

노이즈가 있는 계단응답으로부터 일차시간지연모델 확인에 관한 연구

주승민 · 김성진 · 변정욱 · 전대웅 · 성수환 · 이지태[†]

경북대학교 화학공학과
702-701 대구시 북구 산격동 1370
(2008년 5월 1일 접수, 2008년 6월 22일 채택)

A Study on the First Order Plus Time Delay Model Identification from Noisy Step Responses

Seungmin Ju, Sung Jin Kim, Jeonguk Byeon, Daewoong Chun, Su Whan Sung and Jietae Lee[†]

Department of Chemical Engineering, Kyungpook National University, Daegu 702-701, Korea
(Received 1 May 2008; accepted 22 June 2008)

요 약

공정의 계단응답으로부터 일차시간지연모델을 구하고, 이로부터 PID(Proportional-Integral-Derivative) 제어를 설계하는 방법은 공정제어 분야에서 널리 사용되는 오랜 것이다. 이를 위한 간단한 그래프에 근거한 방법에서 복잡한 수치적 최소자승법에 근거한 방법까지 다양한 방법들이 제안되어 있는데, 노이즈가 섞여 있는 계단응답에 대응하는 간단한 방법들은 의외로 잘 알려져 있지 못하다. 최근 계단응답 신호의 적분을 이용하는 방법들이 제안되어 있는데 이들을 비교 검토하여 실용적인 방법을 찾고자 한다. 계단응답의 적분 신호는 현 제어 계기에서 쉽게 얻어진다.

Abstract – Estimating the first order plus time delay model on the basis of the step responses has been widely used in industry for the tuning of PID controllers. Even though various model identification methods from simple graphical approaches to complicated approaches based on least squares method have been proposed, simple approaches to incorporate noisy step responses are rarely available. In this research, we will compare and analyze recent approaches using the integrals of the step responses and develop an improved identification method to incorporate real situations more effectively.

Key words: Step Response, Noise, FOPTD Model Identification, Integral

1. 서 론

PID(Proportional-Integral-Derivative) 제어기의 조절변수를 결정하는 튜닝 목적으로 일차시간지연(FOPTD; First Order Plus Time Delay) 모델이 자주 사용된다. FOPTD 모델은 정상상태 이득(k), 시간 상수(τ) 그리고 지연 시간(θ)의 세변수를 가지고 있는데, 고차의 공정을 근사하는 데는 다소 성능이 떨어지지만 PID 제어기 튜닝에는 아주 적합한 것으로 널리 이용되고 있다. 이런 이유로 FOPTD 모델로부터 PID제어기 변수를 결정하는 수많은 방법이 제안되어 있다[1-3]. 또한 같은 이유로 간단한 공정 실험으로부터 FOPTD 모델을 얻는 identification 방법들도 수없이 제안되어 있다[2, 3].

많은 FOPTD 모델을 찾는 방법들 중 계단응답에 근거한 방법이 널리 사용되고 있다[4]. 더 복잡한 모델을 찾는 모델 확인 방법들이 제안되어 있지만 비선형이고 불확실성이 있는 공정에 이런 복잡한 모델을 찾는 것이 의미가 없을 수도 있고, 또 복잡한 모델로부터 PID제어기를 튜닝하는 간단한 방법이 잘 구비되어 있지 않은 것 등이

FOPTD 모델 그리고 간단한 계단응답을 이용하는 이유가 아닐까 한다. 계단응답으로부터 FOPTD 모델을 찾는 간단한 방법들에 관한 비교 연구를 하고자 한다. 특히 노이즈가 있는 공정에 적용할 수 있는 간단한 방법들은 잘 알려져 있지 않은데, 이것에 관한 연구에 집중하고자 한다.

공정제어 교재에는 계단응답의 두 점의 자료로부터 FOPTD 모델을 얻는 방법(Two-Point Method[4])를 항상 신고 있다[1-3]. 이 방법은 우리에게 직관을 주는 그래프를 통한 방법을 제공하고 있다. 그러나 노이즈가 있는 공정에는 적합하지 못하다. 여기에 적절한 두 특정 면적(Area Method[2])을 이용하는 방법이 노이즈에 강한 방법으로 오래전부터 제안되어 있다. FOPTD 모델을 찾는 데 있어 시간 지연 항이 비선형을 주는 등의 어려움을 준다. 이 시간지연 항을 근사하는 고차의 모델 혹은 모델에 무관한 전달함수 값들을 찾고, 이를 모델감소 과정을 거쳐 FOPTD 모델을 얻는 방법 또한 제안되어 있다[5]. 최근까지도 계단응답으로부터 FOPTD 모델을 찾는 방법이 연구되고 있는데, 계단응답의 적분을 이용하여 모델변수 찾는 문제를 선형최소자승법(Linear Least Squares Method[6]) 문제로 변형하여 모델 변수를 구하는 방법이 제안되고 있다.

[†]To whom correspondence should be addressed.
E-mail: jtlee@knu.ac.kr

본 연구에서는 Area Method와 유사한 것으로 계단응답의 적분을 분석하는 방법, 그리고 FOPTD 모델로의 근사에 가장 자연스러운 비선형최소자승법(Nonlinear Least Squares Method)을 이용할 때 나타나는 계산 혹은 local minimum을 갖게 되는 문제를 해결할 수 있는 계산방법을 연구하고, 다른 기존의 방법들과 비교한다. 노이즈의 성질에 따른 최적의 필터를 설계하는 방법들이 있지만 이는 본 연구의 범위를 벗어난 것으로 여기서는 적분만을 고려하는데, 적분은 일종의 평균을 하는 동작으로 노이즈의 크기를 대폭 줄인다.

