가 임계조건에 주는 영향은 미약한 것으로 알려져 있다. Fig. 3에는 다공질층의 깊이와 입자직경의 비 $d_m/d_p=10^3$, 유체와 고체의 열전도도의 비 $\gamma=1$, 그리고 $\delta=10^{-3}$ 인 계에 대하여 다공질층과 유체층의 깊이의 비 $\hat{d}=5, 10, 15$ 인 경우의 한계 안정성 곡선들을 나타내었다. 한계 안정성 곡선 위의 영역은 자연대류가 발생하는 불안정한 영역이며 아래의 영역은 안정한 영역이다. 한계 안정성 곡선의 최소값을 임계 Darcy-Rayleigh 수 Ra_m 라고 하며 그에 해당하는 파수를 임계파수 a_m 라고 한다. $\hat{d}=5$ 인 경우에는 극소값이 1개 존재하지만, $\hat{d}=10, 15$ 인 경우에는 극소값이 2개 존재한다. 극소값이 두 개 존재하는 것은 작은 파수를 갖는 다공질층에 대한 대류와 큰 파수를 갖는 유체층에 대한 대류가 복합되어 있는 계에서 나타나는 특징으로 보여진다. $\hat{d}=10$ 일 때, 최소값은 큰 파수에서 나타난다. 이 경우에는 다공질층이 유체층보다 더 깊지만 대류가 주로 유동에 대한 저항이 약한 유체층에서 발생한다. $\hat{d}=15$ 인 경우에도 극소값이 2개가 존재하지만 최소값은 작은 파수에서 나타난다. 이 경우에는 유체층의 깊이가 다공질층의 깊이보다 매우 작기 때문에 대류는 대부분 다공질층에서 발생하게 된다. 따라서 \hat{d} 가 작은 경우에 대류발생은 유체층에서 지배적이며, \hat{d} 가 큰 경우에는 다공질층에서 지배적이라고 볼 수 있다. 실험적으로 관찰된 바에 의하면, 다공질층이 열적으로 불안정해지면 유체층에서와 같이 대류셀이 나타나며, 수평으로 인접한 유체층과 다공질층에서의 대류셀은 일반적으로 3차원의 형태로 알려져 있다[22]. 또한 이성분 용융액의 응고에서 다공질층인 mush 층에서 대류가 발생하면 유체층에서 plume 형태의 대류가 나타나는 것이 관측된 바 있다[23].

Fig. 4에는 $d_m/d_p=10^3$, $\lambda=1$, $\delta=10^{-3}$ 일 때, \hat{d} 가 1이하로 작은 경우, 즉

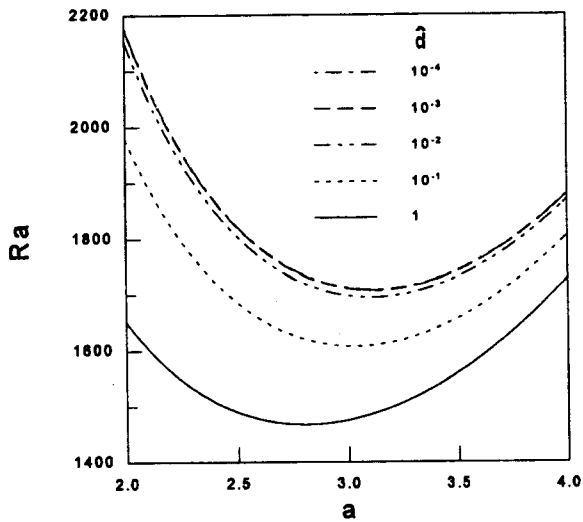


Fig. 4. Neutral stability curves for various values of \hat{d} with $d_m/d_p = 10^3$, $\lambda=1$ and $\delta=10^{-3}$.

