

## 고점도 유체 내에서 부양하는 거품의 종말속도, 항력계수, 형태 분석

김진현 · 김정현<sup>†</sup>

서울시립대학교 화학공학과  
130-743 서울시 동대문구 전농동 90  
(2010년 3월 18일 접수, 2010년 4월 10일 채택)

### Analysis of Terminal Velocity, Drag Coefficient and Shape of Bubble Rising in High Viscous Fluid

Jin Hyun Kim and Jung Hyeun Kim<sup>†</sup>

Department of Chemical Engineering, University of Seoul, 90 Jeonnon-gong, Dongdaemun-gu, Seoul 130-743, Korea  
(Received 18 March 2010; accepted 10 April 2010)

#### 요 약

기체와 액체가 만나는 2상 공정들은 화학공학, 생명화학공학, 환경공학, 식품공학 등에 두루 존재한다. 위와 같은 공정의 최적화를 위해서는 거품의 움직임과 형태에 대한 정확한 파악이 필요하다. 액체 내부에서 거품의 움직임은 액체의 밀도, 점도, 표면장력과 거품의 크기와 속도에 영향을 받는다. 본 논문에서는 고점도 실리콘 오일 내부에서의 거품의 움직임과 형태를 관찰하였다. 또한 국외 논문 및 저서에서 정립된 거품의 에너지 수지 식, 항력계수와 변형계수를 이용하여 거품의 종말속도, 항력계수, 변형계수, 형태를 예측해 보고 이를 실험결과와 비교해 보았다. 실험 결과 거품의 속도는 점도가 낮을 경우가 더 빨랐고, 거품의 항력계수는 점도가 클 때 더 컸다. 거품의 형태는 점도가 클 때 덜 찌그러진(구형에 가까운) 형태였다. 실험결과와 국외 논문 및 저서에서 정립된 항력계수와 변형계수를 이용한 예측결과를 비교해 본 결과 Batchelor가 제시한 이론이 가장 정확한 예측을 하는 것으로 나타났다. Batchelor가 제시한 거품의 에너지 수지식, 항력계수와 변형계수를 사용하여 예측한 거품의 2차원 측면 형태는 실험에서 관찰된 거품의 2차원 측면 형태와 유사하였다.

**Abstract** – Gas-liquid 2 phase processes are usually used in chemical, biochemical, environmental engineering and food process. For optimizing these processes, understanding bubble's precise movement and shape are needed. Bubble's movement and shape are effected by liquid's properties-viscosity, surface tension and bubble's properties-size, velocity. This paper deals with experimental data of bubble's movement and shape in high viscous silicone oil. Also, drag coefficient and deformation factor given by other researcher's papers and books are used to predicting and comparing bubble's terminal velocity, drag coefficient, deformation factor and shape with experimental value. Experimental data show that bubble moves faster when it moves in lower viscous silicone oil and it's drag coefficient is bigger when it moves in high viscous silicone oil. Bubble's shape is close to sphere when moving in high viscous silicone. Formulas proposed by Batchelor expect most accurate prediction for bubble's velocity and drag coefficient. Bubble's 2D shape predicted by Batchelor's energy balance, drag coefficient and deformation factor show excellent agreement with experimental bubble's 2D shape.

Key words: Bubble, Terminal Velocity, Drag Coefficient, DEF, Shape

#### 1. 서 론

기체와 액체가 만날 때 생성되는 거품의 활용은 화학공학뿐만 아니라 생명공학, 식품공학, 환경 공학 등 다양하며, 상업적으로도 기름 추출, 생체 반응기, 식품 처리 등 다양한 분야에서 중요한 역할을 하고 있다[1-3].

이때 거품의 움직임과 형태를 파악하는 것은 공정의 최적화를 위

해 중요하며 이에 대한 연구와 논문을 찾아 볼 수 있다. 예로 설탕 공장에서는 설탕 시럽의 제조에서 열과 물질의 보다 빠른 전달을 위해 거품을 활용한다. 이때 거품의 속도, 크기와 이동 궤도 등은 공정의 최적화를 위해 고려되어야 하는 사항이며, 단일 거품에 대해 연구한 결과를 바탕으로 거품의 활용도와 효율을 높일 수 있다고 보고 있다[1]. 또한 Mirzaee[2]의 논문에서는 실험결과를 통해 살구 과실 분류 공정에 있어서 거품을 이용한 공정으로 기존 공정을 대체할 수 있으며 이는 기존 공정의 비싼 유지비와 운전비용의 절감효과를 가져올 수 있다고 평가하고 있다.

<sup>†</sup>To whom correspondence should be addressed.  
E-mail: jhkimad@uos.ac.kr

거품은 위와 같이 다양한 활용 가능성이 있으며, 거품의 보다 효율적인 활용을 위해 거품의 움직임과 형태에 대한 연구가 필요한 시점이다. 그러나 거품의 움직임과 형태에 대한 예측은 여러 변수가 관련되어 어려운 문제이다. 또한 거품의 국내에서 연구는 활발하지 않은 상태로 거품의 물리적 특성에 대한 연구는 찾아보기 힘들다. 또한 국외 논문들에서도 현재 거품의 항력계수 및 속도, 형태에 대한 이해는 완벽하지 않은 상태로 보다 정확한 이론을 정립하기 위해 다양한 액체에서 다양한 크기의 거품에 대한 연구가 필요하다고 언급하고 있다[4]. Suñol[4]의 논문 역시 현재 여러 산업에서 거품의 성질을 효과적으로 이용하고자 거품 물리학에 대한 연구의 필요성이 부각되고 있다고 언급하고 있다.

위와 같은 요구에 맞추어 국외의 경우 거품의 움직임과 형태를 수학적, 이론적으로 파악하려는 좀 더 다양한 시도가 있었으며, 다양한 종류의 실험들을 찾아볼 수 있다. 거품에 대한 국외 연구 동향을 살펴보면 거품에 대한 연구는 주로 거품의 크기, 형태 및 거품이 움직이는 액체에 대해 이루어졌다[1-3].