2. 이 론

2-1. Two-Point Method [1-4] (TPM)

다음 전달함수의 일차시간지연 공정을 고려한다.

$$G(s) = Y(s)/U(s) = k \frac{\exp(-\theta s)}{\tau s + 1} \tag{1}$$

여기서 Y(s)와 U(s)는 각각 공정 출력과 입력 변수의 라플라스 변환이다. 입력 u(t)에 크기 m의 계단신호가 들어가면 출력은

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ km \left(1 - \exp\left(-\frac{t-\theta}{\tau}\right) \right) & t \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

가 된다. Fig. 1에 나타나 있는 점의 자료는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} y_{inf} &= km \\ a_1 &= 1 - \exp\left(-\frac{t_1 - \theta}{\tau}\right) \\ a_2 &= 1 - \exp\left(-\frac{t_2 - \theta}{\tau}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

따라서 Fig. 1의 측정 자료로부터 일차시간지연모델 변수들을 얻을 수 있는데, $a_1=0.283$, $a_2=0.632$ 로 선택하면

$$\begin{aligned} k &= y_{inf}/m \\ \tau &= 1.5(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

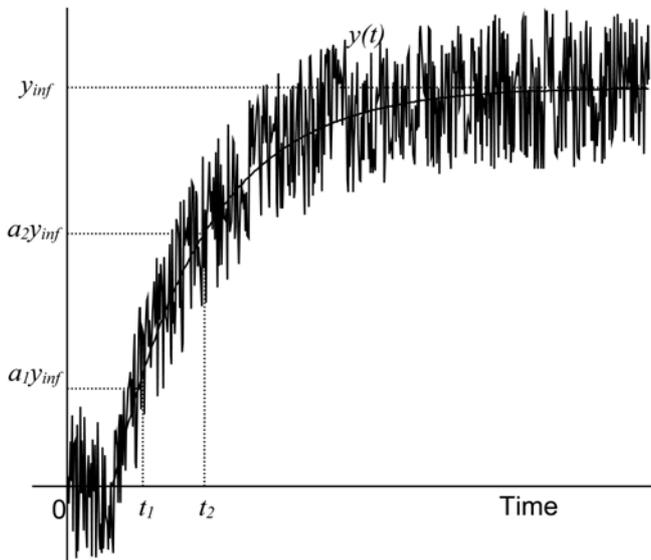


Fig. 1. Data points for the Two-Point method.

$$\theta = t_2 - \tau \tag{4}$$

가 된다. 다른 값의 a_1 과 a_2 를 사용할 수도 있다[1, 4]. 두 점의 자료를 이용하므로 Two-Point Method(TPM)로 명명한다. 간단하고 이해하기 쉬운 계단응답에 노이즈가 없는 깨끗한 신호가 얻어지는 경우 널리 사용되고 있다. 그러나 노이즈가 섞여 들어올 때는 적용에 어려움이 있다.

정상상태 이득 k를 구하는데 필요한 y_{inf} 는 계단응답 최종 100개 정도의 자료를 평균하여 사용하는데 이는 적절한 방법으로 아래 나오는 모든 방법에 이용한다. 시간상수 τ 와 지연시간 θ 를 위한 t_1 과 t_2 는 각각 a_1 과 a_2 에 해당하는 직선을 긋고 이것과 부딪히는 계단응답의 시작 시간과 끝 시간을 찾아 이들의 중간 값으로 하는 방식으로 얻을 수 있다. 모사 실험 결과 성능이 좋지 않고 이 조작을 자동화하기도 어려워 더 이상 고려하지 않는다.

2-2. Area Method [2] (AM)

Fig. 2에 나타나 있는 두 면적을 이용하여 일차시간지연 모델을 얻을 수 있다. 식 (2)로부터

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_0^{\infty} (km - y(t)) dt = km(\tau + \theta) \\ A_1 &= \int_0^{A_0/km} y(t) dt = \int_0^{\tau + \theta} y(t) dt = \tau/e \end{aligned} \tag{5}$$

따라서

$$\begin{aligned} k &= y_{inf}/m \\ \tau &= 2.7183 A_1/km \\ \theta &= A_0/km - \tau \end{aligned} \tag{6}$$

을 얻을 수 있다. 적분에 해당하는 면적을 이용하므로 노이즈가 섞인 계단응답에도 적용 가능하다.

2-3. Integral Method (IM)

본 연구에서는 면적법의 분석을 달리하는 이해하기 쉬운 방법을 제안한다. 이것은 다음과 같은 식 (2)의 계단응답의 적분을 이용한다.

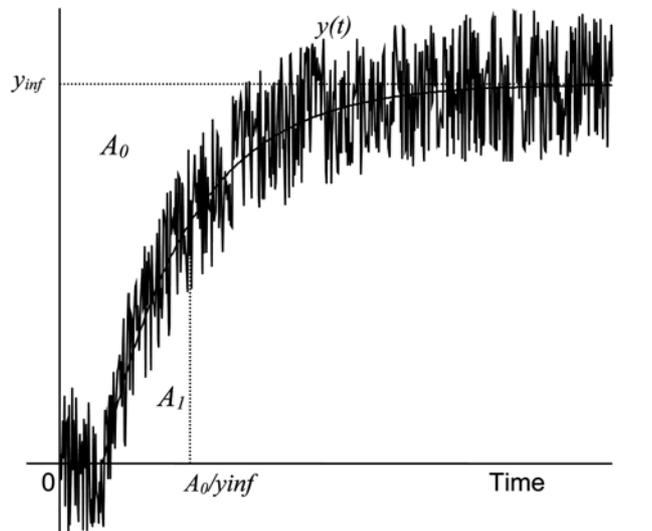


Fig. 2. Areas for the Area method.

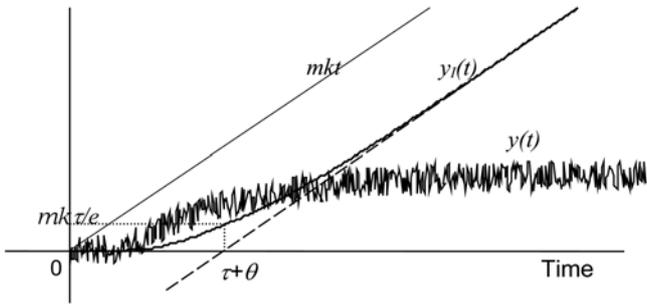


Fig. 3. Data for the Integral method.

$$y_f(t) = \int_0^t y(t)dt = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ km(t - \tau - \tau \exp(-\frac{t-\theta}{\tau})) & t \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

시간 t 가 충분히 크면 $y_f(t)$ 는 $km(t - \tau - \theta)$ 에 가까워지고, 이 점근선을 그으면 점근선의 기울기는 km 이 되고, t 축 절편이 $\tau + \theta$ 가 된다. 또한 $t = \tau + \theta$ 에서 $y_f(t) = km \tau / e$ 이므로 이들의 자료로부터 모든 일차 시간지연 모델 변수를 얻을 수 있다. 정리하면, $y_f(t)$ 를 구하고 이것의 시간이 클 때의 점근선을 긋는다. 이것의 기울기로부터 정상상태 이득 k 를 구하고, t 축 절편으로부터 $\tau + \theta$ 를 구한다. τ 는 $\tau = 2.7183 y_f|_{t=\tau+\theta} / km$ 로부터 구한다. Fig. 3에 이 과정이 나타나 있다.