유체층이 깊은 경우에 \hat{d} 의 변화에 따라 Rayleigh 수를 구하여 얻은 한계 안정성 곡선을 나타내었다. \hat{d} 가 점점 작아지면, 즉 다공질층의 두께에 비해 유체층의 두께가 점점 커지면 계는 순수한 유체층만 있는 계로 수렴해 간다. \hat{d} 가 10^{-4} 이면 임계값은 $(Ra_c, a_c) = (1707.63, 3.116)$ 으로 얻어졌는데 이는 Benard-Rayleigh 문제의 고정경계면에 대한 임계값 $(1707.76, 3.117)$ 과 거의 일치한다. Fig. 5는 $d_m/d_p = 10^3$, $\lambda=1$, $\delta=10^{-3}$ 일 때, \hat{d} 가 50이상으로 큰 경우, 즉 다공질층이 깊은 경우에 \hat{d} 의 변화에 따라 Darcy-Rayleigh 수를 구하여 얻은 한계 안정성 곡선을 보여준다. \hat{d} 가 커짐에 따라, 즉 다공질층의 두께가 유체층의 두께에 비해 점점 커짐에 따라 계는 다공질층만 있는 계로 수렴해간다. \hat{d} 가 400인 경우 본 연구에서 얻은 임계값은 $(Ra_c, a_c) = (39.433, 3.140)$ 으로 고정경계면을 갖는 수평 다공질층 계의 임계값 $(4\pi^2, \pi)$ 과 일치함을 알 수 있다. 이로써 본 연구에서 사용한 수치해법 프로그램의 타당성을 확인할 수 있다.

Fig. 6은 본 연구의 핵심인 다공질층에서 공극률 변화의 효과를 조사하기 위해 $\hat{d}=400$, $\lambda=1$, $\delta=10^{-4}$ 인 경우에 d_m/d_p 의 값에 따른 한계

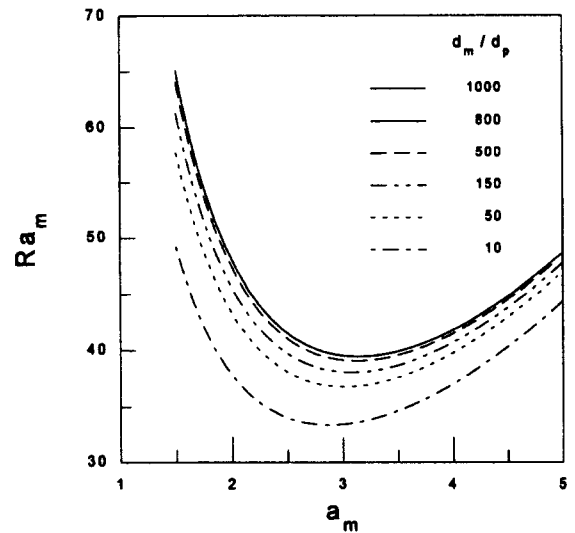


Fig. 6. Neutral stability curves for various values of d_m/d_p with $\hat{d}=400$, $\lambda=1$ and $\delta=10^{-4}$.

안정성 곡선을 나타낸 것이다. d_m/d_p 가 작아질수록 임계 Darcy-Rayleigh 수가 낮아짐을 알 수 있다. d_m/d_p 가 작을 경우에는 벽면 근처에서 투과도가 상당히 크며 그에 따라 유체의 유동이 자유로우므로 계가 더 불안정해진다고 설명할 수 있다. 한편 d_m/d_p 이 10^3 보다 크면 $Ra_m = 4\pi^2$ 으로 임계조건의 변화가 거의 없는 것으로 나타났다. $d_m/d_p > 10^3$ 이면 다공질층은 거의 균일한 공극률과 투과도를 가지기 때문에 d_m/d_p 가 변해도 임계값은 영향받지 않는 것으로 추측된다.

Fig. 7과 8은 $\hat{d}=1$, $\lambda=0.0064$ 인 경우에 d_m/d_p 와 δ 를 변화시켜 가면서 임계값 Ra_c , a_c 를 구한 것이다. δ 가 크면 투과도가 크므로 δ 가 증가할수록 임계값은 낮아짐을 알 수 있다. d_m/d_p 가 2×10^3 이하에서 d_m/d_p 가 감소함에 따라 임계값은 다시 증가하는 것으로 나타났다. Fig. 9와 10은 $\hat{d}=1$, $\lambda=10$ 으로 놓은 결과이다. d_m/d_p 가 2×10^3 이하에서 d_m/d_p 가 감소함에 따라 임계값이 증가하는 것으로 나타났다. Fig. 7과 9를 비교하면 δ 값이 같을 때, λ 값이 커지면 임계조건이 감소함을 알 수 있다. λ 가 1보다 작은 경우와 1보다 큰 경우에 d_m/d_p 의 값이 임계조건에 주는 영향이 다른데, 이러한 이유는 $\hat{d}=1$ 인 경우에는 유체층 쪽