거품의 크기를 변수로 한 연구에서 거품의 크기는 주로 작은 것(거품의 지름이 0.1 cm 미만)을 사용한다. 그 이유는 큰 거품보다 작은 거품의 속도와 움직임을 예측하는 것이 쉽기 때문이다[5]. 설명에 앞서 편의상 그리고 참고논문들에서 정의한 것과 유사하게 작은 거품과 큰 거품을 정의하도록 하겠다. 유체가 물 혹은 물과 유사한 표면장력과 점도의 액체일 때, 유체 내부에서 움직이는 지름 0.1 cm 이하의 거품을 작은 거품이라 하고 그보다 더 큰 거품을 큰 거품이라 정의하겠다.

작은 거품의 경우 큰 거품에 비해 비교적 느린 속도로 움직이며 이때 Re 수는 거의 0.1 이하이다. 또한 작은 거품은 거의 구형 강체와 같이 움직이므로 작은 거품은 creeping flow에서 움직이는 구형 물체라 할 수 있으며 거품의 거동은 Stoke's law를 따르게 된다. 그리고 Stoke's law를 따르는 강체의 움직임에 대한 유체역학적 풀이는 많이 정립된 상태이므로 작은 거품에 대한 연구는 수월한 편이다.

그러나 거품의 크기가 커질 경우 생성 직후의 거품은 구형이지만 속도가 종말속도에 이르면서 점점 그 형태가 변형되고 이 때문에 거품의 움직임과 형태를 예측하기 매우 어려워진다. 이는 강체에 대한 유체역학적 풀이와는 달리 비교적 복잡한 문제이며 일반적으로 기존 강체에 대한 이론식을 실험값을 이용해 보강하거나 혹은 VOF(Volume Of Fluid)와 같은 수치해석적인 방법으로 풀어야 한다. 따라서 실험에서 거품은 주로 작은 부피의 거품을 사용한다.

그러나 몇몇 연구에서는 액체가 고점도일 경우 큰 부피의 거품을 사용하기도 하였다. 그 이유는 저점도인 경우 거품은 크기가 작은 경우에만 강체와 같이 움직이며, 점도가 큰 액체 내부에서는 꽤 큰 거품이라 하더라도 강체와 같은 움직임을 보인다. 그리고 작은 거품보다 큰 거품의 움직임과 형태를 관찰하는 것이 좀더 용이하므로 고점도, 고표면장력 액체에서의 거품의 움직임과 형태를 알아내려는 시도가 있었다[6].

거품 관련 실험의 또 다른, 그리고 가장 일반적인 변수는 액체의 종류이다. Bozzano[7]의 2001년도 논문에서는 Pyridine, Nitrobenzene, Cottonseed oil, Glycerol 등의 유체를 이용하여 실험한 결과 Batchelor의 항력계수가 거품의 움직임에 대해 어느 정도 정확한 예측을 할 수 있음을 보였다. 이후 Bozzano[8]는 2009년도 논문에서 더욱 다양한 액체들(Ethyl acetate, Aniline, Acetic acid-water, purified water, Isopropyl alcohol)에 대해 실험하였으며, 결과들은 이전 2001년도에

진행된 연구와 같이, 거품의 속도를 정확하게 예측할 수 있는 것으로 나타났다.

거품의 속도 이외에도 거품의 형태를 관찰한 논문 역시 찾아볼 수 있었다. 이는 거품의 특성(물질전달, 열전달, 에너지 전달과 관련한 물성)이 거품의 표면적과 단면적에 영향을 받기 때문으로, 따라서 거품의 형태에 대한 파악은 속도에 대한 파악 못지 않게 중요하기 때문이다. 그 예로 참고문헌[6]을 볼 수 있으며, 실험결과 물과 같은 저점도 액체 내부에서는 거품의 형태가 구형보다 찌그러진 타원 혹은 변형 반구에 가까우며, glycerol과 같은 고점도 용액에서는 거품의 형태가 거의 구형이 됨을 밝혀냈다.

본 연구에서는 참고논문[4,6-8]에서 소개된 이론과 결과를 주로 참고하여 단일 거품의 움직임과 형태를 관찰하고 분석하는데 주안점을 두었다. 본래 거품은 매우 많은 수가 한번에 발생하여 움직이는 것이 보통이나, 이러한 거품은 관찰하기 어렵기 때문에 실험기구를 제작하여 단일 거품을 발생시켜 이를 관찰하였다. 또한 선행 연구들에서 제시한 이론들을 통해 거품의 움직임과 형태를 예측하였다. 거품의 움직임과 형태에 대해 Batchelor[9]와 Moore[10]는 이론적, 실험적으로 안정한 이론을 제시하였으며 본 연구에서는 이를 활용해 실험결과와 예측결과를 비교해 보고 결과에 대해 고찰하였다.

## 2. 이 론

### 2-1. 거품의 종말속도 예측

종말속도는 부양하는 거품에 작용하는 알짜힘( $F_K$ )가 0일 때 즉 가속도가 없을 때 거품이 등속도가 될 때의 속도를 의미한다. 따라서 알짜힘의 수치(balance)를 맞춘다면 종말속도와 관련된 관계식을 알아낼 수 있다.

이번 실험에서 특히 중요한 힘은 부력과 항력이다. 침강하는 물체와 달리, 부양하는 물체 혹은 거품이 이동하는데 가장 큰 작용을 하는 것은 부력이며 무거운 유체내부에서 거품에 작용하는 부력과, 거품의 운동방향과 반대방향으로 작용하는 항력에 대해 알맞은 식이 필요하다.

