

웨이브렛 변환을 이용한 시스템 식별에 관한 연구

백옥진 · 한정우 · 강성주[†] · 정창복*

전남대학교 공과대학 화학공학과, *응용화학공학부
(1999년 10월 20일 접수, 2001년 2월 20일 채택)

A Study on System Identification Using Wavelet Transformation

Wook Jin Baek, Jeong Woo Han, Sung Ju Kang[†] and Chang Bock Chung*

Department of Chemical Engineering, *Faculty of Applied Chemical Engineering,
Chonnam National University, Kwangju 500-757, Korea
(Received 20 October 1999; accepted 20 February 2001)

요 약

후리에(Fourier) 변환의 단점을 극복하고자 개발된 웨이브렛(wavelet) 변환은 여러 연구분야(de-noising, 자료압축, 편미분 방정식의 해석 등)에서 다양한 용도로 활용되고 있다. 그 중 de-noising은 웨이브렛 변환의 대표적인 응용분야 중의 하나로서 최근 활발한 연구가 진행되고 있다. De-noising 효과는 사용하는 shrinkage 함수와 이에 적용되는 threshold 값을 선택하는 방법에 달려있다. 본 연구에서는 서로 다른 특성을 갖는 신호와 잡음의 크기에 따라 여러 threshold 알고리즘을 적용시킨 결과를 서로 비교하고, 그 응용으로 de-noising의 여러 알고리즘을 이용하여 잡음을 제거한 신호와 그렇지 않은 신호를 시스템 식별(system identification)에 적용시켜 그 성능을 서로 비교하였다.

Abstract – The wavelet transformation, which was developed in order to overcome the defects of traditional Fourier transformation, is applied to many fields of study in various ways—for example, de-noising, data compression and mathematic applications such as solving partial differential equations, etc. De-noising is one of the main application areas of the wavelet transformation and has been studied by many researchers. The effect of de-noising depends upon the shrinkage function and the method of choosing the threshold value for the function. The objective of this work is to analyze the results of applying various threshold algorithms according to characteristics for signals and noise level. By applying the de-noising to the system identification, we compared the performances of signals which went through the de-noising process with those of signals without de-noising.

Key words: Wavelet, De-noising, Shrinkage, Threshold, System Identification

1. 서 론

후리에 변환은 현재까지 널리 쓰이고 있지만, 기지함수가 지역적이지 않는 특성을 갖기 때문에 불연속성을 갖거나 sharp spike를 갖는 함수를 근사화 하는데 적절하지 않다는 문제점(Gibb's phenomena)을 가지고 있다. 이를 극복하고자 웨이브렛 변환이 개발되었으며, de-noising, 자료압축, 기상예측, 신호처리, 음성인식, 편미분 방정식의 해석 등 여러 분야에서 다양한 용도로 활용되고 있다[1]. 그 중 de-noising은 웨이브렛 변환의 대표적인 응용 분야로서 Donoho[2-4], Johnstone[3-6], Gao[7-11] 등에 의해 활발한 연구가 진행되고 있다. 잡음을 고주파를 갖고 진폭이 작은 신호로 한정했을 때 웨이브렛 변환을 이용하여 잡음 제거를 하는 방법이 연구되었으며 여러 알고리즘들이 개발되었다.

공정모형을 구하는 방법으로 입출력 자료를 이용하는 Black-Box 모델링 방법을 사용하는 경우, 대부분의 실제 공정의 입출력 자료는 다양

한 형태의 잡음을 포함하고 있으므로 정확한 공정모형을 구하기 어렵다. 웨이브렛에 대한 관심이 고조되면서 웨이브렛 변환을 이용하여 앞서 언급한 일반적인 형태의 잡음을 전(前) 처리한 신호를 가지고 보다 나은 공정모형을 구하기 위한 시스템 식별 관련 연구가 최근 몇 년 사이에 발표되었다. Palavajhala 등(1996)은 이산 웨이브렛 변환(discrete wavelet transform)을 이용하여 prefilter 과정을 거친 신호를 시스템 식별에 이용하였으며[12], Nikolaou 등(1998)은 웨이브렛 변환을 이용하는 신호 압축을 통해 FIR 방법을 향상시키는 연구를 하였다[13]. 또한 Carrier 등(1998)은 웨이브렛 변환을 제거기 설계를 위한 공정 데이터의 식별에 적용하였고[14], Flehmig 등(1998)은 noisy 특성을 갖는 측정 신호값의 경향을 식별하는 연구에 웨이브렛을 이용하였다[15].

본 연구에서는 Table 1에 정리한 여러 가지 웨이브렛 de-noising 알고리즘들을 공정 모형을 구하는 시스템 식별 연구에 적용하여 잡음 제거 과정을 거친 신호를 이용한 경우와 잡음 제거 과정을 거치지 않은 신호를 이용한 경우의 성능을 비교하였고, 여러 de-noising 알고리즘의 성능도 비교하여 보았다. 그리고 신호의 특성에 따른 de-noising 효과와 이

[†]E-mail: sjkang@chonnam.chonnam.ac.kr

Table 1. Applied threshold method for each shrinkage

Shrinkage	Threshold method				
	Minimax	Universal	SURE	Hybrid	GCV
Hard	√	√	√	√	
Soft	√	√	√	√	√
Non-Negative Garrote	√	√	√	√	√
Firm	√				

를 시스템 식별 과정에 적용했을 때의 성능을 알아보기 위하여 서로 다른 특성을 갖는 두 개의 시험모델을 이용하였고, 잡음의 크기에 대한 영향을 알아보기 위하여, 다양한 잡음-신호비(Noise-to-Signal Ratio, NSR)를 갖는 잡음을 각각의 시험 모델에 첨가하였으며 de-noising과정에서 이용한 웨이블렛 변환의 한 방법인 Multi-Resolution Analysis(MRA)의 레벨(level)에 따른 성능을 비교하였다.

2. 이 론

2-1. 웨이블렛 변환

함수들의 결합을 이용한 신호의 주파수 해석은 이미 1800년대 초 Joseph Fourier가 정의한 sine과 cosine을 이용하여 함수를 표현하는 후리에 변환에서 시도되었다. 그러나 후리에 변환의 기저함수를 구성하는 sine, cosine함수는 지역적이지 않아 불연속 신호와 sharp spike 해석에 문제를 가지고 있기 때문에 보다 적절한 기저함수의 필요성이 대두되었다[1]. 또한 시간과 주파수 정보를 동시에 표현할 수 없는 단점이 제기되어 시간과 주파수 정보를 동시에 나타낼 수 있는 Short Time Fourier Transform(STFT)이 개발되었으나 이 또한 해상도(resolution)가 고정되는 단점을 가진다. 이를 극복하고자 기저함수가 지역적이고 다양하며 주파수-시간 표현이 가능한 웨이블렛 변환이 개발되었고, 1980년대 중반 이후 S. Mallat과 I. Daubechies 등에 의해 급속도로 발전되어 여러 분야에서 응용되고 있다.

웨이블렛 변환은 모(母) 웨이블렛(mother wavelet)의 scaling과 translation과정에 의해 다양한 기저함수를 생성하기 때문에 주파수와 시간 정보를 동시에 적절하게 표현할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 이때 scale은 시간 정보를 포함하고 translation은 주파수 정보를 포함한다[1, 16].

2-1-1. 연속 웨이블렛 변환(Continuous Wavelet Transform, CWT)

CWT는 아래와 같은 식 (1)로서 정의되고 이것은 해석하고자 하는 신호 $x(t)$ 와 모 웨이블렛이라 불리는 변환함수 $\psi(t)$ 의 convolution 형태를 갖으며, *은 공액복소수(complex conjugate)이다.

$$CWT_x(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int x(t) \psi^* \left(\frac{t-\tau}{s} \right) dt \quad (1)$$

여기서 s 는 scale 매개변수이며 τ 는 translation 매개변수이다($s, \tau \in \mathbb{R}$).

2-1-2. 이산 웨이블렛 변환(Discrete Wavelet Transform, DWT)

CWT를 계산하기 위해서는 이산화 과정이 필요하다. 식 (2)에 의해 각각의 매개 변수들을 이산화시킨 식 (3)을 이산 웨이블렛 변환(Discrete Wavelet Transform, DWT)라 한다.

$$s = s_0^m, \tau = k\tau_0 s_0^m \quad (2)$$

$$DWT_{x,m}(k) = \frac{1}{\sqrt{|s_0^m|}} \int x(t) \psi^* (s_0^{-m} t - k\tau_0) dt \quad m, k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

일반적으로 s_0 와 τ_0 의 값은 2와 1을 사용하고 m, k 는 표본화(sampling) 과정에 사용되는 매개변수이다.

DWT가 컴퓨터를 이용하여 CWT의 계산을 가능하게 하였으나 이는

단기 CWT의 표본화된 변환에 불과하므로 불필요한 계산이 많아 비효율적이다. 이러한 단점을 보완하고자 1989년 Mallat에 의해 DWT를 보다 빠르고 효율적으로 계산할 수 있는 계층적 알고리즘인 MRA 방법이 제안되었다[1, 16-18].

2-1-3. Multi-Resolution Analysis(MRA)

De-noising에는 일반적으로 고속 이산 웨이블렛(fast discrete wavelet) 알고리즘인 MRA가 사용된다. MRA는 웨이블렛 변환의 일종으로 필터(filter)를 이용하며, 필터들의 직교성을 이용하여 계산량을 현저히 줄인 방법이다. 필터의 형태는 사용하는 모 웨이블렛에 따라 결정되며 서로 직교하는 저역 필터(low-pass filter)역할을 하는 scaling 함수[식 (4)]와 고역 필터(high-pass filter)역할을 하는 웨이블렛 함수[식 (5)]를 사용한다.

$$\phi(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h(m) \sqrt{2} \phi(2x - m) \quad (4)$$

$$\psi(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g(m) \sqrt{2} \phi(2x - m) \quad (5)$$

$$g(m) = (-1)^m h(1-m) \quad (6)$$

여기서 $h(m)$ 은 저역 필터 계수이고 $g(m)$ 은 고역 필터 계수이다. 필터 계수들과 dyadic down sampling 과정을 거친 신호의 convolution에 의해 계산되며 정규화를 위해 $\sqrt{2}$ 가 사용된다. 모 웨이블렛으로 사용한 Daubechies 3 웨이블렛은 Fig. 1에 나타내었다.