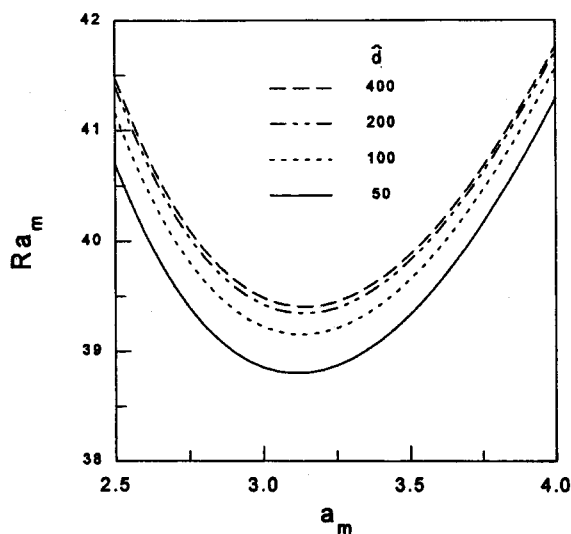


Fig. 5. Neutral stability curves for various values of \hat{d} with $d_m/d_p = 10^3$, $\lambda=1$ and $\delta=10^{-3}$.

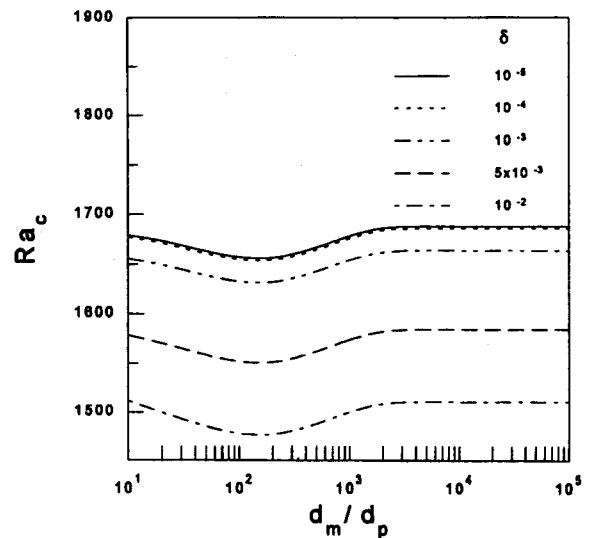


Fig. 7. Effect of d_m/d_p on Ra_c for various values of δ with $\hat{d}=1$ and $\lambda=0.0064$.

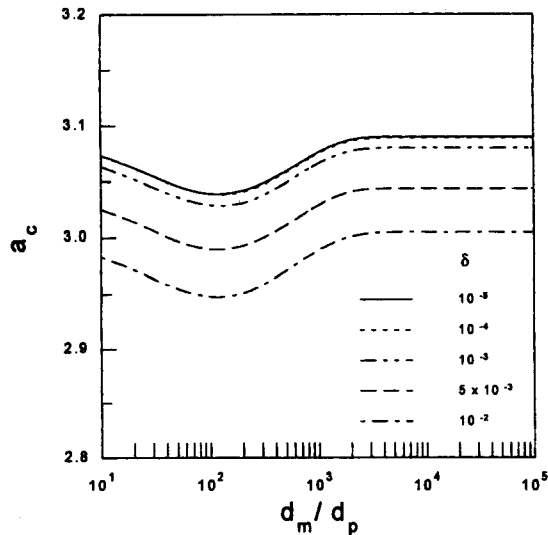


Fig. 8. Effect of d_m/d_p on a_c for various values of δ with $\hat{d}=1$ and $\lambda=0.0064$.