부양하는 입자에 작용하는 힘은 중력( $F_G$ , gravity force), 부력( $F_B$ , buoyant force), 항력( $F_D$ , drag force)이 있다. 전체 알짜힘은 운동력( $F_K$ , kinetic force)으로 거품의 운동력은 부력, 중력, 항력의 식으로 나타낼 수 있다.

$$F_K = F_B - F_G - F_D \quad (1)$$

떨어지는 물체의 운동 힘은 중력에 의해 발생하지만 액체 내에서 거품의 추진력은 부력에 의해 발생한다. 액체 내에서 부력, 중력, 항력은 다음과 같이 주위지며 이를 대입할 시 운동력은 다음과 같다.

$$F_K = m \frac{dU}{dt}, F_B = V\rho_L g, F_G = V\rho_g g, F_D = \frac{1}{2}\rho_L U^2 A_p f \text{ 이므로}$$

$$m \frac{dU}{dt} = V\rho_L g - V\rho_g g - \frac{1}{2}\rho_L U^2 A_p f \quad (2)$$

가 성립한다.  $U$ 는 거품의 속도,  $V$ 는 거품의 부피,  $\rho$ 는 밀도,  $g$ 는 중력가속도,  $A_p$ 는 거품의 실제 단면적,  $f$ 는 마찰계수이다. 이때 위에 제시된 항력과 마찰계수 사이의 관계식을 유도하면 다음과 같다. 물체의 실제 단면적  $A_p$ 에 대하여 항력은  $F_D = \frac{1}{2}\rho_L U^2 A_p f$  이므로 항력계수  $C_D$ 에 대하여

$$C_D = f \frac{A_p}{A_s} = f \left( \frac{a}{R_0} \right)^2 \quad (3)$$

가 성립한다.  $A_s$ 는 물체와 같은 부피를 가진 구형 물체의 단면적이다.  $a$ 는 거품의 가로 반지름,  $R_0$ 는 거품과 같은 부피를 가진 구형 물체의 반지름이고,  $D_0$ 는  $D_0 = 2R_0$ 로 구형물체의 지름이다.

위 식 (3)을 이용하면 거품의 종말속도  $U_t$ 와 항력계수를 구할 수 있다. 종말속도는 가속도가 0일 때 거품의 속도이므로 종말속도와 항력계수의 관계는 최종적으로 다음과 같이 유도된다.

$$m \frac{dU_t}{dt} = 0 = V \rho_L g - V \rho_g g - \frac{1}{2} \rho_L U_t^2 A_p f \text{ 이며}$$

$$U_t^2 = \frac{4}{3} \left( \frac{\rho_L - \rho_g}{\rho_L} \right) \frac{g D_0}{f} \left( \frac{R_0}{a} \right)^2 = \frac{4}{3} \left( \frac{\rho_L - \rho_g}{\rho_L} \right) \frac{g D_0}{C_D} \quad (4)$$

**2-2. 거품의 항력계수**

이론 2.1에서 유도한 식 (4)에 항력계수 식을 대입하여 계산하면 거품의 이론적인 속도를 예측할 수 있다. 이때 식 (4)에서 보이듯이 거품의 속도와 관련된 변수는 항력계수와 관련된 변수와 같다. 즉 항력계수가 액체의 밀도, 점도, 거품의 크기(거품의 크기란 거품의 부피 혹은 지름을 의미함), 표면장력에 영향을 받으며 속도 역시 그렇다는 것이다.

항력계수의 변수 의존성은 거품의 크기에 따라 다르며 거품의 크기가 바뀌면 표면장력에 대한 의존도가 바뀐다. 작은 거품일 경우 거품은 거의 구형을 띄고 느린 속도로 움직이며 거품의 거동은 *Stoke's law*를 따른다. 이때 작은 거품의 운동에너지는 거품을 변형시킬 정도로 크지 않아서 거품에 가해지는 표면장력은 거품의 모든 부분에 대해 거품의 안쪽으로 일정하게 가해지고 거품의 움직임에 거의 영향을 주지 않는다. 따라서 작은 거품의 속도와 항력계수는 표면장력의 영향을 거의 받지 않는다.

그러나 거품이 점점 커질수록 속도도 커지며 따라서 거품의 운동에너지는 거품을 변형시킬 정도로 커진다[4,7]. 이 때문에 거품은 구형을 유지하지 못하고 찌그러지게 되며, 형태의 대칭성이 깨짐에 따라 표면장력은 거품에 비대칭적으로 작용하게 된다. 따라서 큰 거품의 경우 거품의 형태를 변형시키려는 운동에너지와 형태를 구형으로 유지시키려는 표면장력이 동시에 가해지게 된다. 이는 거품의 운동에 영향을 주고 결과적으로 표면장력이 거품의 속도와 항력계수에 영향을 주게 된다. 따라서 거품의 크기 변화에 따른 속도의 함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_t = U_t(g, \rho_b, \rho_g, \mu_b, D_0) \text{ (for small, spherical bubble)}$$

$$U_t = U_t(g, \rho_b, \rho_g, \mu_b, D_0, \sigma) \text{ (for big, deformed bubble)}$$

위와 같은 관계식이 됨을 고려한다면 거품의 움직임을 잘 설명하는 항력계수는 거품의 속도, 크기(지름) 및 액체의 밀도, 점도뿐만 아니라 표면장력도 고려한 항력계수일 것임을 예상할 수 있다.

본 연구에서는 실험결과를 이론결과와 비교하기 위해 3가지 항력계수를 사용하여 실험결과와 비교해 보았다.

첫 번째로 *Stoke's law*를 통해 유도된 항력계수로 종말속도를 예측하는 식을 유도해 보도록 하겠다. *Stoke's law*는 매우 느리게 움직이는 유체(*creeping flow*) 내부에서 적용되는 항력은 다음과 같다.

$$F_D = 6\pi\mu R_0 U_t \text{ (creeping flow)} \quad (5)$$

위 식을 이용하여 항력계수의 식을 유도할 수 있다. 매우 느리게 움직이는 유체에서 거품은 구형[ $A_p = A_s$ ]이므로

$$F_D = 6\pi\mu R_0 U_t = \frac{1}{2} \rho_L U_t^2 A_s C_D \text{ 이므로}$$

$$C_D(\text{Stoke}) = \frac{24\mu}{\rho_L U_t D_0} = \frac{24}{\text{Re}} : \text{Re} < 0.1 \quad (6)$$

위 항력계수는 이론적으로 타당하나, 매우 느리게 움직이는 유체 혹은 물체(*creeping flow*)에서만 적용된다는 단점이 있다. 유체의 유속이 증가할수록 이론적으로 유체의 운동을 설명하기 힘들어지며, 이는 항력계수 역시 마찬가지이다.