식 (7)은 입력에 $u(t) = mt$ 의 ramp 신호가 들어갈 때의 출력과 같다. 위의 일차시간지연 모델 찾는 과정은 ramp 입력으로부터 모델 변수를 찾는 것과 같다. 이를 분석해 보면 앞의 Area Method와 매우 유사함을 알 수 있다. 그러나 본 방법은 적분으로 노이즈 효과가 거의 없는 신호를 처리하므로 이해하기 쉽고 수작업도 가능하다.

2-4. Linear Least Squares Method [6] (LLSM)

정상상태 공정이득 k 를 구하고 나면, 식 (2)는 $\ln(1 - y(t)/km) = \theta/\tau - t/\tau$ 처럼 변형될 수 있어 일차시간지연 모델 변수들, θ/τ 및 $1/\tau$ 에 대하여 선형인 관계식을 얻을 수 있다. 따라서 선형최소자승법을 적용할 수 있다. 그러나 이는 노이즈가 심할 경우 음수의 logarithm을 계산하여야하는 불가능한 상황이 발생하여 적용하기가 어렵다. 최근에 이런 문제가 발생하지 않는 계단응답 적분을 이용하는 방법들이 개발되어 있다[6]. 이를 여기서 소개한다.

식 (2)에서 exponential 항을 $y(t)$ 로 표시하고 이를 식 (7)에 대입한다.

$$\begin{aligned} y_f(t) &= km \left(t - \tau + \tau \exp\left(-\frac{t-\theta}{\tau}\right) \right) \\ &= km \left(t - \tau + \tau \left(1 - \frac{y(t)}{km} \right) \right) \\ &= kmt - km\theta - \tau y(t), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

이를 정리하면

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\tau} (kmt - y_f(t)) - \frac{km\theta}{\tau} \\ &= (kmt - y_f(t)) \left(\frac{1}{\tau} \right) - \frac{km\theta}{\tau}, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

을 얻을 수 있고, 선형최소자승법을 적용하여 $(1/\tau, km\theta/\tau)$ 를 얻을

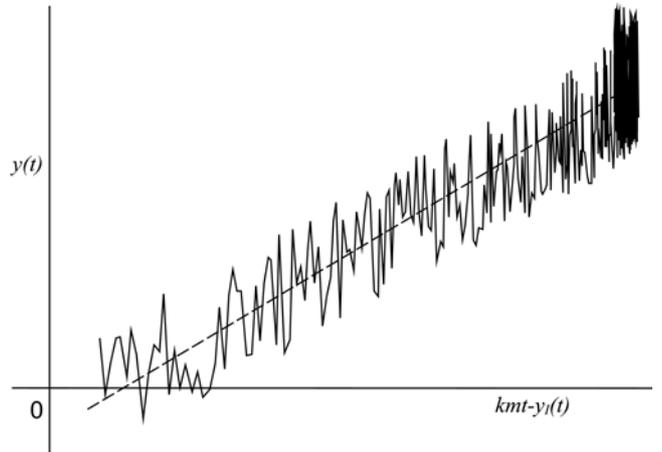


Fig. 4. Fitting for the Linear Least Squares method.

수 있고 따라서 일차시간지연 모델 변수, τ 와 θ 들을 찾을 수 있다. 정상상태 이득 k 는 앞에서 구한 것을 이용한다. 계단응답 $y(t)$ 와 이것의 적분 $y_f(t)$ 의 노이즈는 상관관계가 있어 식 (9)에 적용한 선형최소자승법은 편차를 주지만[6] 여기서는 간단함을 유지하기 위하여 이를 해결하는 instrumental variable을 이용하는 방법을 사용하지 않는다. Fig. 4에 식 (9)의 관계 그래프를 보였다.

2-5. Nonlinear Least Squares Method (NLSM)

최적의 일차시간지연 모델 변수 찾는 방법은 다음의 목적함수를 최소화하는 것일 것이다.

$$J_1 = \int_0^\theta y(t)^2 dt + \int_0^\theta \left(y(t) - km \left(1 - \exp\left(-\frac{t-\theta}{\tau}\right) \right) \right)^2 dt \quad (10)$$

정상상태 이득 k 를 앞의 방법으로 구했다고 하면, 이 문제는 두 변수 최적화 문제가 된다. 상당한 계산과 local minimum에 빠지는 등의 어려움이 있어, 사용이 추천되지 않아 왔다. 그러나 현 CPU의 계산 능력이면 이 방법도 고려해 볼만하다.

식을 정리하여 계산량과 local minimum 문제를 해결할 수 있는 방법을 모색한다. 먼저 식을 다음과 같이 정리한다.

$$\begin{aligned} J_1 / (km)^2 &= \int_0^\theta \left(\frac{y(t)}{km} \right)^2 dt + \int_0^\theta \left(\left(\frac{y(t)}{km} - 1 \right) + \exp\left(\frac{\theta}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)^2 dt \\ &= \int_0^\theta \left(\frac{y(t)}{km} \right)^2 dt + \int_0^\theta q(t)^2 dt + 2 \exp\left(\frac{\theta}{\tau}\right) \int_0^\theta q(t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt \\ &\quad + \exp\left(\frac{2\theta}{\tau}\right) \int_0^\theta \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) dt \quad q(t) = \frac{y(t)}{km} - 1 \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)을 θ 에 대하여 미분하여 극소점에 관한 식

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial \theta} \frac{1}{(km)^2} &= \frac{2}{\tau} \exp\left(\frac{\theta}{\tau}\right) \int_0^\theta q(t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt + \frac{2}{\tau} \exp\left(\frac{2\theta}{\tau}\right) \int_0^\theta \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) dt \\ &= \frac{2}{\tau} \exp\left(\frac{\theta}{\tau}\right) \left(\int_0^\theta q(t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt + \exp\left(\frac{\theta}{\tau}\right) \int_0^\theta \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) dt \right) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

을 얻을 수 있다. 이 $\partial J_1 / \partial \theta = 0$ 를 만족시키는 것을 식 (11)에 대입하면 이제

$$J_2 = \int_0^\theta \left(\frac{y(t)}{km} \right)^2 dt + \int_0^\theta q(t)^2 dt + \exp\left(\frac{\theta}{\tau}\right) \int_0^\theta q(t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt \quad (13)$$

를 최소화하는 문제로 된다.