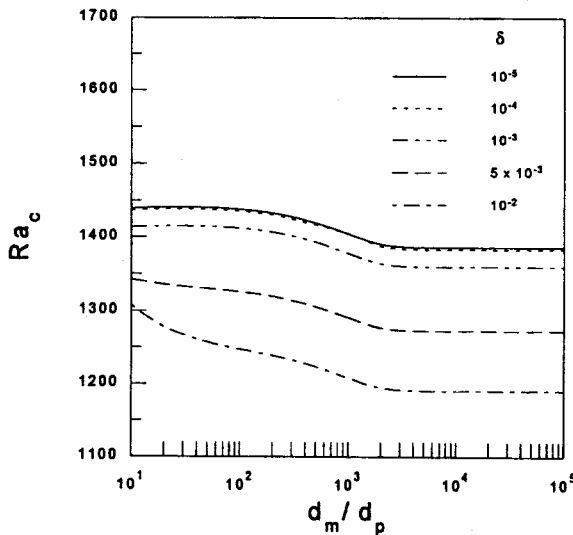


Fig. 9. Effect of d_m/d_p on Ra_c for various values of δ with $\hat{d}=1$ and $\lambda=10$.

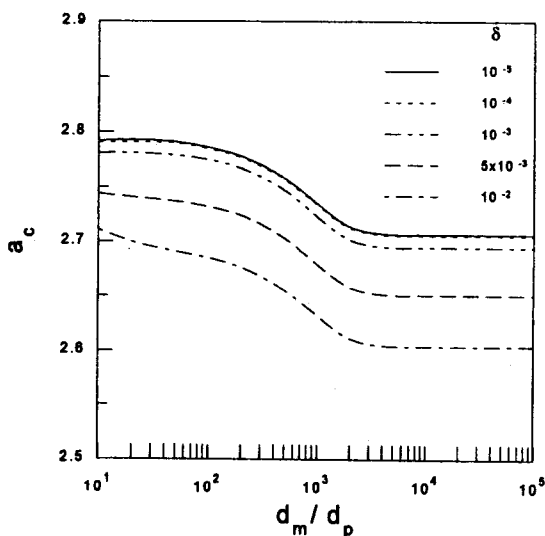


Fig. 10. Effect of d_m/d_p on a_c for various values of δ with $\hat{d}=1$ and $\lambda=10$.

에서 대류가 발생하므로 d_m/d_p 의 변화에 따른 다공질층의 투과도 변화 이외에, 식 (17)의 λ 값에 따른 열확산계수 비 κ_s/κ_p 의 변화가 임계 조건에 영향을 주기 때문인 것으로 생각된다. $\lambda=1$ 인 경우에는 수치 계산결과, d_m/d_p 가 변해도 임계 Rayleigh 수는 거의 변화가 없는 것으로 나타났다.

5. 결 론

본 연구에서는 밀면으로부터 가열되는 두께 d_m 의 다공질층과 두께 d 의 유체층이 수평으로 인접하고 있는 계에서 대류 불안정성을 조사하였다. 다공질층의 공극률과 투과도 변화를 고려하였고, 선형안정성 이론을 이용하여 대류발생 임계조건을 수치해법으로 구하였다. $d_m/d_p=10^3$ 으로 다공질층을 구성하는 입자의 크기가 매우 작은 경우, 다공질층과 유체층 깊이의 비 \hat{d} 가 아주 작아지면 본 연구에서 얻은 임계조건은 기존의 Benard-Rayleigh 문제의 임계값과 일치함을 확인하였다. 반대로 \hat{d} 가 매우 커지면 임계조건은 고정 경계면을 갖는 수평 다공질층의 임계값과 일치하였다. 다공질층에서 공극률 변화의 효과를 조사한 결과, d_m/d_p 가 10^3 이하에서 d_m/d_p 값의 변화에 따라 임계값이 영향받는 것으로 나타났다. \hat{d} 가 큰 경우에 d_m/d_p 가 감소하면 경계면에서 투과도가 증가되는 효과로 인해 임계 Darcy-Rayleigh 수가 감소하여 계가 불안정해지는 것으로 나타났다.

감 사

본 연구를 지원한 일주학술문화재단에 감사를 드립니다.