Fig. 2(a)와 (b)는 식 (4)와 (5)를 블록선도로 도시한 것이며 레벨에 따라서 분해(decomposition)과정과 재구성(reconstruction)과정을 거치게 된다. 분해 과정에서 저역 필터에 의해 분해된 신호를 approximation 계수(cA)라 하고 고역 필터에 의해 분해된 신호는 detail 계수(cD)라 한다. 이때 분해된 각 계수는 개수를 절반으로 줄여주는 dyadic down-sampling 과정을 거치며 분해된 approximation계수는 다음 레벨을 수행하는데 이용된다. 재구성 과정은 분해된 계수들을 결합하는 과정으로 분해과정에서 절반으로 줄어든 개수를 원래 상태로 환원하는 dyadic up-sampling 과정을 거쳐 신호를 복원한다.

레벨에 따른 표본화 과정에 의해 시간 해상도가 조절되고 filtering과정에 의해 주파수 간격이 조절된다. 따라서 레벨에 따라 시간과 주파수에 대해 다양한 해상도를 갖게 되는데, 이는 MRA라 불리는 중요한 이

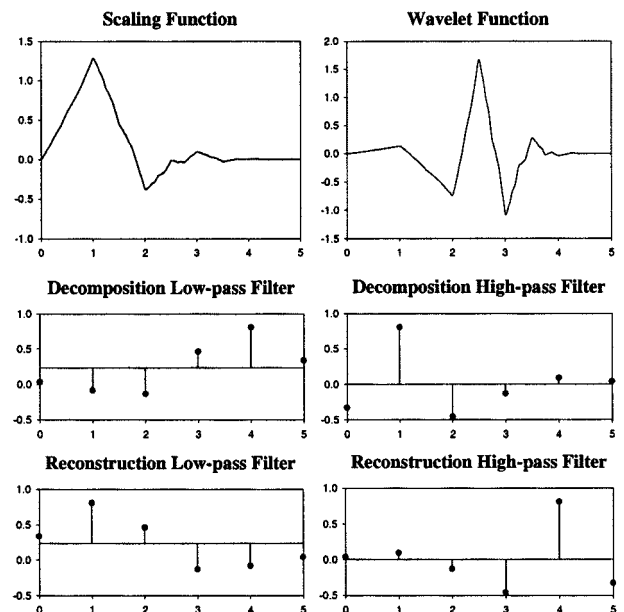


Fig. 1. 'Daubechies 3' wavelets.

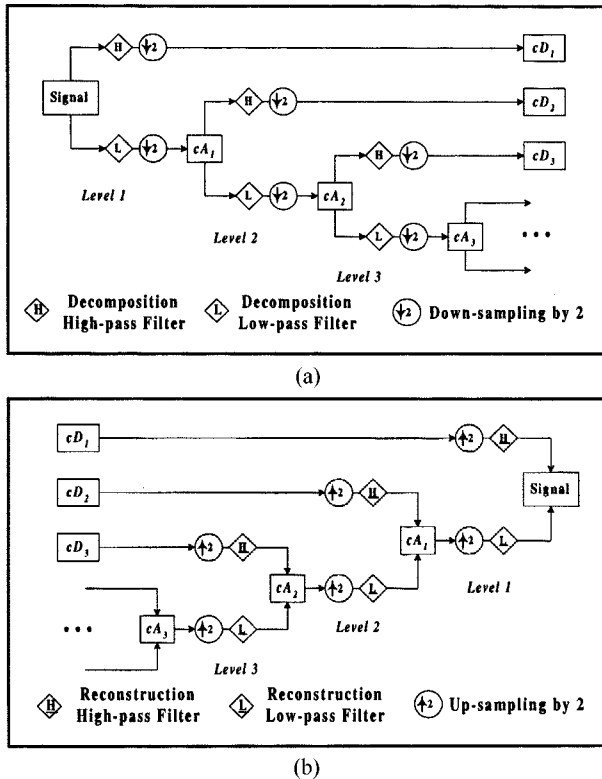


Fig. 2. (a) Decomposition process of MRA, (b) Reconstruction process of MRA.

유가 된다[17, 18].

2-2. De-noising

De-noising은 일반적으로 잡음은 참 신호에 비해 주파수가 크다는 점에 착안하여 잡음을 제거하는 방법이다.

웨이브렛 변환을 이용한 de-noising 과정은 크게 3단계로 이루어진다[2, 5, 7].

1 단계 - 분해과정

레벨을 선택하고, 선택된 레벨까지 분해과정을 수행

2 단계 - Detail 계수들을 threshold 과정에 적용

각각의 레벨에 대해 threshold 방법을 결정하고, shrinkage 함수에 적용

3 단계 - 재구성 과정

수정된 detail 계수와 기존의 approximation 계수를 이용하여 역 변환 두 번째 단계는 de-noising 과정에서 실질적으로 중요한 단계로서 threshold 방법에서 계산된 threshold값인 λ 을 이용하여 shrinkage 함수에 의해 고주파 정보를 포함하는 detail 계수들을 수정한다.

2-2-1. Threshold 값의 선택

Shrinkage 함수에 적용시키기 위한 λ 값을 구하는 방법이다. Threshold 값이 너무 작으면 여전히 잡음을 많이 포함할 것이고, 반대로 threshold 값이 너무 크면 신호의 중요한 정보가 손실되어 큰 바이어스와 분산을 야기할 것이다. 따라서 각 레벨에 대해 적절한 threshold 값을 결정하는 방법은 중요한 문제가 된다. 이에 대한 여러 방법들이 보고되어 있지만 본 연구에서는 minimax, universal, SURE, hybrid, GCV 방법을 사용하였다.

• Minimax

Minimax risk bound를 최소로 하는 λ 값을 계산한다.

각각의 shrinkage 함수에 대한 λ 값들은 Gao에 의해 계산된 값을 사용하였다[7-9].

• Universal

식 (7)과 같이 detail 계수의 개수에 의해 계산되므로 계산 과정이 비교적 간단하고 잡음의 크기가 작은 경우에 성능이 좋다고 알려져 있다[6].

$$\lambda = \sqrt{2 \log(n_j)} \quad (7)$$

여기서 n_j 는 레벨 j 에서 detail 계수의 개수이다.

• Stein's Unbiased Risk Estimate(SURE)

SURE criterion을 최소로 하는 값을 선택한다[3, 6, 10, 19].

SURE 방법은 계산은 복잡하지만 분산과 바이어스를 고려하는 보다 합리적인 방법이다. MRA의 레벨에 따라 계산 되어지며 잡음의 크기가 클수록 성능이 좋다고 알려져 있다. j 번째 레벨에서의 SURE criterion은 식 (8)로 표현된다.

SURE criterion :

$$\text{SURE}(\lambda, cD) = n_j - 2 \cdot \#\{i: |cD_i| \leq \lambda\} + \sum_{i=1}^{n_j} (|cD_i| \wedge \lambda)^2 \quad (8)$$

여기서 $\#$ 은 조건을 만족하는 계수들의 개수이고 $x \wedge y$ 는 두 값 중에서 작은 값을 선택하는 기호이다.

• Hybrid

아래에 정의된 hybrid 정의 (I), (II)에 의해 잡음의 크기가 작으면 SURE 방법이 좋지 않으므로 universal 방법을 선택하고, 그 이외에는 SURE와 universal 방법 중 작은 λ 값을 선택하는 수정된 SURE 방법이다[3]. j 번째 레벨의 경우 다음과 같은 방법에 의해서 λ 값을 선택한다.

(I) $S_j^2 \leq Q/\sqrt{n_j}$ 인 경우: 잡음의 크기가 작은 경우로 universal 방법을 선택.

(II) $S_j^2 \leq Q/\sqrt{n_j}$ 인 경우: 잡음의 크기가 큰 경우로 위에서 설명한 방법에 따라 λ 값을 선택

$$S_j^2 = n_j^{-1} \sum_{i=1}^{n_j} (cD_i^2 - 1), Q_j = \log_2(n_j)^{3/2} \quad (9)$$

• Generalized Cross-Validation(GCV)

연속성을 전제로 하므로 soft shrinkage와 non-negative garrote shrinkage에 적용되며 불연속성을 갖는 hard shrinkage에는 적용할 수 없는 threshold 방법이다. GCV함수는 식 (10)과 같이 detail계수만의 함수로 이루어져 있기 때문에 잡음에 대한 사전지식이 필요 없다. 각 레벨에 대해 GCV 함수를 최소로 하는 δ 값을 계산하고 이를 threshold 값(λ)으로 이용한다. 직접 최소값을 찾기 때문에 최적의 방법이라 할 수 있지만 계산과정이 비교적 복잡하다. 이때 각 레벨에서 δ 는 0에서부터 cD_j 의 최대값을 범위로 하는 값을 사용하였고 황금 분할 법(golden section method)을 이용하여 GCV 함수의 최소값을 결정하였다[20-24].

$$\text{GCV}_j(\delta) = \frac{\frac{1}{n_j} \|cD_j - cD_{j,\delta}\|^2}{\left(\frac{n_{j,0}}{n_j}\right)^2} \quad (10)$$

여기서 $n_{j,0}$ 는 레벨 j 에서 0값을 갖는 detail 계수의 개수이고 $cD_{j,\delta}$ 는 레벨 j 에서 주어진 threshold 값(δ)을 이용하여 soft, non-negative garrote shrinkage에 의해 수정된 detail 계수이다. $\|x\|^2$ 은 제곱 norm을 나타내는 기호이다.