문제를 푸는 방식은 τ 가 주어지면 t_f 로부터 반대방향으로 $\int_0^{t_f} q(t) \exp(-\frac{t}{\tau}) dt$ 의 적분을 θ 까지 하는데, 식 (12)를 만족하도록 한다. 이때의 값이 최적 θ 가 되고 최종 최적화를 위한 목적함수 J_2 를 구한다. 최적화 변수 τ 를 바꾸어 최적의 목적함수 J_2 를 찾는다. 이는 단 변수 최적화 문제와 같은 것으로 두 변수 최적화로 나타나는 계산상의 문제를 상당히 해결할 수 있다. 앞의 방법들에 비해 아직 계산량이 많은 것이 흠이지만, 실제 많은 경우 계단응답을 얻는 시간에 비해 이 계산 시간은 무시할 만하여 큰 문제가 되지 않는다.

3. 모사 결과 및 고찰

각 방법의 성능을 알아보기 위하여 모사 연구를 하였다.

3-1. 노이즈가 있는 FOPTD 공정

언어진 시간 상수와 시간 지연의 절대 비교가 가능한 FOPTD 공정

$$G(s) = \frac{\exp(-0.5s)}{s+1} \tag{14}$$

을 고려한다. 단위계단 신호가 입력으로 들어가고 출력에는 uniform distribution의 노이즈가 첨가된다.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\exp(-0.5s)}{s(s+1)}\right) + n(t) \tag{15}$$

여기서 $\mathcal{L}^{-1}(\cdot)$ 는 역 라플라스 변환을 나타내고, $n(t)$ 는 노이즈를 나타낸다. 모사를 위한 샘플링 시간은 0.01로 하였고, 모사 최종시간은 8로 하였다. 노이즈 $n(t)$ 가 ± 0.1 그리고 ± 0.4 인 두 경우를 모사하였다. 최종 100개 자료를 평균하여 정상상태 이득을 계산하는데 이용하였다. 이것은 $\pm 5\%$ 이내로 정확한 값을 주었다. 반면에 τ 와 θ 는 노이즈 크기가 커짐에 따라 상당한 오차를 보였다.

Fig. 5에는 노이즈 크기가 ± 0.1 인 경우 100번 Monte Carlo 모사를 실행하였을 때의 τ 의 추이를 보였다. AM(Area Method)와 IM(Integral Method)는 $\pm 10\%$ 의 상대오차의 시간상수를 주는 것을 볼 수 있다. LLSM(Linear Least Squares Method)는 이것보다 약간 적은 오차의 fluctuation을 보이고 NLSM(Nonlinear Least Squares Method)는 더 작은 오차의 fluctuation을 보여주고 있다. Fig. 6에는 노이즈 크기가 ± 0.1 인 경우 100번 모사를 실행하였을 때의 θ 의 추이를 보였다. 상대오차 크기에 차이는 있지만 각 방법에 따른 오차 경향은 τ 의 경우가 같음을 알 수 있다.

Fig. 7에는 노이즈 크기가 ± 0.4 인 경우 100번 모사를 실행하였을 때의 τ 의 추이를 보였다. AM과 IM은 상대오차가 $\pm 50\%$ 에 이르는 시간상수를 주는 것을 볼 수 있다. LLSM은 이것보다 약간 적은 오차의 fluctuation을 보이고 NLSM은 더 작은 오차의 fluctuation을 보여주고 있다. Fig. 8에는 노이즈 크기가 ± 0.4 인 경우 100번 모사를

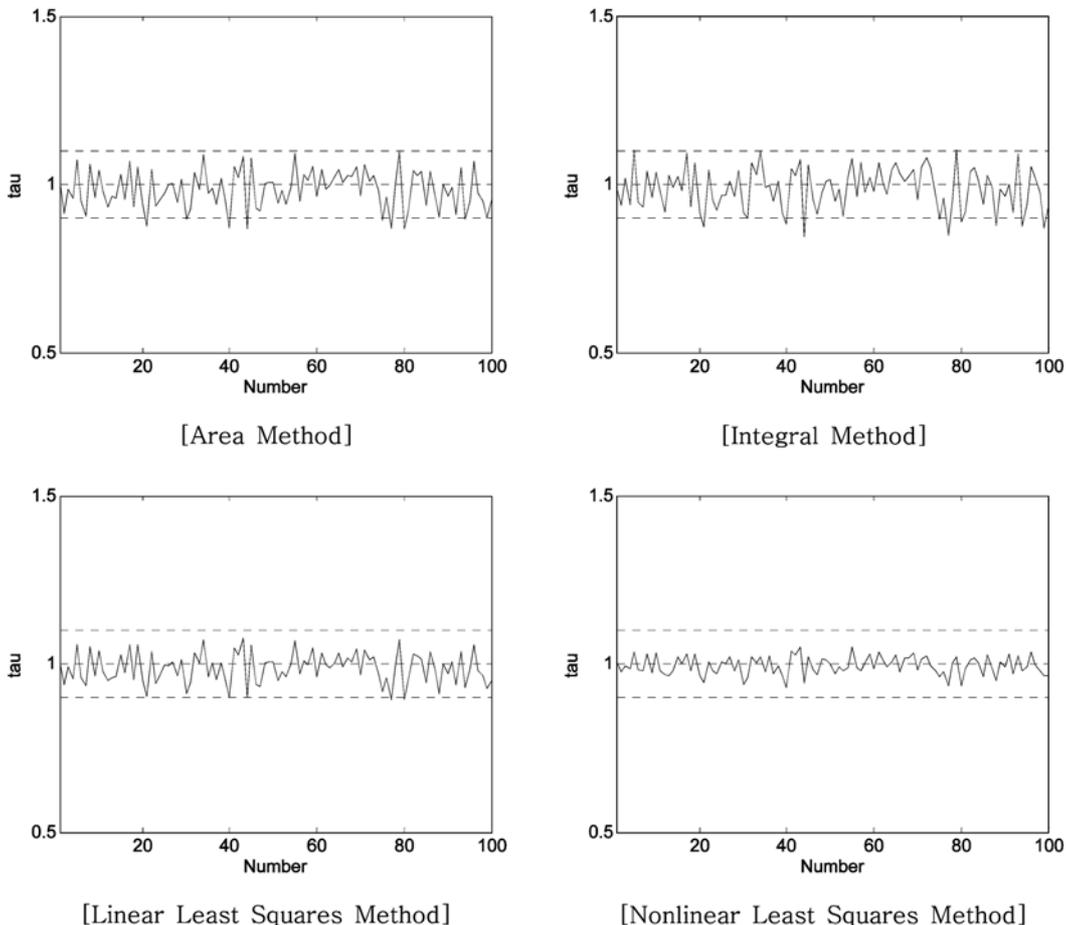


Fig. 5. 100 times of identifications of the time constant for $G(s) = \exp(-0.5s)/s+1$ with uniform random noise of ± 0.1 .

