

단 신

## Marangoni 대류계에서의 안정성 교환의 원리

김민찬<sup>†</sup>

제주대학교 화학공학과  
690-756 제주시 제주대학로 66  
(2009년 2월 14일 접수, 2009년 3월 6일 채택)

## Principle of Exchange of Stabilities in the Marangoni Convection System

Min Chan Kim<sup>†</sup>

Department of Chemical Engineering, Cheju National University, 66 Jejudaehakno, Jeju-si 690-756, Korea  
(Received 14 February 2009; accepted 6 March 2009)

### 요 약

초기에 안정하게 유지되고 있는 수평 유체층에서 급격한 온도 변화에 의한 Marangoni 대류 발생계에서 안정성 교환의 원리를 해석적으로 증명하였다. 선형 안정성 이론하에서 온도 및 속도의 교란량을 직교함수들의 선형 조합으로 나타내고, 온도 교란의 성장률이 모든 Marangoni 수 범위에 대하여 실수임을 보였다.

**Abstract** – For the initially quiescent fluid layer, the principle of the exchange of stabilities for the Marangoni convection due to the impulsive temperature change is proven analytically. Under the linear stability theory, the temperature and vertical velocity disturbances are expressed as the linear combination of the orthogonal functions. It is shown that the growth rate of the temperature disturbance is the real function for all positive Marangoni numbers.

**Key words:** Marangoni Convection, Exchange of Stabilities

### 1. 서 론

온도 분포가 정상상태인 경우 유체층의 안정성은 기본 유동장에 부가된 미소 교란이 성장하는지 여부에 달려있다. 만약 부가된 교란이 감쇄하면 유체층은 궁극적으로 안정하게 될 것이고 시간의 경과에 따라 성장하게 되면 계는 불안정하게 될 것이다. 정규 모드 해석(normal mode analysis)이 가능한 경우, 모든 교란량들은  $\exp(\sigma t)$  형태의 시간 의존성을 갖는다는 것은 잘 알려진 사실이다[1]. 이 경우 성장률  $\sigma$ 는 일반적으로  $\sigma = \sigma_R + i\sigma_I$  형태로 나타낼 수 있다. 중립 상태에서는  $\sigma_R = 0$ 이다. 만약  $\sigma_I = 0$ (안정성 교환 상태; exchange of stabilities)이면 중립 상태는 정지상태(stationary state)이고  $\sigma_I \neq 0$ (과도 안정성 상태; overstability)이면 진동상태(oscillatory state)이다. 따라서 성장률  $\sigma$ 는 유체계의 안정성 특성을 결정한다.

표면장력의 구배에 의하여 유발되는 Marangoni 대류는 유체 안정성 해석의 좋은 예이다. 표면 장력이 온도의 함수인 경우 액체층에서 안정성 문제는 Pearson[2]이 안정성 교환의 원리를 가정하여 처음으로 해석하였다. 그 후, Vidal과 Acrivos[3]는 정상상태 온도 분포를 갖는 계에서 모든 Prandtl 수 영역에 걸쳐서 정지상태의 안정성만이 발생한다고 수치적으로 보였다. Finlayson[4]는 Galerkin

방법의 1차 근사를 통하여 같은 결과를 보고하였다. 수십년 후 Vrentas와 Vrentas[5]는 표면장력에 의한 대류는 진동상태를 보이지 않는다는 것을 해석적으로 증명하였다. 하지만 위에서 언급된 모든 연구들은 온도분포가 정상상태이고 온도 구배가 일정한 경우에 대한 것들이다. 따라서 기존 연구들은 온도분포가 선형인 경우에는 적용할 수 있지만, 온도분포가 시간의존형이고 비선형인 경우에는 적용할 수 없다. 시간 의존형의 온도분포를 갖는 계에서 Marangoni 대류의 발생시점은 가정상태 근사법(quasi-static approximation)[6], 전파이론[7], 에너지법[8] 및 maximum-transient-Marangoni-number 법[9]에 의하여 해석되었다. 하지만 이 모든 연구들에서 안정성 교환의 원리를 해석적 증명없이 가정하였다.