2-2-2. Shrinkage 함수

본 연구에서는 네 가지 shrinkage 함수를 사용하였다. Hard shrinkage는 keep-or-kill 방법으로, detail 계수의 절대값이 λ 보다 작은 경우 detail 계수를 0으로 수정한다. Soft shrinkage는 shrink-or-kill로서 detail 계수의 절대값이 λ 보다 작은 경우 detail 계수를 0으로 하고 그 이외의 detail 계수들은 soft shrinkage 함수에 의해 줄여주는 규칙이다. Soft shrinkage

는 비교적 큰 값을 갖는 계수를 줄일 때 hard shrinkage에 비해 바이어스가 크게 나타난다. Hard shrinkage는 불연속적이기 때문에 soft shrinkage보다 분산이 크고 불안정한 편이다[3, 4, 7]. 이들의 단점을 보완하고자 보다 작은 바이어스와 안정성을 갖는 Non-Negative Garrote shrinkage가 제안되었다[8]. Firm shrinkage는 semi-soft shrinkage라고도 하며 hard shrinkage와 soft shrinkage를 혼합한 중간 형태이다. Minimax 방법에만 사용하였으며 Gao에 의해 계산된 값을 사용하였다. Detail 계수의 절대값이 λ_1 보다 작은 경우 detail 계수를 0으로 하고 λ_2 값 보다 큰 경우는 detail 계수를 보존하며 나머지 경우는 soft shrinkage함수에 의해 detail 계수 값을 수정한다[9].

각 방법에 의해 detail 계수를 수정하기 위한 식들은 아래와 같다.

• Hard

$$T_{hard}(cD; \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{for } |cD| \leq \lambda \\ cD & \text{for } |cD| > \lambda \end{cases} \quad (11)$$

• Soft

$$T_{soft}(cD; \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{for } |cD| \leq \lambda \\ \text{sign}(cD)(|cD| - \lambda) & \text{for } |cD| > \lambda \end{cases} \quad (12)$$

• Non-Negative Garrote

$$T_{Garrot}(cD; \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{for } |cD| \leq \lambda \\ cD\{1 - (\lambda/|cD|)^2\} & \text{for } |cD| > \lambda \end{cases} \quad (13)$$

• Firm(Semi-soft)

$$T_{Firm}(cD; \lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} 0 & \text{for } |cD| \leq \lambda_1 \\ \text{sign}(cD) \frac{\lambda_2(|cD| - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} & \text{for } \lambda_1 < |cD| \leq \lambda_2 \\ cD & \text{for } |cD| > \lambda_2 \end{cases} \quad (14)$$

여기서 sign은 부호를 결정해 주는 signum function이다.

2-2-3. Scale

Shrinkage 함수들은 threshold 값에 의해 좌우되기 때문에 적절한 λ 값의 선택은 아주 중요하다. 레벨 의존성을 갖는 MRA에서 잡음이 가우스 분포를 따르는 white noise인 경우는 레벨에 대해 잡음의 영향을 고려하지 않아도 되나 colored noise를 갖는 경우에는 레벨에 따른 detail 계수의 상관관계를 고려해야 한다[11]. 따라서 레벨에 따라 잡음의 크기를 고려한 threshold 값의 계산이 필요하게 되는데 이를 scale을 이용하여 보정한다. 식 (15)를 이용하여 구한 추정된 표준편차를 각각의 threshold값에 곱해 적용한다. 일반적으로 white noise일 경우에도 레벨을 고려하여 scale을 이용한 threshold 값을 계산하는 것이 더욱 적합하다고 알려져 있다[6].

$$\hat{\sigma}_j = \frac{MAD(cD_j)}{0.6745} \quad (15)$$

여기서 MAD는 0으로부터의 median absolute deviation이고 0.6745는 가우스 분포를 갖도록 하는 조정인자이다.

2-3. 시스템 식별(System Identification)

시스템 식별은 입출력 데이터로부터 시스템에 대한 동적 모델을 추정하는 수학적 모델링의 한 영역으로 흔히 black box modeling이라 한다. 입출력 데이터로부터 공정 모델을 결정하기 위해서는 다음의 4단계를 거치게 된다[25, 26].

단계 1. 입출력 자료 수집

공정에 대한 좋은 모델을 얻기 위해서는 해당 공정에 대한 충분한 정보를 포함하는 입출력 데이터가 필요하다.

단계 2. 모델의 선택

모델 구조를 선택하고 선택된 모델에 대한 차수와 시간지연을 결정한다. 단일 입출력계의 일반화된 선형 모델 구조는 입력 $u(t)$ 와 출력 $y(t)$ 를 연관시키는 식 (16)으로 표현될 수 있다[26].

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t-nk) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (16)$$

식 (16)에서의 $A(q)$, $B(q)$, $C(q)$, $D(q)$ 및 $F(q)$ 는 q^{-1} 에 대한 다항식으로 아래와 같이 표현된다.

$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + \Lambda + a_{na}q^{-na}, B(q) = b_1q^{-1} + \Lambda + b_{nb}q^{-nb},$$

$$F(q) = 1 + f_1q^{-1} + \Lambda + f_{nf}q^{-nf}, C(q) = 1 + c_1q^{-1} + \Lambda + c_{nc}q^{-nc},$$

$$D(q) = 1 + d_1q^{-1} + \Lambda + d_{nd}q^{-nd}$$

여기서 nk 는 시간지연, $e(t)$ 는 white noise를 나타내고 q^{-1} 는 Backward shift operator로 예를 들면, $q^{-1}y(t) = y(t-1)$ 의 관계를 보인다.

본 연구에서는 매개 변수 B 를 이용하는 Finite Impulse Response(FIR) 모델과 B 와 F 를 이용하는 Output Error(OE) 모델을 사용하였다.

단계 3. 공정 모델의 매개 변수 추정

선택된 모델에 의해 계산된 출력 데이터가 실험에 의해 얻어진 출력 데이터에 적합하도록 최적의 매개 변수들을 얻기 위해서는 특별한 판단기준이 필요하다. 시스템 식별에서는 이러한 판단기준을 loss function이라 하며 일반적으로 식 (17)의 형태를 갖는 평균제곱오차(Mean Square Error, MSE)의 형태를 갖는다.

$$V_{loss} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y(t) - \hat{y}(t))^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t) \quad (17)$$

여기서 N 은 모델 추정에 사용된 데이터의 개수, $y(t)$ 는 측정출력치, $\hat{y}(t)$ 는 시간 t 에서의 추정 출력을 의미한다.

단계 4. 모델 validation

추정된 모델이 사용목적에 충분히 좋은지를 검증하는 단계로 모델을 추정하는 과정(단계 3)에 사용되지 않은 데이터를 이용한다. Validation 과정은 모델 차수 결정과도 관련된다. 차수를 증가시키면서 시스템 식별과정을 행한 후, 만족할만한 validation결과를 얻으면 중단하고 이때의 모델 구조를 선택한다. 판단기준은 차수가 증가함에 따른 loss function의 감소 정도를 이용한다[25].

2-3-1. FIR 모델

공정에 대한 사전지식(시간 지연, 모델 차수 등)이 필요 없다는 장점을 갖고 있으나 많은 수의 매개 변수들을 필요로 한다는 단점을 가지고 있다. FIR 모델을 통해 얻은 시간 지연을 다른 모델 구조(OE, BJ 등)에 이용할 수 있으며 식 (18)로 표현된다[25, 26].

$$y(t) = B(q)u(t-nk) \quad (18)$$

2-3-2. OE 모델

OE 모델은 선형 이산 시간 모델에 대해 가장 직접적이고 비교적 간단한 방법이다[25, 26].

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t-nk) + e(t) \quad (19)$$

OE 모델은 공정에 대한 사전지식이 필요하며 보통 FIR 모델을 이용하여 시간지연을 얻는다. OE 모델의 loss function은 식 (20)으로 표현할 수 있으며 모델 매개변수에 대해 비선형이다. 이 모델에 대한 매개 변수들의 값은 loss function을 최소화 함으로서 결정되는데 loss function이 매개 변수들에 대해서 비선형이므로 비선형 회귀분석법을 이용해야 한다.

$$V_{OE} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_{OE}^2(t) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [y(t) - \hat{y}(t)]^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[y(t) - \frac{\hat{B}(q)}{F(q)} u(t-nk) \right]^2 \quad (20)$$

3. Simulation

2,000개의 Pseudo-Random Binary Sequence(PRBS)를 입력으로 하고 Table 2의 매개 변수와 식 (19)에서 잡음 항을 제외한 OE 모델을 이용하여 입력으로부터 출력 신호를 생성하여 이를 참 신호로 사용하였다. 이때 시험모델 1과 시험모델 2의 서로 다른 특성을 갖는 두 개의 신호를 생성하였으며 각 모델의 특성은 다음과 같다[27].

시험모델 1: 시간 지연이 2인 3차계

시험모델 2: 시간 지연이 없는 3차 역 응답계

생성된 참 신호에 NSR이 5, 10, 30, 50, 75, 100%를 갖도록 가우스 분포를 갖는 white noise을 첨가하여 측정 출력 신호(measured output signal)를 생성하였으며 NSR의 정의는 식 (21)과 같다.

$$NSR(\%) = \frac{\text{Variance of Noise}}{\text{Variance of True Signal}} \times 100(\%) \quad (21)$$

Table 2. OE parameters applied on each test model

	B	F
Model #1	[0 0 0 0.075-0.0425 0.005]	[1-2.4 1.91-0.504]
Model #2	[0-0.175-0.365-0.18]	[1-2.46 2.0-0.5376]

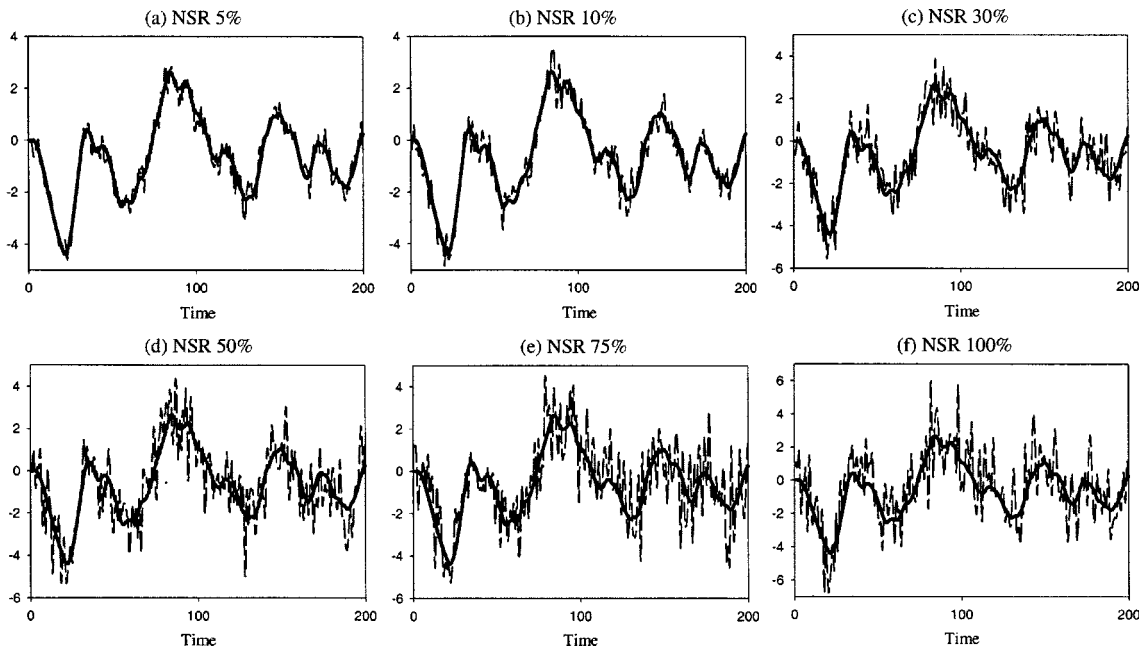


Fig. 3. True(solid lines) and various measured signals(dashed lines) of test model #1.