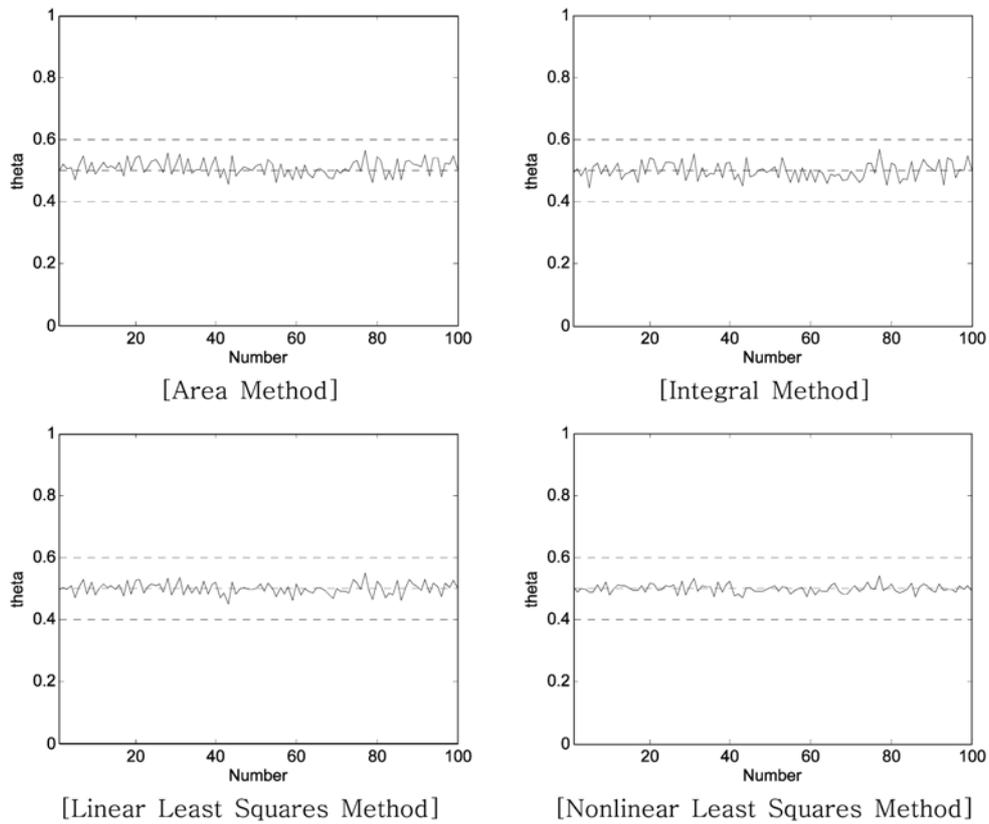


Fig. 6. 100 times of identifications of the time delay for $G(s) = \exp(-0.5s)/s+1$ with uniform random noise of ± 0.1 .

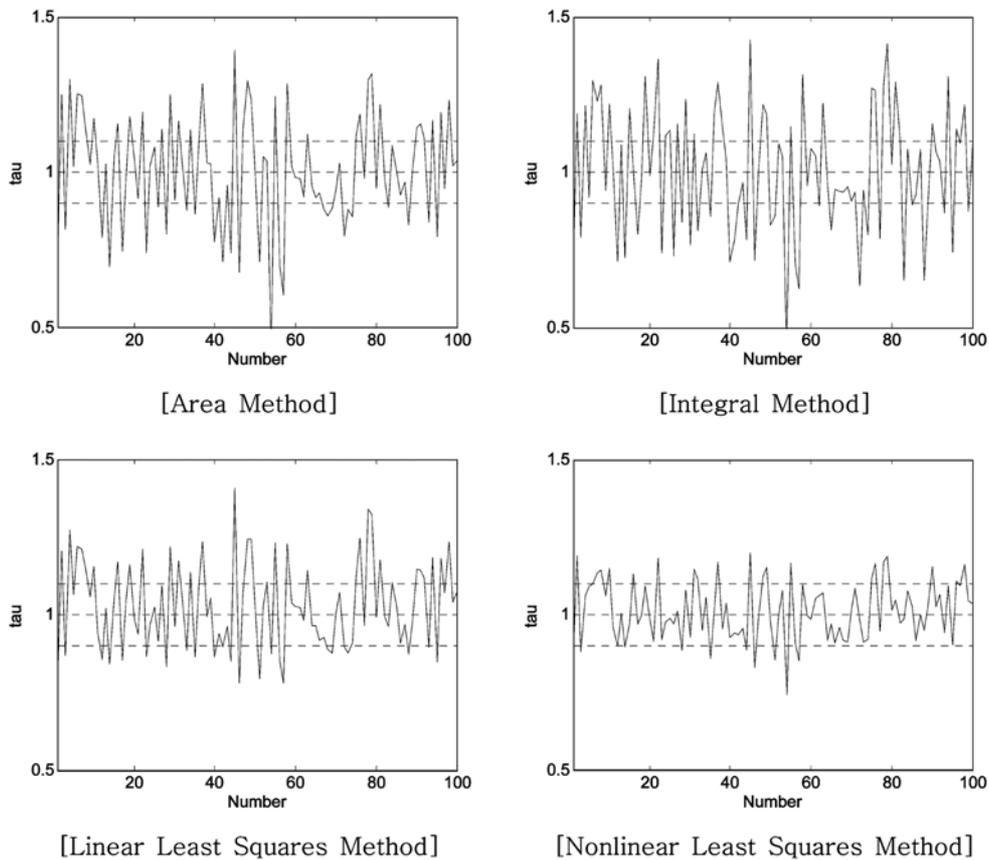


Fig. 7. 100 times of identifications of the time constant for $G(s) = \exp(-0.5s)/s+1$ with uniform random noise of ± 0.4 .