본 연구에서는 표면장력의 변화에 의하여 유발되는 Marangoni 대류 계에서 안정성 교환의 원리를 해석적으로 증명할 것이다. 따라서 본 연구는 기존의 연구들을 보완하게 되고 시간 의존형 온도분포를 갖는 다양한 계의 안정성 특성을 이해하는데 많은 도움을 줄 것이다.

### 2. 지배방정식

본 연구에서 고려되는 계는 초기에 일정한 온도  $T_0$ 로 유지되는 뉴턴성 액체이다. 시간이  $t \geq 0$ 인 경우에, 기-액 계면을 통하여  $q_w$ 의 일정한 열속으로 냉각된다. 전도에 의하여 냉각되고 있는 계에 대

<sup>†</sup>To whom correspondence should be addressed.

E-mail: mckim@cheju.ac.kr

<sup>‡</sup>이 논문은 서울대학교 최창균 교수님의 정년을 기념하여 투고되었습니다.

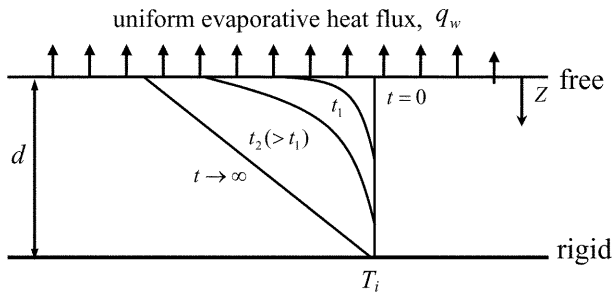


Fig. 1. Schematic diagram of system considered here.

한 개략적인 사항은 Fig. 1에 주어져 있다.  $q_w$ 가 큰 경우에 표면장력에 의한 대류가 발생하게 되고 이 경우에 온도 및 유동장을 지배하는 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{U} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) T = \alpha \nabla^2 T \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{U}$ ,  $P$ ,  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$ 는 각각 속도 벡터, 압력, 밀도, 동점도, 열확산 계수를 나타낸다. 수직 방향 좌표  $Z=0$ 에서의 경계면의 온도  $T_s$ 는 전도 상태에서 시간에 따라 감소한다.

본 연구에서 고려되는 계를 기술하는데 중요한 무차원 수는 다음과 같이 정의되는 Prandtl 수(Pr) Marangoni 수(Ma)이다.

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{and} \quad \text{Ma} = \frac{sq_w d^2}{k\alpha\mu}$$

여기서  $\mu$ ,  $s$ ,  $k$ 는 각각 점도, 온도의 변화에 따른 표면장력의 변화율의 절대값, 열전도도를 나타낸다. Ma가 큰 경우에, 안정성 문제는 시간 의존성이 되고 불안정성 발생 임계 시점 the  $t_c$ 는 여러 방법으로 해석되어 왔다.

시간 의존성의 안정성 해석을 위하여,  $d^2/\alpha$ ,  $d$ ,  $qd/k$ 를 시간, 거리, 온도의 척도로 사용하여 무차원 변수  $\tau$ ,  $z$ ,  $\theta_0$ 를 정의하면 기본 전도 상태의 온도 분포는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} \quad (4)$$

이 경우 경계 조건은 다음과 같다.

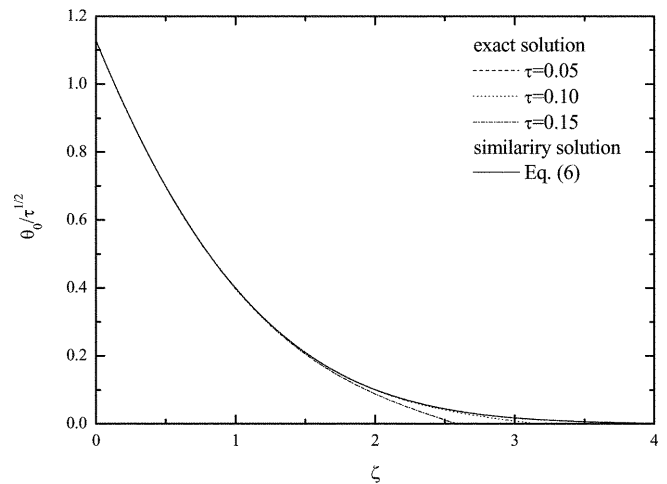
$$\theta_0 = 0 \quad \text{at} \quad \tau = 0 \quad (5a)$$