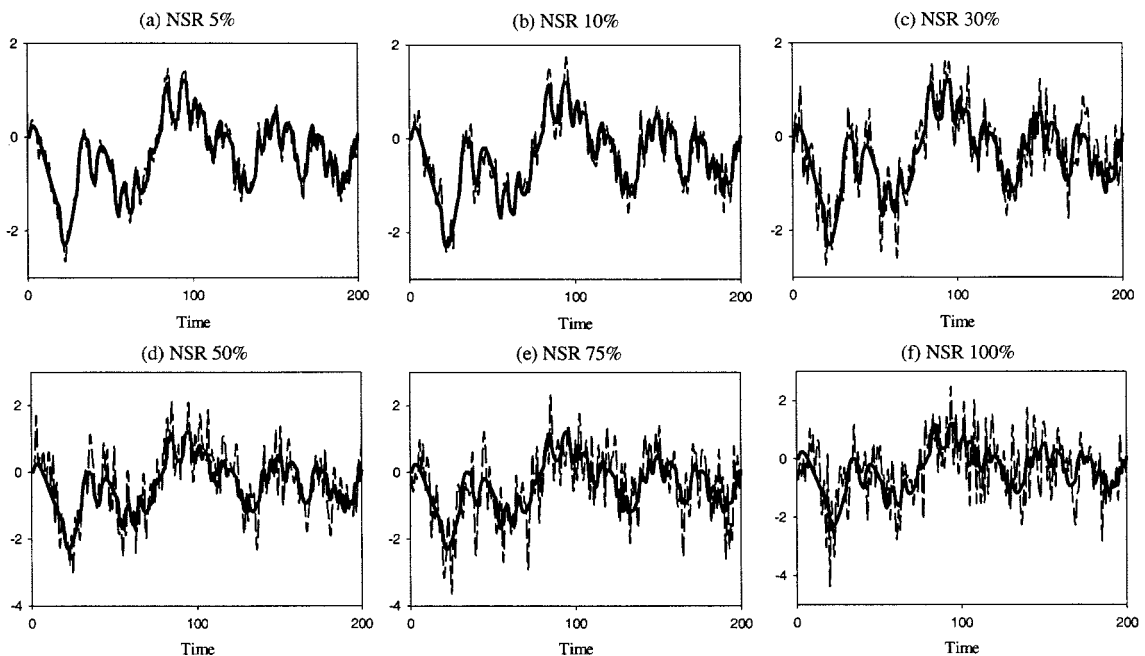


Fig. 4. True(solid lines) and various measured signals(dashed lines) of test model #2.

잡음이 첨가된 측정신호에 각각의 de-noising 알고리즘을 적용하였고 성능의 척도로는 평균제곱오차를 사용하였다. MRA 과정에서 레벨은 레벨을 증가시켜 계산한 후, 각각의 NSR에 따라 MSE가 작은 최적의 레벨을 선택하였다.

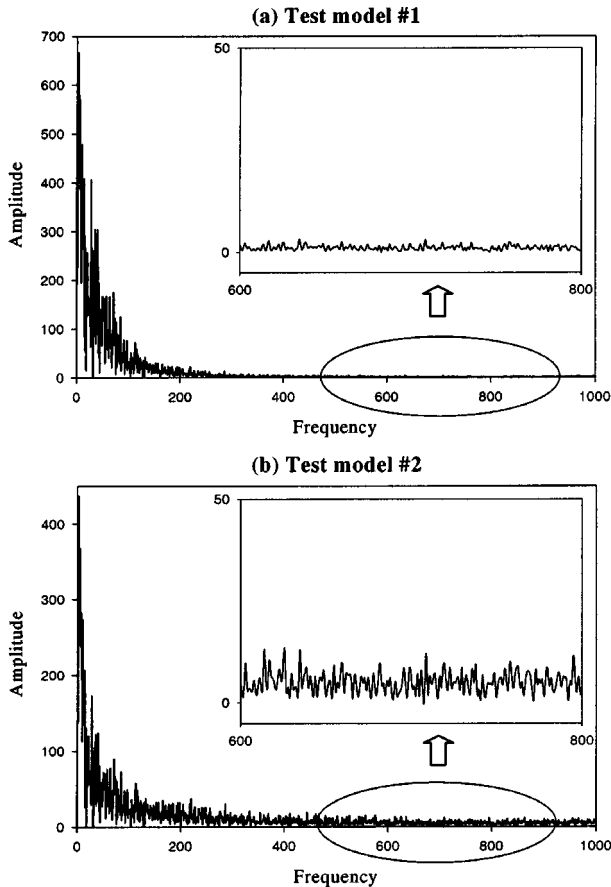


Fig. 5. Frequency vs. amplitude plot using fast fourier transform.

잡음이 제거된 신호를 시스템 식별에 적용할 때 2,000개의 자료 중 1,024 (2^{10})개는 모델 추정에 사용하였고 나머지 976개는 모델 validation에 사용하였다.

OE 모델을 이용한 validation과정에서 각각의 매개 변수에 대한 global minimum 값을 찾기 위해 반복 계산이 필요하다. 최대 50번의 반복 계산을 수행하였으며 50번 이내에 수렴 기준에 적합하지 않은 신호는 고려 대상에서 제외하였다. 수렴 기준으로는 gradient norm[26, 28]이 10^{-2} 보다 작은 경우를 사용하였다.

잡음은 가우스 분포를 갖는 난수를 발생시켜 생성하였기 때문에 같은 NSR을 갖는 잡음이라도 잡음의 발생 순서에 따라 MSE가 달라지게 된다. 따라서 모든 과정의 MSE는 50-100번의 잡음 발생과정을 거쳐 충분히 수렴시킨 후 MSE의 평균값을 사용하여 여러 가지 방법들을 비교하였다.

각각의 참 모델에 다양한 NSR을 갖도록 잡음을 첨가하여 생성한 측정신호를 Fig. 3과 4에 나타내었다.

시험모델 1과 시험모델 2로부터의 참 출력 신호에 대한 주파수와 진폭의 관계를 후리에 변환을 이용하여 Fig. 5에 나타내었다. 이 그림에서 보면 시험모델 2는 시험모델 1에 비하여 참 신호 자체에 고주파 부분을 상당히 많이 포함하는 noisy signal임을 알 수 있다.

본 연구에서는 MATLAB을 이용하여 simulation을 수행하였으며 Wavelet Toolbox와 System Identification Toolbox를 이용하였다.

4. 결과 및 고찰

4-1. 웨이브렛 de-noising

MRA를 이용한 de-noising 과정의 레벨에 대한 영향을 알아 보기 위해 레벨을 증가시키면서 de-noising을 수행하였으며 de-noising 성능의

Table 3. Simulation results of MRA level with minimum average MSE for various NSR values

	NSR(%)	5	10	30	50	75	100
Level	Test model #1	2	2-3	3	3	3-4	4
	Test model #2	1	2	2	3	3	4

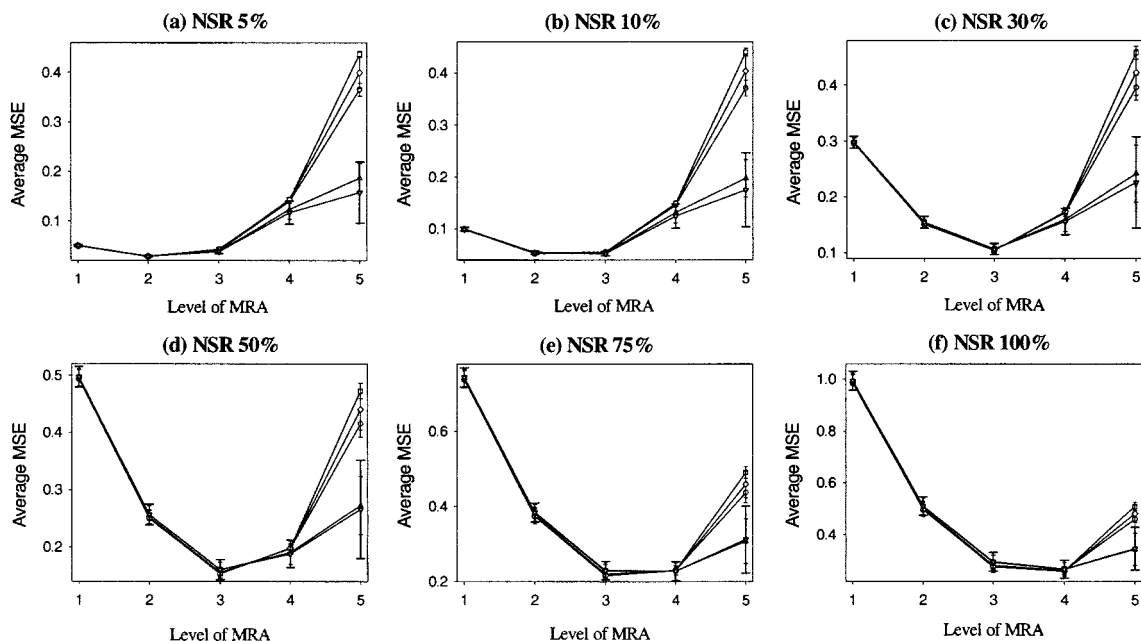


Fig. 6. Effect on level of MRA for test model #1(Soft shrinkage case with various threshold methods). “circle”=Minimax, “square”=Universal, “triangle up”=SURE, “diamond”=Hybrid, “triangle down”=GCV.