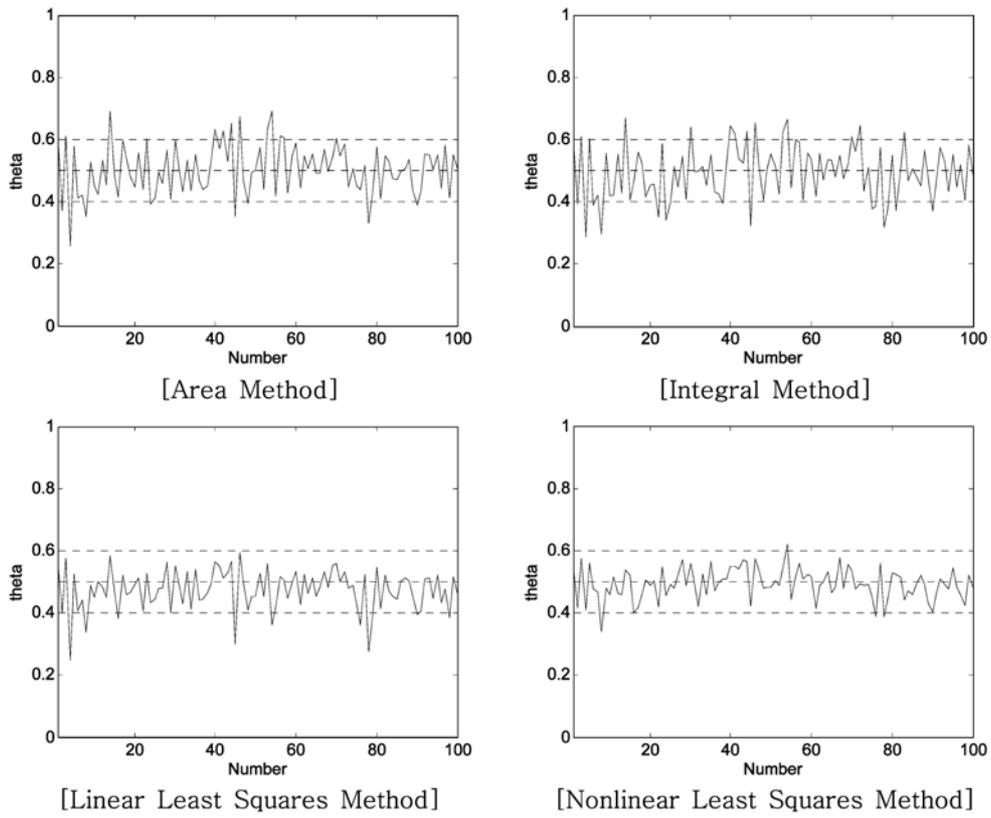


Fig. 8. 100 times of identifications of the time delay for $G(s) = \exp(-0.5s)/s+1$ with uniform random noise of ± 0.4 .

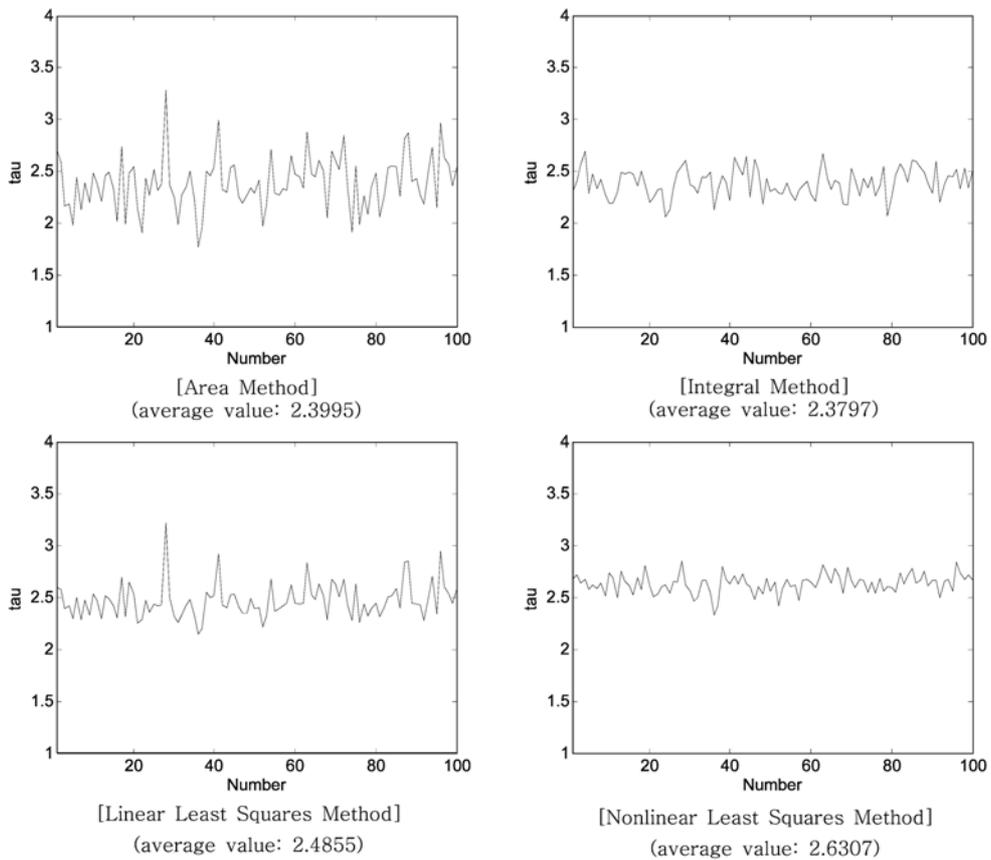


Fig. 9. 100 times of identifications of the time constant for $G(s) = 1/(s+1)^5$ with uniform random noise of ± 0.1 .