$$\theta_0 = 0 \quad \text{at} \quad z = 1 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = 1 \quad \text{at} \quad z = 0 \quad (5b)$$

위의 기본 온도 분포식은 잘 알려진 변수분리법이나 Laplace 변환을 사용하여 풀면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\theta_0 = z - 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \cos(\lambda_n z) \exp(-\lambda_n^2 \tau) \quad (6a)$$

$$\theta_0 = -\sqrt{4\tau} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \text{ierfc}\left(\frac{n}{\sqrt{\tau}} + \frac{\zeta}{2}\right) - \text{ierfc}\left(\frac{n+1}{\sqrt{\tau}} - \frac{\zeta}{2}\right) \right\} \quad (6b)$$

Fig. 2. Comparison of Eq. (7) with (6). For  $\tau \leq 0.1$  the difference between two equations becomes negligible.

여기서  $\mu_n = (n-1/2)\pi$ 이고  $z = z/\sqrt{\tau}$ 이다. 무차원 시간  $\tau$ 가 아주 작은 경우에는 경계층( $\tau$ ,  $\zeta$ )-좌표계를 사용하는 식 (6b)가 전역( $\tau$ ,  $z$ )-좌표계를 사용하는 식 (6a)보다 수렴성이 훨씬 좋다. 시간의 변화에 따른 기본 온도 분포의 변화는 Fig. 2에 나타나 있다.  $\theta_0$ 가 0이 아닌 길이  $\delta_T(\tau)$ 는 전도 경계층의 열 침투 깊이(thermal penetration depth)라 불린다.  $\delta_T(\propto \sqrt{\tau}) \ll 1$ 인 경우에는, 해석영역은 양의  $z$ -방향으로 반 무한 공간으로 고려할 수 있기 때문에 기본 온도 분포는 다음과 같이 간략화 된다.

$$\theta_0^* = -\frac{\theta_0}{\sqrt{4\tau}} = \text{ierfc}\left(\frac{\zeta}{2}\right) \quad (7)$$

$\tau < 0.1$ 인 경우에 위의 유사변수 해 (7)는 엄밀해 (6)과 아주 잘 일치한다.  $\tau \leq 0.01$ 인 경우에  $n=0$ 으로 둔 식 (6b)는 식 (7)과 거의 같은 온도 분포를 준다.

### 3. 선형 안정성 이론

선형 안정성 이론 하에서, 표면 장력의 변화에 의하여 유발되는 교란은 식 (1)-(3)을 선형화시켜 다음과 같이 무차원화 된 형태의 교란 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left\{ \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \tau} - \nabla^2 \right\} \nabla^2 w_1 = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + \text{Ma} w_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial \tau} = \nabla^2 \theta_1 \quad (9)$$

여기서  $\theta_1$ 와  $w_1$ 는 온도와 수직 방향 속도의 교란량이고  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 는 Laplace 연산자이다. 위식에서 속도는  $\alpha/d$ 로, 온도 교란은  $\alpha\mu/(sd)$ 을 사용하여 무차원화 하였다. 경계조건은 다음과 같이 주어진다[5].

$$w_1 = \frac{\partial \theta_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} = a^2 \theta_1 \quad \text{at} \quad z = 0 \quad (10a)$$

$$w_1 = \frac{\partial w_1}{\partial z} = \theta_1 = 0 \quad \text{at} \quad z = 1 \quad (10b)$$

위의 교란량들은 시간 및 수직 방향으로의 교유함수와  $(x, y)$ -평면에서의 정규 형태로 분리될 수 있다.