이러한 문제점을 해결하기 위해 거품의 운동과 관련한 이론 및 실험결과를 토대로 다양한 항력 계수가 유도되었다. *Batchelor*[9]의 저서에서 나온 *Levich*의 항력계수는 거품의 속도 실험값을 내삽하여 계산되었다. *Levich*의 항력계수는 다음과 같다.

$$C_D(\text{Levich}) = \frac{48}{\text{Re}} \quad (7)$$

마지막으로 소개할 항력계수는 *Batchelor*[9]에 의해 유도되어 있다. 변형된 거품의 마찰계수는 다음과 같은 형태로 제안되었다.

$$f(\text{Batchelor}) = \frac{48}{\text{Re}} \left( \frac{1 + 12\text{Mo}}{1 + 36\text{Mo}} \right)^{1/3} + 0.9 \frac{\text{Bo}^{3/2}}{1.4(1 + 30\text{Mo}^{1/6}) + \text{Bo}^{3/2}} \quad (8)$$

위 항력계수는 무차원수 *Mo* 수(*Morton number*,  $\text{Mo} = g\mu_L^4(\rho_L - \rho_g) / \rho_L^2 \sigma^3$ ), *Bo* 수(*Bond number*,  $\text{Bo} = (\rho_L - \rho_g)gD_0^2 / \sigma$ )의 함수이며 *Mo* 수는 유체 내부에서 거품의 점성력과 표면장력의 비율을, *Bo*수는 관성력과 표면장력의 비율을 설명하는 무차원수이다. 그리고 위 식 (3)와 식 (8)을 이용하여 항력계수와 마찰계수의 관계식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$C_D(\text{Batchelor}) = f \left( \frac{a}{R_0} \right)^2 = \left( \frac{a}{R_0} \right)^2 \left\{ \frac{48}{\text{Re}} \left( \frac{1 + 12\text{Mo}}{1 + 36\text{Mo}} \right)^{1/3} + 0.9 \frac{\text{Bo}^{3/2}}{1.4(1 + 30\text{Mo}^{1/6}) + \text{Bo}^{3/2}} \right\} \quad (9)$$

**2-3. 거품의 형태 예측**

참고논문[6,7]에서는 부피에 따른 거품의 형태가 다음과 같이, 부피가 작을 경우 구형에 가까우며 부피가 증가할수록 그 형태는 타원(*ellipsoidal*)에 가까워지고, 이후 변형된 변형 반구(*semi ellipsoidal*)을 띄게 된다고 묘사하고 있다.

또한 이러한 변형에 의해 동일한 부피를 가진 구형 거품에 비해 더 큰 단면적을 가지게 되고, 따라서 항력 또한 증가하게 된다. 이는 거품의 종말속도와 항력계수를 예측하기 어렵게 하는 원인이 된다[4].

거품의 형태변형을 나타내는 방법은 여러 가지가 있으며, 본 논문에서는 참고문헌[4,8]에서 이용한 거품의 에너지 계산을 통한 형태 결정법을 사용해 거품의 형태를 예측해 보았다.

변형계수(*DEF*, *deformation factor*)는 거품의 가로 지름과 세로 지름의 비율로 다음과 같이 정의된다.

$$\text{DEF} = \left( \frac{a}{R_0} \right)^2 = \frac{2}{x+y} \quad (10)$$

a는 거품의 가로 반지름,  $R_0$ 은 거품과 같은 부피의 구의 반지름이다. x, y는 무차원화 된 거품의 세로 길이로  $x=b_1/R_0$ ,  $y=b_2/R_0$ 이다. 이때  $b_1$ 은 거품의 위쪽 타원의 세로 반지름,  $b_2$ 는 거품의 아래쪽 타원의 세로 반지름이다.  $b_1$ 과  $b_2$ 를 합하여 타원의 세로 반지름 b라 하기로 한다.

Moore[10]는 변형된 형태의 거품에 대해 그 변형 정도를 중형비  $\epsilon(\epsilon=2a/b)$ 을 통해 표현하였다.

$$\epsilon \approx 1 + \frac{9}{64}We - 0.0089We^2 + 0.0287We^3 \quad (11)$$

위 식 (11)에 의하면 중형비는 We 수(Weber number,  $We = \rho_L D_0 U^2 / \sigma$ )의 함수로 We 수는 다양한 유체사이의 운동에너지와 계면에너지의 비율을 나타내는 무차원수이다. 이를 통해 식 (11)는 액체의 표면장력과 운동력과 관계되어 있음을 알 수 있다. 위 식을 통해 변형계수를 구하면 다음과 같다.

$$DEF(moore) \cong \left(1 + \frac{9}{64}We - 0.0089We^2 + 0.0287We^3\right)^3 \quad (12)$$

참고문헌[9]에서는 또 다른 형태의 변형계수가 다음과 같이 정의되어 있다. 이는 수치해석적 방법을 이용해 구해졌으며 무차원수로 간단히 표현될 수 있다.

$$DEF(Batchelor) \cong \frac{10(1 + 1.3Mo^{1/6}) + 3.1Bo}{10(1 + 1.3Mo^{1/6}) + Bo} \quad (13)$$

위 변형계수는 무차원수 Mo 수, Bo 수의 함수이며 액체의 표면장력, 점도, 밀도, 거품의 지름에 영향을 받는다. 식 (10)과 식 (12) 또는 식 (13)의 변형계수를 구함으로써 거품의 a, b값을 예측할 수 있다.