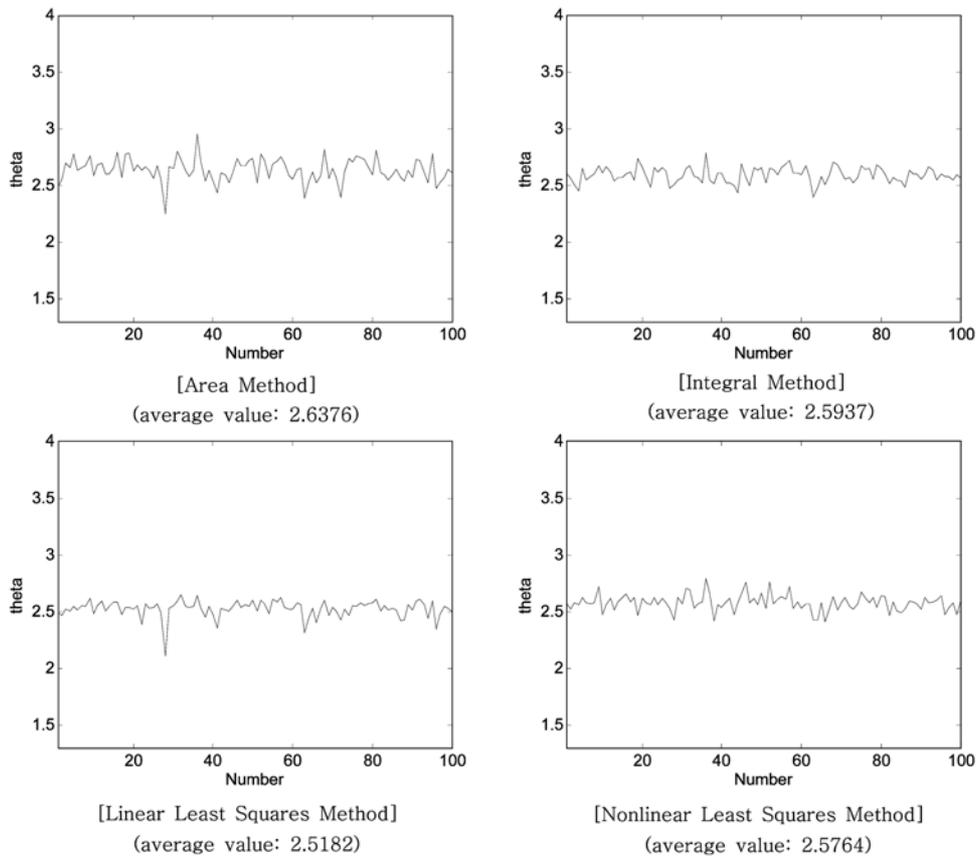


Fig. 10. 100 times of identifications of the time delay for $G(s) = 1/(s+1)^5$ with uniform random noise of ± 0.1 .

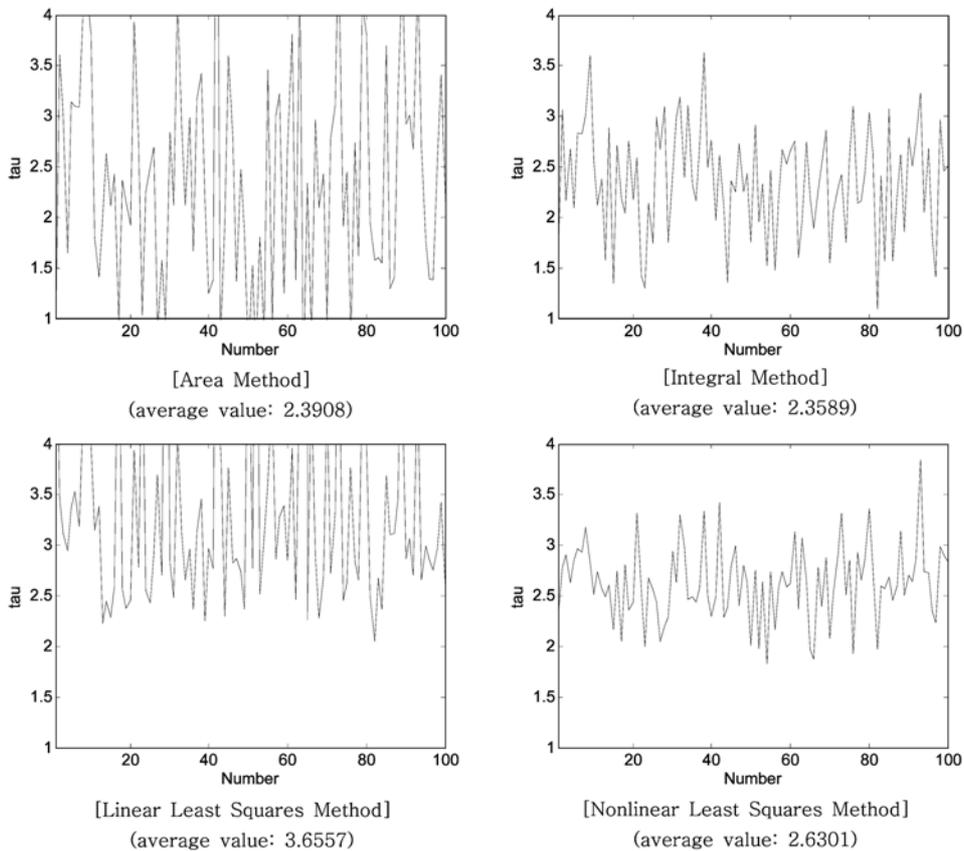


Fig. 11. 100 times of identifications of the time constant for $G(s) = 1/(s+1)^5$ with uniform random noise of ± 0.4 .