$\delta_T(\propto \sqrt{\tau}) \ll 1$ 인 반 무한 영역에서는 수직 방향 확산 연산자에 관련된 고유 함수들이 열침투 깊이 내에 한정되도록 교란 방정식들을 변환한다. 기본 상태의 유사변수  $\zeta = z/(\sqrt{\tau})$ 를 사용하여 좌표변환을 하면,  $\text{Pr} \rightarrow \infty$ 의 극한의 경우에 교란 방정식들을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left(\frac{1}{\tau} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - a^2\right) w_1 = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} - \frac{1}{\tau} \left( \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} - a^2 \tau \right) \theta_1 = \text{Ma} w_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial \zeta} \quad (12)$$

여기서  $a$ 는  $(x, y)$ -평면에서의 주기성을 나타내는 파수(wavenumber)이다. 경계조건은 다음과 같이 된다.

$$w_1 = \frac{\partial \theta_1}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} = a^2 \tau \theta_1 \quad \text{at } \zeta = 0 \quad (13a)$$

$$w_1 = \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} = \theta_1 = 0 \quad \text{for } \zeta \rightarrow \infty \quad (13b)$$

#### 4. 안정성 교환의 원리

앞에서 언급된 대부분의 연구에서 안정성 교환의 원리가 수학적 증명없이 사용되었다. 본 연구에서는  $\tau$ 가 작은 경우에 대하여 이를 증명하려 한다.

$$F = a^2 \theta_1 \quad \text{and} \quad G = (w_1/\tau) \quad (14)$$

라 두면, 식 (11)과 (12)는 다음과 같이 된다.

$$(D^2 - a^{*2})^2 G = 0 \quad (15)$$

$$\left(D^2 + \frac{\zeta}{2} D - a^{*2} - \tau \frac{\partial}{\partial \tau}\right) F = -a^{*2} \text{Ma}^* \text{Gerfc}\left(\frac{\zeta}{2}\right) \quad (16)$$

경계조건은 다음과 같이 변형된다.

$$G = DF = 0, D^2 G = F \quad \text{at } \zeta = 0 \quad (17a)$$

$$G = DG = F = 0 \quad \text{for } \zeta \rightarrow \infty \quad (17b)$$

여기서  $D = \partial/\partial \zeta$ ,  $a^* (= a\sqrt{\tau})$ 와  $\text{Ma}^* (= \text{Ma}\tau)$ 는  $\delta_T$ 를 길이차원으로 하는 파수와 Marangoni 수이다. 상첨자 “\*”는  $\tau$ 만의 함수임을 나타낸다.

일반화된 Fourier 급수의 특성을 사용하면  $F$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F(\tau, \zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m^*(\tau) \phi_m(\zeta) \quad (18)$$

여기서  $A_m$ 은 복소수인 계수이고,  $\phi_m$ 은 다음의 Sturm-Liouville 경계치 문제를 만족하는 정규 함수들이다.

$$\left(D^2 + \frac{\zeta}{2} D\right) \phi_m = -\lambda_m \phi_m \quad (19)$$

경계조건은 다음과 같다.

$$D\phi_m(0) = \phi_m(\infty) = 0 \quad (20)$$

식 (15), (17), (18)을 결합하여 풀면  $G$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G = -\frac{1}{2a^*} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \phi_m(0) \psi(\zeta) \quad (21a)$$

$$\psi(\zeta) = \zeta \exp(-a^* \zeta) \quad (21b)$$

식 (16)에  $\exp(\zeta^2/4) \bar{F}$ 를 곱하고  $\zeta$ 의 전범위에 걸쳐서 적분하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma^* \tau \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) \bar{F} F d\zeta - \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) \bar{F} \left(D^2 + \frac{\zeta}{2} D - a^{*2}\right) F d\zeta \\ = a^{*2} \text{Ma}^* \int_0^{\infty} G \bar{F} \exp\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) \text{erfc}\left(\frac{\zeta}{2}\right) d\zeta \end{aligned} \quad (22)$$