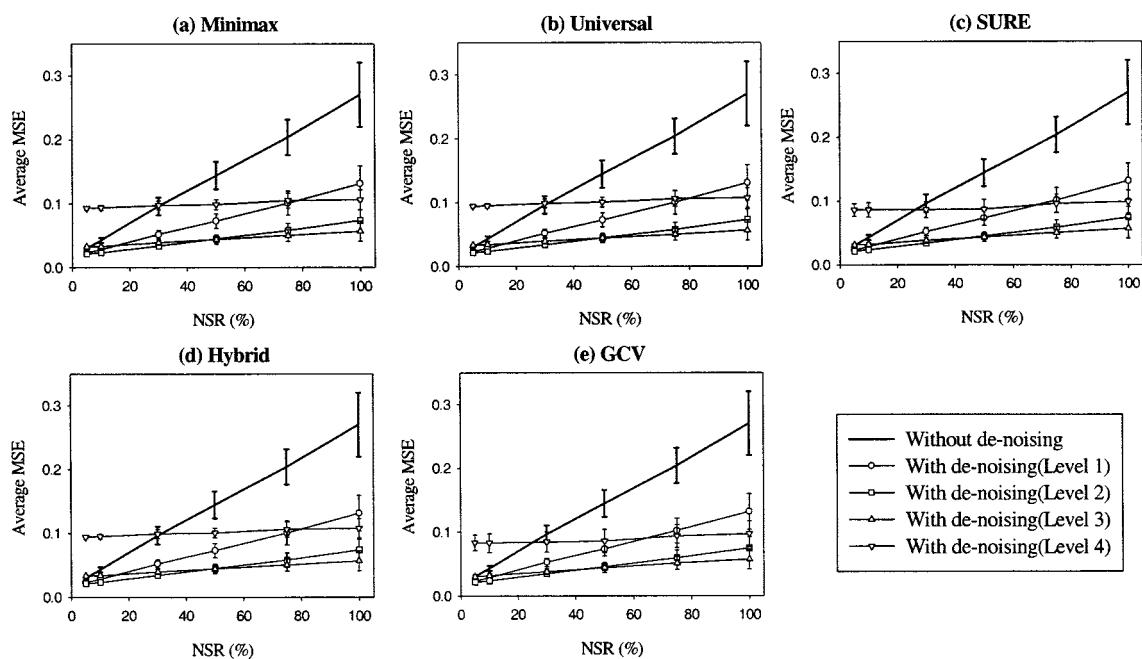
Table 4. MSE of de-noised signal for test model #1 (Universal threshold case with various shrinkage methods)

NSR(%)	MSE (Without de-noising)	Level		Hard	Soft	Non-Negative Garrote
5	Mean : 0.0986	2	Mean	0.0283	0.0281 [†]	0.0283
			Std	0.0014	0.0014	0.0014
10	Mean : 0.1972	2	Mean	0.0528	0.0529	0.0525 [†]
			Std	0.0026	0.0026	0.0026
30	Mean : 0.5912	3	Mean	0.1052	0.1041 [†]	0.1041 [†]
			Std	0.0069	0.0065	0.0065
50	Mean : 0.9856	3	Mean	0.1549	0.1532 [†]	0.1532 [†]
			Std	0.0102	0.0097	0.0097
75	Mean : 1.4788	3	Mean	0.2185	0.2156 [†]	0.2157
			Std	0.0169	0.0158	0.0158
100	Mean : 1.9708	4	Mean	0.2638	0.2603 [†]	0.2603 [†]
			Std	0.0174	0.0160	0.0160

Table 5. MSE of de-noised signal for test model #1 (Soft shrinkage case with various threshold methods)

NSR(%)	MSE (Without de-noising)	Level		Minimax	Universal	SURE	Hybrid	GCV
5	Mean : 0.0986	2	Mean	0.0283	0.0281 [†]	0.0286	0.0281 [†]	0.0286
			Std	0.0014	0.0014	0.0015	0.0014	0.0017
10	Mean : 0.1972	2-3	Mean	0.0531(2)	0.0529(2)	0.0524(3)	0.0525(2)	0.0521(3) [†]
			Std	0.0027	0.0026	0.0042	0.0026	0.0044
30	Mean : 0.5912	3	Mean	0.1062	0.1041 [†]	0.1067	0.1041 [†]	0.1067
			Std	0.0072	0.0065	0.0087	0.0065	0.0101
50	Mean : 0.9856	3	Mean	0.1569	0.1532 [†]	0.1598	0.1532 [†]	0.1603
			Std	0.0107	0.0097	0.0134	0.0097	0.0172
75	Mean : 1.4788	3-4	Mean	0.2216(3)	0.2156(3) [†]	0.2270(3)	0.2156(3) [†]	0.2273(4)
			Std	0.0177	0.0158	0.0194	0.0158	0.0257
100	Mean : 1.9708	4	Mean	0.2676	0.2603	0.2661	0.2599 [†]	0.2671
			Std	0.0189	0.0160	0.0264	0.0264	0.0346

The index in parentheses indicates MRA level

**Fig. 7. Results of validation based on FIR method for test model #1(Soft shrinkage case with various threshold methods).**

척도로는 참 신호와 de-noising 과정을 거친 신호 사이의 MSE를 사용하였다. 최대 MRA의 레벨을 5로 했을 때 평균 MSE(average MSE)가 가장 작은 레벨을 Table 3에 정리하였다. 본 연구에서 사용한 여러 알고리즘을 레벨에 따라 적용한 결과로는 MSE 값의 차이는 있으나 평균 MSE가 최소인 레벨은 거의 같은 경향을 보였다. 대표적으로 soft shrinkage의 경우 시험모델 1의 여러 레벨에 대한 de-noising결과를 Fig. 6에 나타내었다.

Table 3에서 보듯이 잡음의 크기가 클수록 MRA과정에서는 더욱 높은 레벨을 필요로 함을 알 수 있고 동일한 NSR에 대해 시험모델 2는 시험모델 1에 비하여 낮은 레벨을 사용하여야 함을 알 수 있었다. 이것은 시험모델 2는 시험모델 1에 비해 참 신호 자체가 noisy특성을 가지므로 MRA과정에서 레벨이 높아짐에 따라 잡음뿐만 아니라 참 신호의

고주파 정보가 함께 제거되기 때문에 이런 결과를 보인다고 생각된다.

Table 4는 universal threshold를 사용한 경우로 시험모델 1에 여러 가지 shrinkage 방법을 적용했을 때의 결과를 나타냈으며 다른 threshold 방법을 사용한 경우도 비슷한 경향을 보였다. Table 4에서 알 수 있듯이 시험모델 1의 경우 불연속성을 갖는 hard shrinkage에 비하여 연속적인 soft shrinkage와 non-negative garrote shrinkage가 평균 MSE 값은 큰 차이가 없었지만 더 나은 성능을 보인다. 그리고 시험모델 2에 대해서도 같은 결과를 얻었다. 각각의 Table들은 평균 MSE(Mean으로 표기)와 표준편차(Std로 표기)를 수치로 나타내었으며 기호 ‘+’를 이용하여 가장 작은 평균 MSE를 구별하였다.

Table 5에는 대표적으로 soft shrinkage함수를 사용하여 여러 가지 threshold 방법을 적용했을 경우의 MSE를 시험모델 1의 경우에 대해서 나

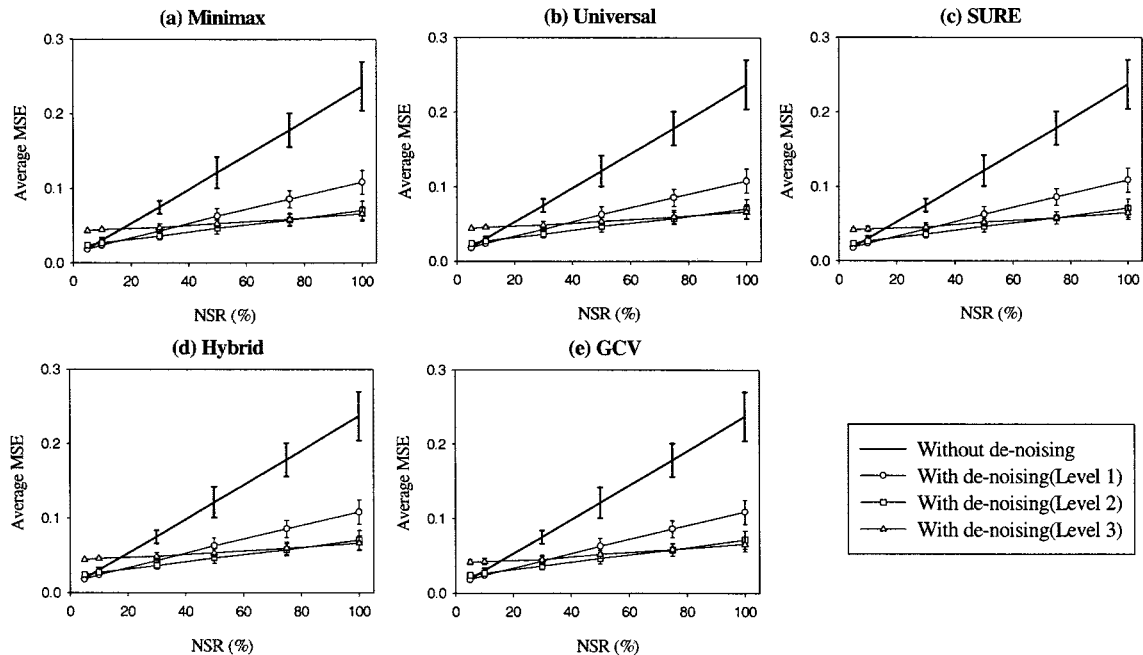


Fig. 8. Results of validation based on FIR method for test model #2(Soft shrinkage case with various threshold methods).