변형계수를 통해 거품의 개략적인 형태를 예측할 수 있으나, 거품의 형태가 변형될 때 위쪽보다 아래쪽이 더 찌그러진 형태를 나타내므로 거품의 형태를 좀 더 정확히 예측하기 위해서는 a, b값 이외에  $b_1$ ,  $b_2$  값을 알아야 한다. 이는 참고논문[9]에서 제시된 에너지 수지식을 통해 가능하다. 거품이 가진 에너지는 각각  $E_p$ (potential energy),  $E_s$ (surface energy),  $E_k$ (kinetic energy)이며 전체 힘은 다음과 같다. 이때 각각의 힘은 다음과 같이 거품의  $b_1$ ,  $b_2$ 에 대한 함수로 주어진다.

$$E_t = E_p + E_s + E_k \quad (14)$$

$$E_p = (\rho_L - \rho_g)gV(3b_1 + 5b_2)/8 \quad (15)$$

$$E_s = \sigma \left( 2\pi a^2 + \frac{1}{2}\pi \frac{b_1^2}{e_1} \ln\left(\frac{1+e_1}{1-e_1}\right) + \frac{1}{2}\pi \frac{b_2^2}{e_2} \ln\left(\frac{1+e_2}{1-e_2}\right) \right) \quad (16)$$

$$E_k \cong \frac{2}{3}\pi\rho_L a^3 U^2 \quad (17)$$

위 식은 거품의 a,  $b_1$ ,  $b_2$ 의 고차함수로 거품의 지름과 높이만 관련된 것이 아니라 거품의 속도도 고려해야 하므로 계산과정이 복잡하다. 그러나 MATLAB 7.0을 이용하여 수치해석적으로 풀면 다음과 같은 거품의 에너지 그래프를 얻을 수 있고  $b_1$ ,  $b_2$  값을 얻을 수 있다. 그리고 거품의 에너지가 가장 작은 때의 거품의 수직길이  $b_1$ ,  $b_2$ 가 될 것이다. 다음 Fig. 1은 energy balance 식 (14)를 통해 거품의 부피 및 속도에 따른 에너지를 계산한 그래프이다. 이때 에너지 수지식에 들어가는 속도는  $C_D$ (Batchelor)을 사용한 식 (4)를, a, b

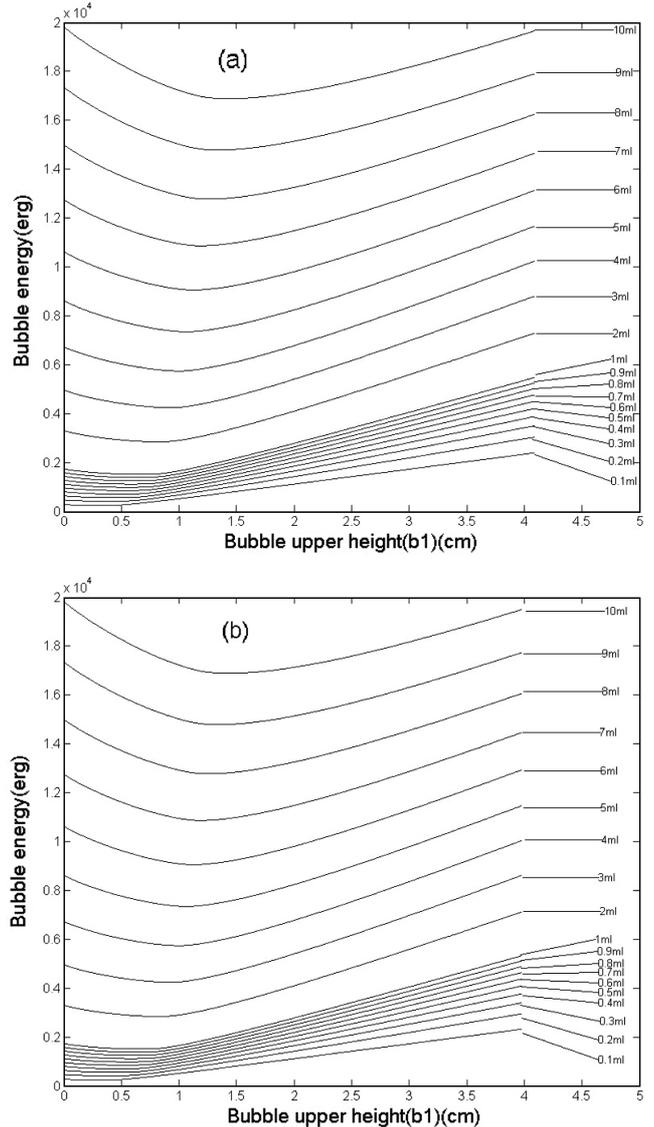


Fig. 1. Bubble's energy graph when it's velocity reached terminal value. (a) in 500CS. (b) in 1000CS.

값은 DEF(Batchelor)를 사용한 식 (13)를 이용하여 계산하였다.

위 그래프를 참조할 때, 거품이 가진 에너지는 erg 단위로 ( $1J=10^7erg$ ) 일반적인 물리현상 및 화학반응 에너지가 줄(J) 단위인 것을 감안하면 매우 작은 편이다. 거품의 에너지는 거품의 크기가 커질수록 증가함을 보여준다. 거품의 에너지는 거품의 수직길이  $b_1$ 의 함수로 표현되며, 어느  $b_1$ 값에서 최소값을 나타낸다. 이때 에너지가 최소값을 나타내는  $b_1$ 값이 거품이 최소 에너지로 존재할 수 있는 수직길이 중 거품의 상단의 길이를 나타낸다. 그리고 이를 통해  $b_2=b-b_1$ 의 관계에서  $b_2$ 를 구할 수 있다.

에너지 수지식을 이용해 수직길이  $b_1$ ,  $b_2$ 를 구한 후, 이제 거품의 형태를 예측하여 그려낼 수 있다. 다음 Fig. 2는 선행 연구들을 참고하여 예측한 거품의 입체 형태를 보여준다. Simulation 결과를 참고하여 거품의 형태를 미리 예측해 볼 수 있다. 0.1 ml의 작은 거품의 경우 타원 혹은 구형에 가까우나 1 ml부터는 타원형이며, 5 ml의 거품은 상당히 찌그러진 타원, 그리고 10 ml의 거품은 변형 반구 형태를 나타내는 것으로 예측됐다.