여기서  $\bar{F}$ 는  $F$ 의 켈레복소수, 즉  $\bar{F} = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_m \phi_m(\zeta)$ 이고  $\exp(\zeta^2/4)$ 는 식 (19)로 주어지는 Sturm-Liouville 방정식의 가중함수(weighting function)이다. 성장률  $\sigma^*$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma^* = \frac{\int_0^{\infty} \exp\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) \bar{F} \frac{\partial F}{\partial \tau} d\zeta}{\int_0^{\infty} \exp\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) \bar{F} F d\zeta} \quad (23)$$

경계조건 (17)을 통하여 적분된 부분이 소거되기 때문에, 식 (22)를 부분 적분하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) \bar{F} \left(D^2 + \frac{\zeta}{2} D - a^{*2}\right) F d\zeta = \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) |D F|^2 d\zeta \\ - \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) a^{*2} |F|^2 d\zeta \end{aligned} \quad (24)$$

위 식의 우변의 정적분은 모두 실수 함수이다. 그리고, 식 (22)의 켈레복소수는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^* \tau \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) \bar{F} F d\zeta - \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) \bar{F} \left(D^2 + \frac{\zeta}{2} D - a^{*2}\right) F d\zeta \\ = -a^{*2} \text{Ma}^* \int_0^{\infty} G \bar{F} \exp\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) \text{erfc}\left(\frac{\zeta}{2}\right) d\zeta \end{aligned} \quad (25)$$

여기서  $\bar{G}$ 는  $G$ 의 켈레 복소수, 즉  $\bar{G} = -\frac{1}{2a^*} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_m \phi_m(0) \psi(\zeta)$ 이다. 식 (22)와 (25)의 좌변의 적분들은 모두 실수 함수이고,  $G\bar{F} = \bar{G}F$ 이므로 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\sigma^* = \bar{\sigma}^* \quad (26)$$

이 관계는 모든 양의  $\text{Ma}^*$ 에 대하여  $\sigma^*$ 가 실수 함수임을 나타내며, 본 연구에서 고려되는 계에서는 안정성 교환의 원리가 성립한다는 것을 보여준다.

#### 5. 결 론

시간 의존형의 온도분포를 갖는 계에서 표면장력의 변화에 의하여 유발되는 대류 불안정성이 안정성 교환의 원리를 만족한다는 것을 해석적으로 보였다. 따라서 본 연구는 기존의 연구들을 보완하

계 되고 시간 의존형 온도분포를 갖는 다양한 계의 안정성 특성을 이해하는데 많은 도움을 줄 것이다.

### 참고문헌

1. Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford Univ. Press, London, England(1961).
2. Pearson, J. R. A., "On Convection Cells Induced by Surface Tension," *J. Fluid Mech.* **4**, 489(1958).
3. Vidal, A. and Acrivos, A., "Nature of the Neutral State in Surface-tension Driven Convection," *Phys. Fluids* **9**, 615(1966).
4. Finlayson, B. A., *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York(1972).
5. Vrentas, J. S. and Vrentas, C. M., "Exchange of Stabilities for Surface Tension Driven Convection," *Chem. Eng. Sci.* **59**, 4433(2004).
6. Vidal, A. and Acrivos, A., "Effect of Nonlinear Temperature Profiles on Onset of Convection Driven by Surface Tension Gradients," *Ind. Eng. Chem. Fund.*, **7**, 53(1968).
7. Kim, M. C., Choi, C. K., Yoon, D. Y. and Chung, T. J., "Onset of Marangoni Convection in a Horizontal Fluid Layer Experiencing Evaporative Cooling," *Ind. Eng. Chem. Res.* **46**, 5775(2007).
8. Gumerman, R. J. and Homsy, G. M., "The Stability of Uniformly Accelerated Flow with Application to Convection Driven by Surface Tension," *J. Fluid Mech.* **68**, 191(1975).
9. Tan K. K. and Thorpe, R. B., "On Convection Driven by Surface Tension Caused by Transient Heat Conduction," *Chem. Eng. Sci.* **54**, 775(1999).