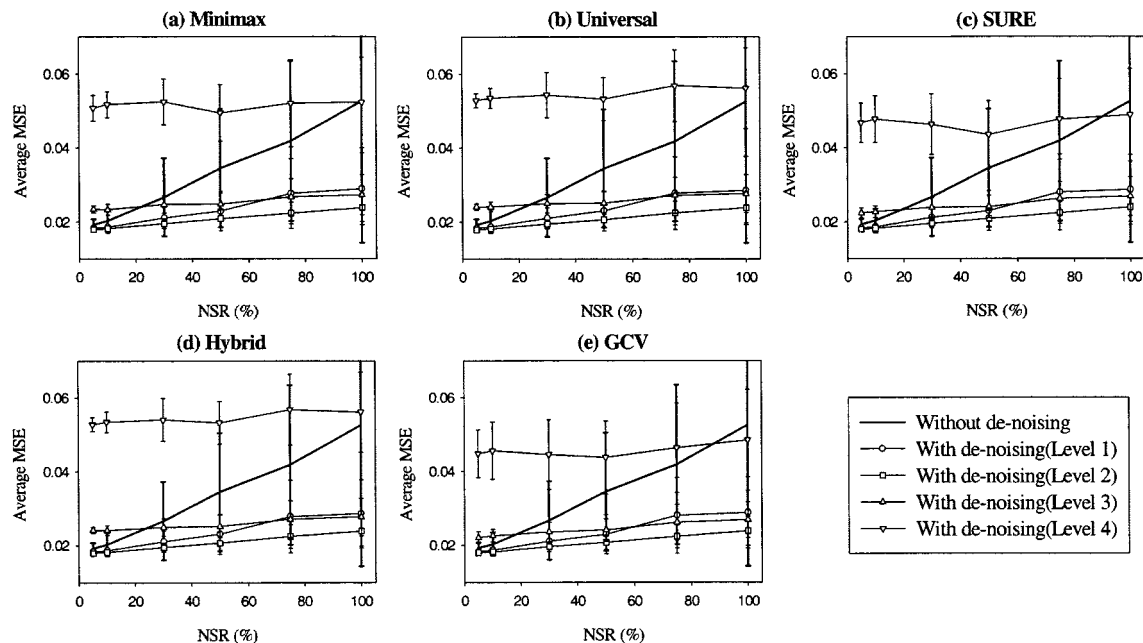


Fig. 9. Results of validation based on OE method for test model #1(Soft shrinkage case with various threshold methods).

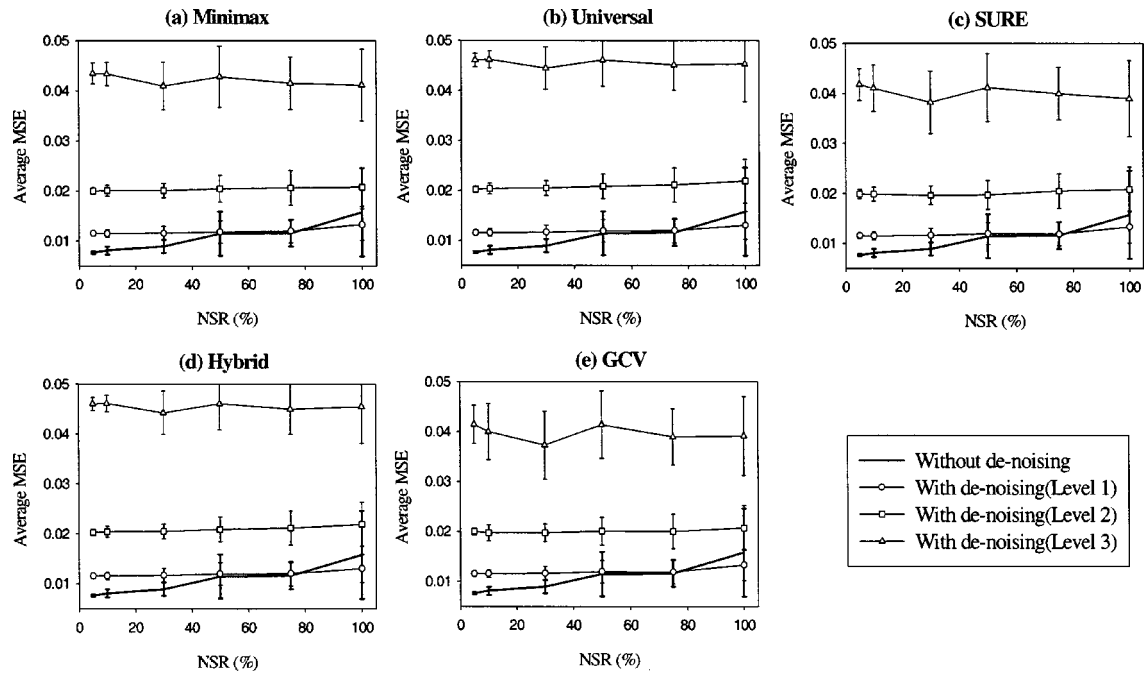


Fig. 10. Results of validation based on OE method for test model #2 (Soft shrinkage case with various threshold methods).

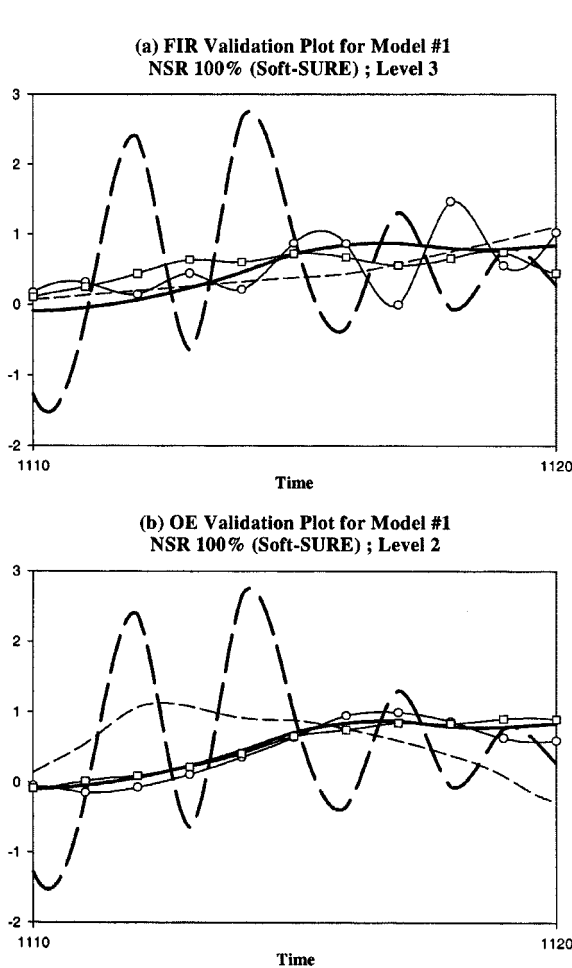


Fig. 11. Model validation for test model #1 (Soft shrinkage case with SURE threshold method). "heavy solid line"=True signal, "heavy dashed line"=Measured signal, "circle"=Predicted signal (without de-noising), "light dashed line"=De-noised signal, "square"=Predicted signal (with de-noising).

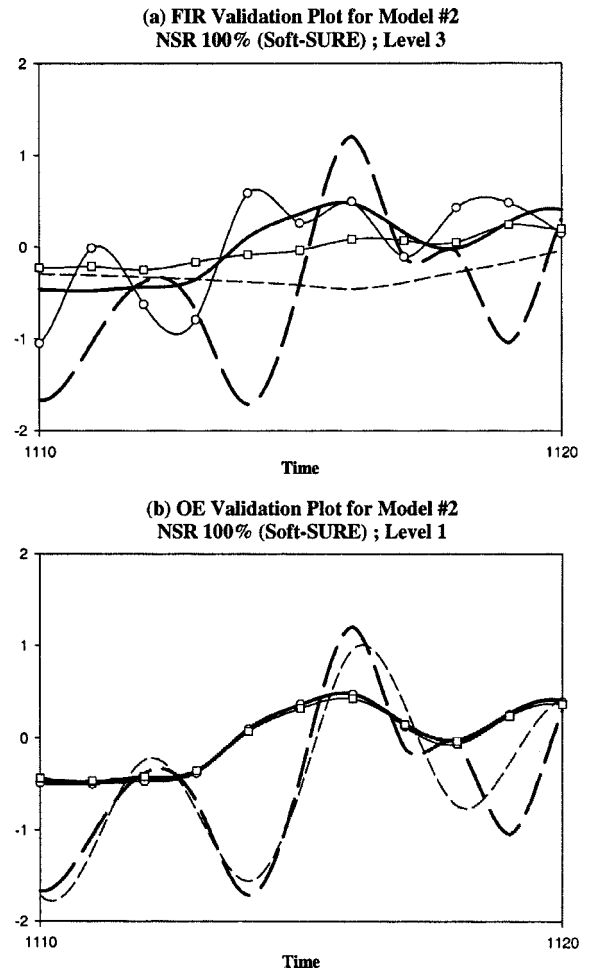


Fig. 12. Model validation for test model #2 (Soft shrinkage case with SURE threshold method). "heavy solid line"=True signal, "heavy dashed line"=Measured signal, "circle"=Predicted signal (without de-noising), "light dashed line"=De-noised signal, "square"=Predicted signal (with de-noising).

타내었으며, 다른 shrinkage에서도 비슷한 경향을 보였다. Threshold의 경우 시험모델 1은 universal과 hybrid 방법이 더 좋은 결과를 보이고 있으며, 시험모델 2의 경우는 낮은 NSR에서는 universal 방법이 좋고 NSR이 30% 이상에서는 SURE방법이 더 좋은 결과를 나타낸 것으로 확인을 하였다.

4-2. 시스템 식별

FIR 모델과 OE 모델을 사용하여 시스템 식별 과정을 수행하였으며 여러 가지 de-noising 과정을 거친 신호와 de-noising 과정을 거치지 않은 신호에 대한 시스템 식별 성능을 비교하였다.

OE 모델을 사용하는데 있어서 웨이브렛 de-noising 효과를 조사하기 위해 de-noising을 한 경우와 그렇지 않은 경우 모두 참 신호의 모델 차수와 시간 지연을 사용하였다.

각각의 시험 모델들에 대한 validation결과인 평균 MSE를 대표적으로 soft shrinkage의 경우에 대해 그림(Fig. 7-10)과 표(Table 7-10)로 나타내었고 validation plot을 Fig. 11과 12에 나타내었다.