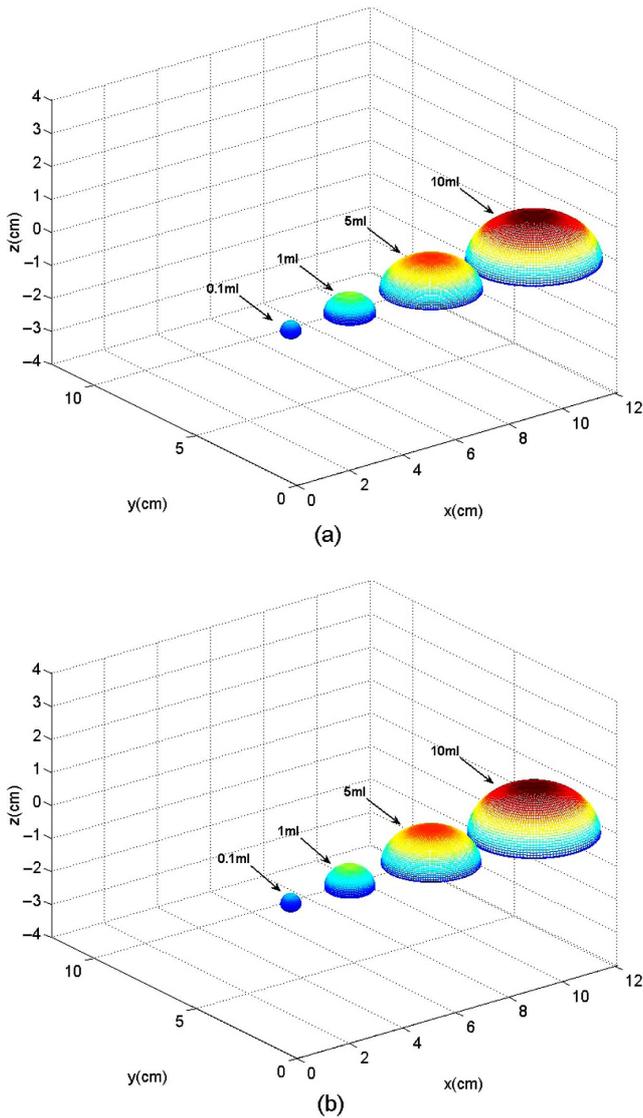


Fig. 2. 3D image of bubbles simulated by MATLAB 7.0. (a)in 500CS silicone oil, (b)in 1000CS silicone oil.

### 3. 실험기구 및 실험방법

실제 공정에서는 매우 많은 수의 거품이 이용되어 각각의 움직임과 형태를 파악하기 쉽지 않지만, 실험환경 예선 실제 공정과 유사한 실험환경을 만들어 1개의 거품에 대해 실험하는 것이 가능하다. 예로 여러 논문들[1,2,6,11]에서 특정 실험장치가 아닌 각자 자작된 다양한 실험기구를 이용하였다. 본 연구 역시 자작된 실험기구를 이용했다. 다음 Fig. 3는 본 연구에서 실험기구를 보여준다.

거품이 이동하는 관으로 지름 21 cm, 높이 120 cm의 투명한 원통 아크릴 관을 사용했다. 관 내부에 지름 0.8 cm의 타이곤 튜브를 설

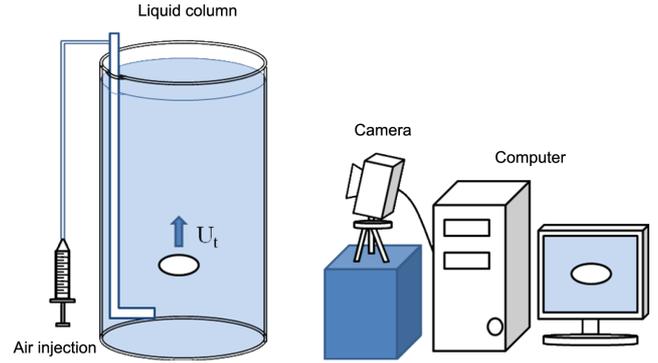


Fig. 3. Schematic diagram for the experimental system.

치하였고 이것이 관 바닥부터 관 끝까지 이어지도록 하였다. 그리고 이 타이곤 튜브에 주사기를 연결하여(대형: 용량 15 ml, 눈금단위 0.5 ml, 소형: 용량 3 ml, 눈금단위 0.1 ml) 일정량의 공기를 공급하였다. 주사기에 의해 공급된 공기는 타이곤튜브를 거쳐 아크릴 관 바닥 쪽에서 거품이 되고, 이 거품이 아크릴 관 바닥에서 끝으로 이동하게 된다. 거품이 관 내부에서 이동할 때 움직임과 형태는 디지털 카메라(SAMSUNG KENOX a5, 5 mega pixels, 4 cm close zoom)를 통해 동영상 촬영하고 이 동영상을 Windows media player로 재생하여 0.1s 단위로 모션캡처 하여 거품의 속도 및 형태를 기록하였다.

거품이 이동하는 액체로 실리콘 오일(dimethyl siloxane polymer, 신에츠 실리콘(Shin-Etsu Silicone Korea Co., Ltd.)을 사용하였다. 실리콘 오일은 점도에 따라 500CS, 1000CS 두 가지를 사용하였다. 다음 Table 1는 실험에 사용한 실리콘 오일과 다른 액체의 물성을 비교하였다.

다음 표에서 나타나듯 실리콘 오일은 점도가 매우 높은 편이다. 따라서 실리콘 오일 내부를 이동하는 거품은 다른 액체에서의 거품에 비해 더욱 구형에 가까운 형태를 유지할 것으로 예상되었다.

거품의 움직임과 형태를 관찰한 후 동영상을 모션캡처 하여 거품의 속도, 형태를 기록하였다. 다음 Fig. 4는 거품의 형태 및  $a, b_1, b_2$ 를 어떻게 데이터 하는 방법을 보여준다.