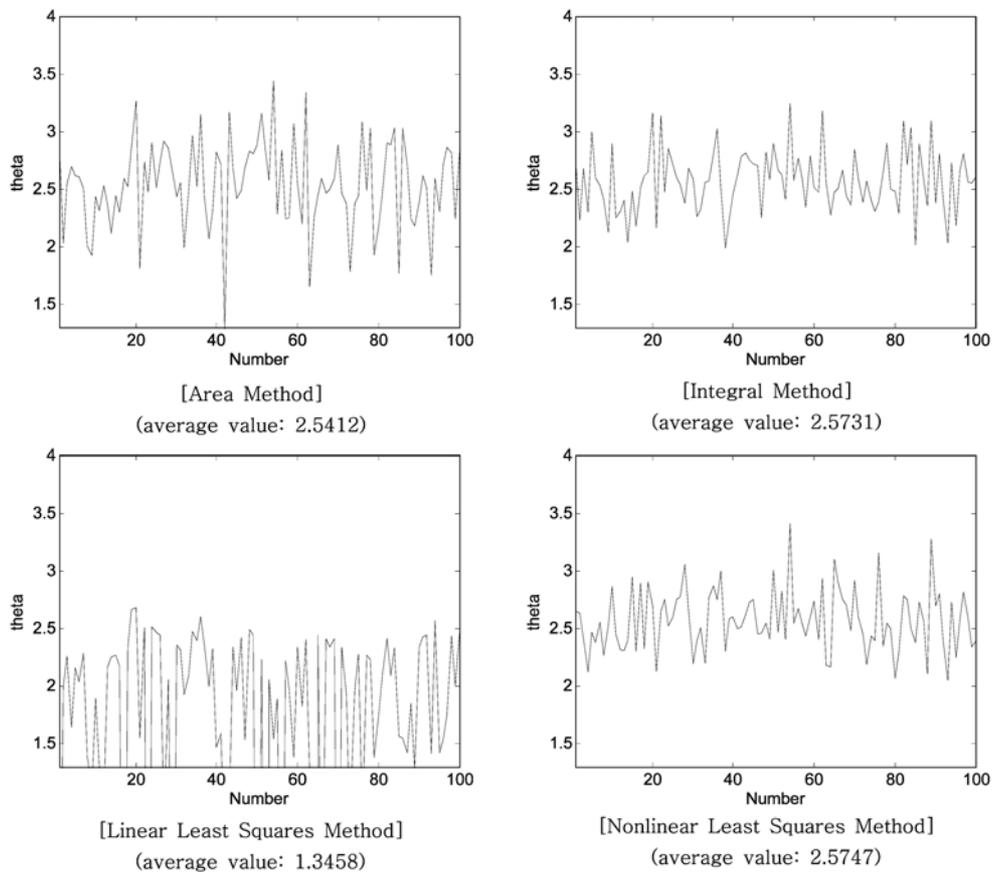


Fig. 12. 100 times of identifications of the time delay for $G(s) = 1/(s+1)^5$ with uniform random noise of ± 0.4 .

실행하였을 때의 θ 의 추이를 보였다. 각 방법에 따른 상대오차 경향은 τ 의 경우와 같음을 알 수 있다.

3-2. 고차 공정

일차시간지연 모델과 다른 형태의 다음의 고차 공정을 고려한다.

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^5} \quad (16)$$

단위계단입력에 대한 출력에 식 (15)와 같은 노이즈가 첨가되는 것을 다룬다. 모사를 위한 샘플링 시간은 0.05로 하였고, 모사 최종 시간은 50으로 하였다. 노이즈 $n(t)$ 가 ± 0.1 그리고 ± 0.4 인 두 경우를 모사하였다. 최종 100개 자료를 평균하여 정상상태 이득을 계산하는데 이용하였다.

Fig. 9에는 노이즈 크기가 ± 0.1 인 경우 100번 모사를 실행하였을 때의 τ 의 추이를 보였다. 찾은 τ 의 평균값은 각 방법에 따라 조금씩 다르다. 앞의 FOPTD 에서는 달리 IM의 오차 fluctuation이 다소 줄어든 것을 볼 수 있다. Fig. 10에는 노이즈 크기가 ± 0.1 인 경우 100번 모사를 실행하였을 때의 θ 의 추이를 보였다. 상대오차 크기에 차이는 있지만 각 방법에 따른 오차 경향은 τ 의 경우가 같음을 알 수 있다.

Fig. 11에는 노이즈 크기가 ± 0.4 인 경우 100번 모사를 실행하였을 때의 τ 의 추이를 보였다. AM, IM 그리고 NLSM의 평균 τ 는 노이즈 크기가 ± 0.1 인 경우와 거의 차이가 나지 않으나, LLSM은 매우 큰 차이를 주는 것을 볼 수 있다. 이는 노이즈가 서로 연관이 되

어 있을 때 나타나는 최소자승법의 특성 때문인 것으로 유추된다. Instrumental variable의 도입이 필요한 것으로 판단된다[6]. 상대오차의 fluctuation의 경향은 노이즈가 ± 0.1 인 때와 같음을 볼 수 있다. Fig. 12에는 노이즈 크기가 ± 0.4 인 경우 100번 모사를 실행하였을 때의 θ 의 추이를 보였다. 각 방법에 따른 상대오차 경향은 τ 의 경우와 같음을 알 수 있다.

4. 결 론

간단하면서도 이해하기 쉬워 산업현장에서 사용될 수 있는, 노이즈가 있는 공정에 적용 가능한 4가지의 일차시간지연 모델 확인 방법들을 비교 검토하였다. 본 연구로부터 다음의 결론을 얻을 수 있었다.

(1) Area Method와 Integral Method는 비슷한 결과를 주었고, Linear Least Squares Method, Nonlinear Least Squares Method 순으로 더 우수한 결과를 주었다.

(2) 노이즈가 있는 공정이더라도 Integral Method는 수작업의 그래프 방법을 적용할 수 있었다.

(3) Nonlinear Least Squares Method의 경우 단 변수 최적화 문제로 변형이 가능하여 계산과 local minimum을 찾게 되는 등의 부담을 줄일 수 있었으며, 성능이 우수하여 이 방법을 적극적으로 이용할 가치가 있어 보인다.

감 사

본 연구는 2007학년도 경북대학교 학술연구비 지원에 의하여 이루어졌으며, 이에 감사드립니다.

α : $\exp(\theta/\tau)$
 τ : process time constant
 θ : process time delay

사용기호

참고문헌

a_1, a_2 : percents of $y(t)$ compared to $[y_{inf}]$
 A_0, A_1 : areas given in Fig. 2.
 $G(s)$: process transfer function
 J_1, J_2 : objects for parameter estimations
 k : process steady state gain
 m : size of step input
 $n(t)$: uniform random noise
 $q(t)$: $y(t)/km-1$
 s : Laplace variable
 t, t_f : time and final time
 t_1, t_2 : times for $y(t)$ to reach a_1y_{inf} and a_2y_{inf} , respectively
 $u(t), U(s)$: input variable and its Laplace transform
 $y(t), Y(s)$: output variable and its Laplace transform
 y_{inf} : final value of $y(t)$

1. Seborg, D. E., Edgar, T. F. and Mellichamp, D. A., *Process Dynamics and Control*, 2nd ed., Wiley, NJ(2003).
2. Astrom, K. J. and Hagglund, T., *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*, 2nd ed., Instrument Society of America, NC(1995).
3. Sung, S. W., Lee, J. and Lee, I. B., *Process Control, System Identification and PID Controllers*, TextBooks, Korea(2007).
4. Sundaresan, K. R. and Krishnaswamy, R. R., "Estimation of Time Delay Time Constant Parameters in Time, Frequency, and Laplace Domains," *Can. J. Chem. Eng.*, **56**, 257(1978).
5. Park, H. I., Sung, S. W. and Lee, I. B., "On-Line Process Identification Using the Laguerre Series for Automatic Tuning of the Proportional-Integral-Derivative Controller," *I&EC Research*, **36**, 101(1997).
6. Wang, Q. G. and Zhang, Y., "Robust Identification of Continuous Systems with Dead-time from Step Responses," *Automatica*, **37**, 377(2001).

그리스 문자