FIR 방법을 이용한 경우는 Fig. 7-8과 Table 7-8에 나타내었다. 두 시험모델 모두 de-noising 과정을 거친 신호가 de-noising을 거치지 않은 신호에 비해 훨씬 더 좋은 성능을 보였고 모든 shrinkage와 threshold에서 NSR이 증가할수록 de-noising을 한 경우가 시스템 식별 성능이 더 좋아짐을 확인할 수 있었다.

또한 de-noising 과정의 MRA레벨에 대한 영향을 알아 보기 위하여

Table 6. The optimal MRA levels in model validation of FIR method

NSR(%)		5	10	30	50	75	100
Level	Model #1	2	2	2	2	3	3
	Model #2	1	1	2	2	2	3

가장 좋은 validation을 갖는 레벨을 Table 6에 정리하였다. 시험모델 1의 경우 Table 3의 de-noising 레벨과 비교하면 가장 좋은 공정모델을 얻기 위해서는 최적의 de-noising 레벨보다는 한 단계 정도 낮은 레벨을 선택해야 함을 알 수 있다. 이는 Table 3의 레벨을 사용한 경우에는 de-noising 과정에서 참 신호와의 MSE는 작지만 실제로는 참 신호의 정보를 상당부분 잃기 때문에 이러한 결과를 보인 것으로 생각된다. 시험모델 2도 시험모델 1과 유사한 결과를 보여 주는데 시험모델 1에 비해 상대적으로 낮은 레벨을 선택해야 함을 알 수 있었다. 이것은 시험모델 2의 신호 특성에서 찾을 수 있으며 참 신호 자체에 고주파를 많이 포함하는 noisy 신호는 de-noising 과정에서 참 신호의 정보가 손상되기 때문에 낮은 레벨을 선택하여 신호의 정보가 손상되는 것을 방지해야 할 것으로 생각된다.

OE 방법을 이용한 경우는 Fig. 9-10과 Table 9-10에 나타내었다. 시험모델 1은 레벨 2(NSR 5%인 경우) 이하 또는 레벨 3(NSR 30%이상인 경우)이하에서 de-noising을 거친 신호를 사용한 경우가 그렇지 않은 신

Table 7. Average MSE in model validation of FIR method for test model #1(Soft shrinkage case with various threshold methods)

NSR(%)	Without de-noising	Level		Minimax	Universal	SURE	Hybrid	GCV
5	Mean : 0.0302 Std : 0.0022	1	Mean	0.0233	0.0233	0.0233	0.0233	0.0234
			Std	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011
		2	Mean	0.0215 [†]	0.0215 [†]	0.0215 [†]	0.0215 [†]	0.0216
			Std	0.0009	0.0009	0.0009	0.0009	0.0009
		3	Mean	0.0329	0.0335	0.0311	0.0334	0.0304
			Std	0.0014	0.0015	0.0020	0.0015	0.0029
		4	Mean	0.0931	0.0943	0.0858	0.0943	0.0832
			Std	0.0024	0.0023	0.0099	0.0022	0.0122
30	Mean : 0.0963 Std : 0.0138	1	Mean	0.0521	0.0520	0.0522	0.0520	0.0523
			Std	0.0065	0.0065	0.0065	0.0065	0.0068
		2	Mean	0.0340	0.0339 [†]	0.0342	0.0339 [†]	0.0343
			Std	0.0042	0.0042	0.0043	0.0042	0.0043
		3	Mean	0.0393	0.0396	0.0383	0.0396	0.0377
			Std	0.0038	0.0039	0.0042	0.0039	0.0043
		4	Mean	0.0976	0.0989	0.0865	0.0988	0.0840
			Std	0.0070	0.0070	0.0124	0.0070	0.0157
50	Mean : 0.1444 Std : 0.0213	1	Mean	0.0731	0.0728	0.0731	0.0728	0.0731
			Std	0.0113	0.0111	0.0112	0.0111	0.0114
		2	Mean	0.0449	0.0448	0.0452	0.0448	0.0451
			Std	0.0061	0.0062	0.0062	0.0062	0.0064
		3	Mean	0.0442	0.0444	0.0433 [†]	0.0443	0.0436
			Std	0.0074	0.0074	0.0072	0.0074	0.0079
		4	Mean	0.0987	0.1006	0.0870	0.1005	0.0854
			Std	0.0077	0.0075	0.0154	0.0074	0.0181
100	Mean : 0.2704 Std : 0.0502	1	Mean	0.1316	0.1313	0.1318	0.1313	0.1317
			Std	0.0276	0.0277	0.0278	0.0277	0.0278
		2	Mean	0.0740	0.0735	0.0744	0.0735	0.0746
			Std	0.0167	0.0168	0.0170	0.0168	0.0175
		3	Mean	0.0570	0.0568	0.0572	0.0567 [†]	0.0572
			Std	0.0155	0.0156	0.0155	0.0156	0.0156
		4	Mean	0.1061	0.1076	0.0990	0.1074	0.0966
			Std	0.0155	0.0152	0.0180	0.0153	0.0202

Table 8. Average MSE in model validation of FIR method for test model #2(Soft shrinkage case with various threshold methods)

NSR(%)	Without de-noising	Level		Minimax	Universal	SURE	Hybrid	GCV
5	Mean : 0.0186 Std : 0.0015	1	Mean	0.0181 [†]	0.0182	0.0182	0.0182	0.0181 [†]
			Std	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0012
		2	Mean	0.0238	0.0240	0.0237	0.0240	0.0237
			Std	0.0013	0.0013	0.0014	0.0013	0.0013
		3	Mean	0.0431	0.0441	0.0417	0.0441	0.0412
			Std	0.0014	0.0014	0.0024	0.0014	0.0033
30	Mean : 0.0749 Std : 0.0087	1	Mean	0.0429	0.0429	0.0429	0.0429	0.0429
			Std	0.0059	0.0059	0.0059	0.0059	0.0059
		2	Mean	0.0362	0.0364	0.0360 [†]	0.0364	0.0361
			Std	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048
		3	Mean	0.0475	0.0485	0.0454	0.0485	0.0446
			Std	0.0051	0.0050	0.0057	0.0050	0.0064
50	Mean : 0.1214 Std : 0.0208	1	Mean	0.0629	0.0629	0.0629	0.0629	0.0629
			Std	0.0104	0.0104	0.0105	0.0104	0.0104
		2	Mean	0.0467	0.0468	0.0466 [†]	0.0468	0.0466 [†]
			Std	0.0075	0.0075	0.0077	0.0075	0.0076
		3	Mean	0.0529	0.0537	0.0522	0.0537	0.0520
			Std	0.0052	0.0054	0.0052	0.0053	0.0054
100	Mean : 0.2373 Std : 0.0328	1	Mean	0.1085	0.1083	0.1087	0.1083	0.1087
			Std	0.0162	0.0163	0.0162	0.0163	0.0162
		2	Mean	0.0708	0.0705	0.0711	0.0705	0.0713
			Std	0.0124	0.0127	0.0121	0.0127	0.0121
		3	Mean	0.0662	0.0666	0.0651 [†]	0.0666	0.0655
			Std	0.0098	0.0098	0.0094	0.0098	0.0101

Table 9. Average MSE in model validation of OE method for test model #1(Soft shrinkage case with various threshold methods)

NSR(%)	Without de-noising	Level		Minimax	Universal	SURE	Hybrid	GCV
5	Mean : 0.0193 Std : 0.0015	1	Mean	0.0183	0.0183	0.0183	0.0183	0.0183
			Std	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
		2	Mean	0.0180	0.0179 [†]	0.0179 [†]	0.0179 [†]	0.0180
			Std	0.0002	0.0002	0.0003	0.0002	0.0003
		3	Mean	0.0235	0.0241	0.0224	0.0241	0.0221
			Std	0.0010	0.0009	0.0013	0.0008	0.0016
		4	Mean	0.0507	0.0528	0.0467	0.0528	0.0447
			Std	0.0035	0.0019	0.0053	0.0019	0.0065
30	Mean : 0.0267 Std : 0.0106	1	Mean	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211	0.0210
			Std	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028
		2	Mean	0.0195 [†]	0.0195 [†]	0.0195 [†]	0.0195 [†]	0.0196
			Std	0.0012	0.0011	0.0012	0.0011	0.0013
		3	Mean	0.0248	0.0250	0.0238	0.0249	0.0236
			Std	0.0023	0.0025	0.0026	0.0024	0.0026
		4	Mean	0.0524	0.0543	0.0463	0.0540	0.0445
			Std	0.0062	0.0061	0.0082	0.0058	0.0094
50	Mean : 0.0345 Std : 0.0160	1	Mean	0.0229	0.0230	0.0230	0.0230	0.0229
			Std	0.0053	0.0054	0.0054	0.0054	0.0053
		2	Mean	0.0209	0.0207 [†]	0.0209	0.0207 [†]	0.0208
			Std	0.0022	0.0019	0.0022	0.0019	0.0019
		3	Mean	0.0248	0.0252	0.0241	0.0252	0.0241
			Std	0.0030	0.0030	0.0030	0.0030	0.0030
		4	Mean	0.0495	0.0533	0.0435	0.0532	0.0437
			Std	0.0076	0.0058	0.0092	0.0058	0.0099

Table 9. Continued.

NSR(%)	Without de-noising	Level		Minimax	Universal	SURE	Hybrid	GCV
100	Mean : 0.0526 Std : 0.0382	1	Mean	0.0289	0.0286	0.0287	0.0286	0.0289
			Std	0.0097	0.0092	0.0095	0.0092	0.0097
		2	Mean	0.0239 [†]	0.0239 [†]	0.0240	0.0239 [†]	0.0239 [†]
			Std	0.0039	0.0040	0.0039	0.0040	0.0039
		3	Mean	0.0273	0.0277	0.0269	0.0277	0.0269
			Std	0.0055	0.0051	0.0052	0.0051	0.0048
		4	Mean	0.0523	0.0562	0.0489	0.0561	0.0485
			Std	0.0122	0.0109	0.0125	0.0109	0.0137

Table 10. Average MSE in model validation of OE method for test model #2 (Soft shrinkage case with various threshold methods).