일단 속도 측정에서 거품이 일정한 속도로 움직이는 구간에서는 거품에 작용하는 알짜힘이 0이며, 따라서 이 구간에서는 한동안 거품의 형태가 변하지 않는다(작용하는 힘이 0이면 물체는 변형되지

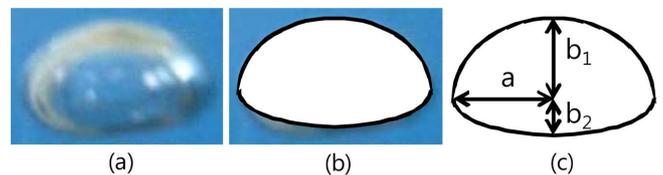


Fig. 4. Prediction method for bubble's shape and aspect length. (a) bubble's actual image, (b) bubble's restructured image, (c) measuring  $a, b_1, b_2$ .

Table 1. Properties of silicone oil and other common liquids at 20 °C

	Water	Ethanol	Glycerol	Pyridine	Benzene	Acetone	Silicone oil (500CS)	Silicone oil (1000CS)
Density(g/cm)	1.000	0.789	1.260	0.987	0.875	0.793	0.970	0.970
Surface tension(g/s)	71.98	22.27	63.00	36.60	28.90	23.70	21.20	21.20
Viscosity(g/cm/s)	0.010	0.009	7.750	0.009	0.065	0.003	4.835	9.671

않으며 가속하지도 않으므로). 이때 동영상의 장면을 캡처 하여 실제 거품과 같은 크기의 그림으로 저장한 후(a), 거품의 형태를 두 타원이 겹친 형상으로 어렵하여 간단한 형태로 재구성한다. (b) 이후 이 재구성된 타원의  $a, b_1, b_2$ 를 측정한다(c).

#### 4. 결과 및 고찰

거품이 종말속도에 다다랐을 때, 측정된 속도와 항력계수를 앞서 언급한 이론과 비교한 그래프는 다음 Fig. 5와 같다. 거품의 종말속도는 거품이 커질수록 더 빨라졌으며 점도가 낮은 액체에서 더 빠른 속도를 보였다. 거품의 종말속도를 예측하였을 때  $C_D(Stoke)$ 는 거품의 속도가 낮을 때,  $C_D(Levich)$ 를 사용하였을 때는 거품의 속도가 높을 때 어느 정도 정확한 예측값을 나타냈다. 그리고 모든 거품에 대해  $C_D(Batchelor)$ 를 사용하여 예측한 종말속도를 다른 항력계수 식을 사용하여 예측한 종말속도 예측치와 비교했을 때 가장 정확한 예측값을 나타내었다.

이러한 예측 경향성은 항력계수에서도 찾아볼 수 있었다. 실험 종말속도 값을 바탕으로 항력계수를 구하고, 이를 이론 항력계수 값과 비교하였을 때 다음 Fig. 6과 같이 나타났다. 위 그래프를 볼 때 역

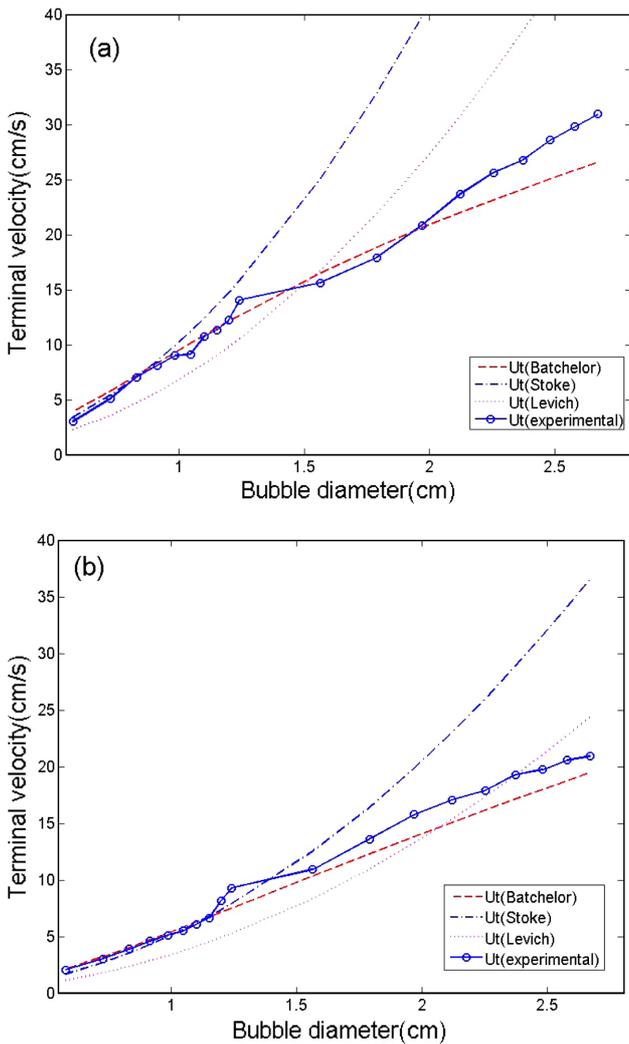


Fig. 5. Terminal velocity of the bubbles. (a)in 500CS silicone oil, (b)in 1000CS silicone oil.