사용기호

- a : dimensionless horizontal wave number [-]
- B : constant in Eq. (17) [-]
- C_p : specific heat [$J/(m^3 \cdot K)$]
- D : differential operator, d/dz [-]
- d : fluid layer thickness [m]
- d_m : porous layer thickness [m]
- d_p : particle diameter [m]
- \hat{d} : ratio of porous layer thickness to fluid layer thickness, d_m/d [-]
- g : gravitational acceleration [m/s^2]
- i : imaginary number [-]
- K : permeability [m^2]
- k : thermal conductivity [$J/(s \cdot K \cdot m)$]
- P : pressure [N/m^2]
- Ra : Rayleigh number, $g \beta d^3 \Delta T / (\nu \kappa_p)$ [-]
- Ra_m : Darcy-Rayleigh number, $g \beta K_m d_m^2 \kappa_p \Delta T / (\nu \kappa_p d)$ [-]
- T : temperature [K]
- \vec{U} : velocity vector [m/s]
- W : vertical velocity [m/s]
- w : dimensionless vertical velocity [-]
- X, Y, Z : Cartesian coordinates [m]
- x, y, z : dimensionless Cartesian coordinates [-]

그리스 문자

- α : thermal expansion coefficient [K^{-1}]
- γ : slip coefficient for Beavers-Joseph condition [-]
- ΔT : temperature difference in fluid layer, $T_s - T_u$ [K]
- ΔT_m : temperature difference in porous layer, $T_s - T_i$ [K]

δ	: parameter in Eq. (30e), $\sqrt{K_\infty}/d_m$ [-]
θ	: dimensionless temperature [K]
κ	: thermal diffusivity [m^2/s]
λ	: ratio of thermal conductivities, k/k_s [-]
μ	: viscosity [$\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$]
ν	: kinematic viscosity [m^2/s]
ρ	: density [kg/m^3]
ψ	: porosity [-]

상첨자

'	: perturbed quantity [-]
---	--------------------------

하첨자

b	: basic quantity
c	: critical value
e	: effective quantity
f	: fluid
i	: interface
m	: porous layer
0	: reference state
∞	: far from boundary
l	: lower boundary
u	: upper boundary

참고문헌

- Benard, H.: *Ann. Chem. Phys.*, **23**, 62(1901).
- Lord Rayleigh: *Philos. Mag.*, **32**, 529(1916).
- Horton, C. W. and Rogers, F. T.: *J. Appl. Phys.*, **16**, 367(1945).
- Lapwood, E. R.: *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **44**, 508(1948).
- Nield, D. A.: *J. Fluid Mech.*, **81**, 513(1977).
- Nield, D. A.: *J. Fluid Mech.*, **128**, 37(1983).
- Beavers, G. S. and Joseph, D. D.: *J. Fluid Mech.*, **30**, 197(1967).
- Pillatsis, G., Taslim, M. E. and Narusawa U.: *J. Heat Transfer*, **109**, 677(1987).
- Taslim, M. E. and Narusawa, U.: *J. Heat Transfer*, **111**, 357(1989).
- Chen, F., Chen, C. F. and Pearlstein, A. J.: *Phys. Fluids*, **A3**, 556(1991).
- Vortmeyer, D. and Schuster, J.: *Chem. Eng. Sci.*, **38**, 1691(1983).
- Cheng, P. and Vormeyer, D.: *Chem. Eng. Sci.*, **43**, 2523(1988).
- Mueller, G. E.: *Chem. Eng. Sci.*, **46**, 706(1991).
- Chandrasekhara, B. C., Namboodiri, P. M. S. and Hanumanthappa, A. R.: *Wärme-Stoffübertrag.*, **18**, 17(1984).
- Zehner, P. and Schlünder, E. U.: *Chemie-Ing.-Techn.*, **42**, 933(1970).
- Kunii, D. and Smith, J. M.: *AIChE J.*, **6**, 71(1960).
- Schlünder, E. U.: *Chemie-Ing.-Techn.*, **38**, 967(1958).
- Chandrasekhara, B. C. and Namboodiri, P. M. S.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **28**, 199(1985).
- Hong, J. T., Yamada, Y. and Tien, C. L.: *J. Heat Transfer*, **109**, 356(1987).
- Jang, J. Y. and Chen, J. L.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **36**, 1573(1993).
- Kim, D. S., Cho, E. S. and Choi, C. K.: *Korean J. Chem. Eng.*, **11**, 190(1994).
- Chen, F. and Chen, C. F.: *J. Fluid Mech.*, **207**, 311(1989).
- Tait, S. and Jaupart, C.: *J. Geophys. Res.*, **97**, 6735(1992).