NSR (%)	Without de-noising	Level		Minimax	Universal	SURE	Hybrid	GCV
5	Mean : 0.0077 [†] Std : 0.0021	1	Mean	0.0115	0.0116	0.0116	0.0116	0.0115
			Std	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005
		2	Mean	0.0200	0.0202	0.0199	0.0202	0.0200
			Std	0.0007	0.0007	0.0009	0.0007	0.0007
		3	Mean	0.0435	0.0461	0.0418	0.0460	0.0414
			Std	0.0021	0.0013	0.0032	0.0013	0.0038
30	Mean : 0.0089 [†] Std : 0.0013	1	Mean	0.0116	0.0117	0.0116	0.0117	0.0116
			Std	0.0014	0.0014	0.0014	0.0014	0.0014
		2	Mean	0.0201	0.0205	0.0196	0.0205	0.0197
			Std	0.0014	0.0015	0.0018	0.0015	0.0018
		3	Mean	0.0410	0.0445	0.0382	0.0442	0.0373
			Std	0.0048	0.0042	0.0062	0.0043	0.0068
50	Mean : 0.0115 [†] Std : 0.0044	1	Mean	0.0118	0.0120	0.0120	0.0120	0.0119
			Std	0.0022	0.0022	0.0022	0.0022	0.0022
		2	Mean	0.0205	0.0208	0.0197	0.0208	0.0200
			Std	0.0027	0.0025	0.0029	0.0025	0.0028
		3	Mean	0.0428	0.0461	0.0412	0.0460	0.0414
			Std	0.0061	0.0052	0.0068	0.0052	0.0068
100	Mean : 0.0158 Std : 0.0088	1	Mean	0.0133	0.0130 [†]	0.0133	0.0130 [†]	0.0133
			Std	0.0031	0.0028	0.0032	0.0028	0.0031
		2	Mean	0.0208	0.0219	0.0208	0.0219	0.0207
			Std	0.0039	0.0044	0.0045	0.0044	0.0045
		3	Mean	0.0412	0.0453	0.0390	0.0455	0.0391
			Std	0.0072	0.0075	0.0076	0.0074	0.0079

호를 사용한 경우에 비하여 좋은 validation을 갖으며, 시험모델 2는 NSR이 100% 이상일 때 레벨 1에서만 더 좋은 validation 결과를 보이고 있음을 알 수 있다. 이러한 결과는 앞서 언급한 바와 같이 신호의 특성에서 원인을 찾을 수 있다. 따라서 시험모델 2(역 응답계)와 같이 참 신호가 noisy 특성을 갖는 신호OE방법을 사용하여 공정모델을 구하는 경우 낮은 NSR에서는 de-noising이 참 신호의 정보를 잃게 하여 오히려 역효과를 낼 수 있으므로 사용에 주의를 해야 될 것으로 생각된다. 그러나 잡음의 크기가 큰 경우는 참 신호의 고주파 부분에 비해 잡음이 더 많이 제거되므로 de-noising 과정을 거친 신호가 더 좋은 validation 결과를 가지게 될 것으로 생각된다. 이때 NSR이 커드라도 MRA 레벨은 낮게 하여 참 신호의 정보를 최대한으로 보존해야 할 것으로 생각된다. 시스템 식별에 있어서 다른 shrinkage의 경우도 soft shrinkage의 경우와 유사한 결과를 얻었다.

본 연구에 사용된 각각의 모델들은 FIR과 OE 방법 모두 NSR이 증가할수록 de-noising 효과가 커지며 de-noising 과정을 거친 신호를 이용한 경우가 그렇지 않은 경우에 비해 보다 강건한 모델을 얻을 수 있

었다. 단, 시험모델 2는 신호의 특성상 OE 방법을 이용하였을 때 낮은 NSR에서는 de-noising 효과를 보기가 어려움을 확인하였다.

5. 결 론

여러 가지 웨이블릿 de-noising 알고리즘을 이용하여 잡음제거 성능에 관하여 비교하였고 잡음을 제거한 신호와 그렇지 않은 신호를 이용하여 시스템 식별과정에 적용시켜 그 결과를 비교하였다. 신호의 특성, 잡음의 크기 그리고 MRA 레벨의 영향을 알아 보기 위하여 서로 다른 특성을 갖는 신호를 사용하였고 다양한 크기의 NSR과 레벨을 사용하였다.

웨이블릿 de-noising의 경우 shrinkage 방법이나 threshold 방법에 따라서 잡음제거 성능은 약간의 차이는 있으나 큰 차이는 없음을 확인하였고 신호의 특성, 잡음의 크기 그리고 MRA 레벨에 따른 영향도 거의 유사함을 확인하였다.

시스템 식별의 경우 FIR에서는 참 신호의 noisy 특성에 관계 없이 de-noising 과정을 거친 신호를 이용한 경우가 그렇지 않은 경우에 비해서

NSR이 증가할수록 더욱 강건한 모델을 얻을 수 있었다.

OE에서는 시험모델 1에서는 de-noising을 거친 신호를 이용한 경우가 더욱 강건한 모델을 얻을 수 있었으나 시험모델 2와 같이 참 신호의 특성이 noisy한 경우는 de-noising이 오히려 좋지 않은 효과를 나타낼 수 있었다.

감 사

본 연구는 1996년도 전남대학교 학술연구비 지원에 의하여 이루어졌으며, 이에 감사 드립니다.

사용기호

$cD_{j,\delta}$: the vector of shrunk coefficients for given threshold δ at level j
$e(t)$: white noise
k, m	: sampling parameter
N	: the number of data used model estimation
$n_{j,0}$: the number of zero elements at level j
nk	: time delay
s	: scale parameter
t	: time
$u(t)$: input signal at time t
V_{loss}	: loss function
$\ x\ ^2$: square norm of x
$x \wedge y$: minimum of x and y
$y(t)$: output signal at time t
$\hat{y}(t)$: estimated output at time t
Z	: integer
$\#$: the number of data

그리스 문자

λ	: threshold value
$\hat{\sigma}_j$: estimated standard deviation at level j
τ	: translation parameter

삼첨자

$*$: complex conjugate
-----	---------------------

하첨자

j	: the level of MRA
δ	: threshold value minimizing GCV function

참고문헌

1. Graps, A.: *IEEE Computational Science and Engineering*, **2**(2), 50 (1995).
2. Donoho, D. L.: "Wavelet Shrinkage and W. V. D.: A Ten-minute Tour," Technical report 416, Dep. of Statistics, Stanford University(1993).
3. Donoho, D. L. and Johnstone, I. M.: *J. Amer. Statist. Assoc.*, **90**(432), 1200(1995).
4. Donoho, D. L. and Johnstone, I. M.: *Biometrika*, **81**(3), 425(1994).
5. Johnston, I. M., Kerkyacharian, G. and Picard, D.: *J. Roy. Statist. Soc.*, **B**(57), 301(1995).
6. Johnstone, I. M. and Silverman, B. W.: *J. Roy. Statist. Soc.*, **B**(59), 319(1997).
7. Bruce, A. and Gao, H. Y.: "WaveShrink: Shrinkage Functions and Thresholds," Technical report, StatSci Division, MathSoft, Inc., 1700 Westlake Ave. N, Seattle, WA98109.9891(1995).
8. Gao, H. Y.: "Wavelet Shrinkage Denoising Using the Non-Negative Garrote," *The Wavelet Digest*, **6**(3), (1997).
9. Gao, H. Y. and Bruce, A. G.: *Statistica Sinica*, **7**(4), 855(1997).
10. Gao, H. Y.: "Threshold Selection in WaveShrink," Technical report, StatSci Division, MathSoft, Inc., 1700 Westlake Ave. N, Seattle, WA98109 (1997).
11. Gao, H. Y.: "Wavelet Shrinkage Smoothing for Heteroscedastic Data," *The Wavelet Digest*, **6**(3), (1997).
12. Palavajhala, S., Motard, R. L. and Joseph, B.: *AIChE J.*, **42**(3), 777 (1996).
13. Nikolaou, M. and Vuthandam, P.: *AIChE J.*, **44**(1), 141(1998).
14. Carrier, J. F. and Stephanopoulos, G.: *AIChE J.*, **44**(2), 341(1998).
15. Flehmig, F., Von Watzdorf, R. and Marquardt, W.: *Comp. Chem. Eng.*, **22**, Suppl., S491(1998).
16. Chui, C. K.: "An Introduction to Wavelets," Academic Press(1992).
17. Akansu, A. N. and Haddad, R. A.: "Multiresolution Signal Decomposition: Transform, Subbands, and Wavelets," Academic Press(1992).
18. Strang, G. and Nguyen, T.: "Wavelets and Filter Banks," Wellesley-Cambridge Press(1996).
19. Nason, G. P.: "Wavelet Regression by Cross-validation," Technical Report 447, Dep. of Statistics, Stanford University(1994).
20. Weyrich, N. and Warhola, G. T.: *In S.P. Singh, editor, Approximation Theory, Wavelets and Applications, NATO ASI Series C*(454), 523(1995).
21. Jansen, M., Malfait, M. and Bultheel, A.: *Signal Processing*, **56**(1), 33(1997).
22. Jansen, M., Uytterhoeven, G. and Bultheel, A.: "Image De-noising by Integer Wavelet Transforms and Generalized Cross Validation," Technical Report TW264, Dep. of Computer Science, K. U. Leuven(1997).
23. Jansen, M. and Bultheel, A.: "Multiple Wavelet Threshold Estimation by Generalized Cross Validation for Data with Correlated Noise," Technical Report TW250, Dep. of Computer Science, K. U. Leuven(1997).
24. Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P.: "Numerical Recipes in C, the Art of Scientific Computing," 2nd edn, Cambridge: Cambridge University Press(1992).
25. Zhu, Y. C. and Backx, T.: "Identification of Multivariable Industrial Processes for Simulation, Diagnosis and Control," Springer-Verlag(1993).
26. Ljung, L.: "System Identification: Theory for the User," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J(1987).
27. Kang, S. J.: "System Identification with Modified Finite Impulse Response Models: Comparison with Other Identification Methods," Ph. D. Dissertation, University of Missouri-Columbia, MO, USA(1994).
28. Ljung, L.: "System Identification Toolbox User's Guide," The MathWorks, Inc.(1997).