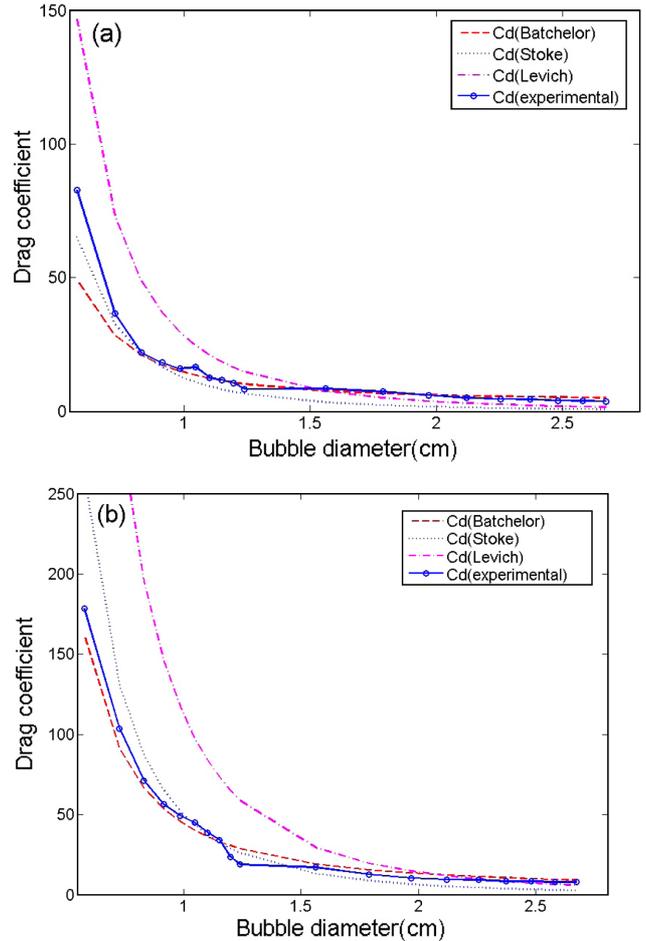


Fig. 6. Drag coefficient of the bubbles. (a) in 500CS silicone oil, (b) in 1000CS silicone oil.

시  $C_D(Batchelor)$ 이 가장 정확한 예측을 한 것으로 나타났다. 이는  $C_D(Batchelor)$ 의 경우 거품의 속도뿐만 아니라 액체의 표면장력, 거품의 형태를 고려했기 때문에 다른 항력계수보다 더 다양한 요건을 고려했기 때문으로 보인다.

이외의 항력계수는 실험값과 비교했을 때  $C_D(Levich)$ 와  $C_D(Stoke)$ 는 부정확한 예측값을 나타내었다.  $C_D(Stoke)$ 의 경우 거품이 항력을 덜 받는 것으로 예측하였고 이는 Stoke's law에서 물체를 구형으로 가정했으며 이는 실제 거품 보다 단면적이 작은 구형 거품의 항력계수를 이용한 것이므로 부정확한 예측값을 나타낸 것으로 보인다. 반면  $C_D(Levich)$ 는 거품이 더 큰 항력계수를 가지며, 항력을 더 받을 것이라 예측하였다. 이는 크기가 큰 거품에 대해서만 어느 정도 정확한 예측을 하였고 작은 거품에 대해서는 부정확한 예측값을 나타내었다. 위 결과들을 볼 때,  $C_D(Batchelor)$ 가 본 연구에서 사용한 항력계수 중 가장 정확한 결과를 예측한 것으로 나타났다.

참고문헌[7-9]에서 다루어진  $DEF(Batchelor)$ 는 거품의 형태를 예측하는 데에도 정확함을 보였다. 다음 Fig. 7는 거품의 변형계수에 대해 실험값과 이론값을 비교하였다. 위 그래프를 보면  $C_D(Batchelor)$ 의 경우 거품의 전반적인 크기에 대해 정확한 예측값을 나타내고 있다(그래프 상에서). 그에 비해  $DEF(Moore)$ 를 사용했을 경우 크기가 작은 거품에 대해서는 어느 정도 정확하나 거품의 크기가 커질 경우 부정확한 예측값을 나타냈으며, 전반적인 정확도 역시  $C_D(Batch-$

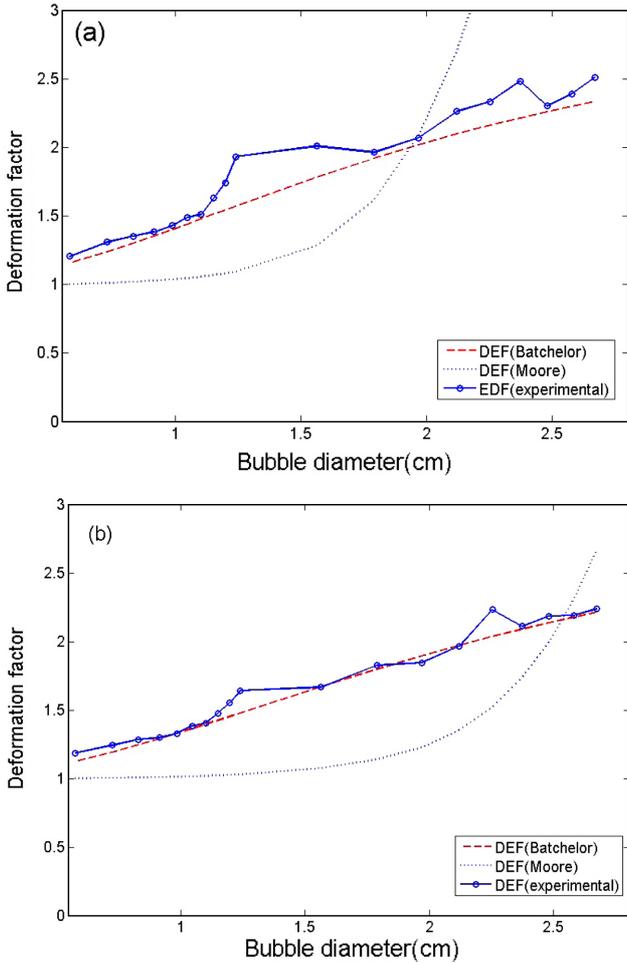


Fig. 7. Deformation factor of the bubbles. (a)in 500CS silicone oil, (b)in 1000CS silicone oil.

elor)에 비해 크게 떨어지는 것으로 나타났다.

위 종말속도, 항력계수, 변형계수에 대한 실험결과와 예측결과의 비교를 참조하여 가장 정확한 예측값을 나타내는  $C_D$ (Batchelor), DEF(Batchelor)를 이용하여 실험 거품의 형태와 이론적인 거품의 형태를 2차원으로 비교해 보았다. 이때 실험적인 거품의 형태는 실험 방법을 통해 관찰, 측정된 거품의 형태를 이용하였다. 그리고 이론적인 거품의 형태는 Batchelor[9]의 2001년 논문에서 참조한 에너지 수 지식과, 위 실험결과와의 비교에서 가장 정확한 예측을 보여준  $C_D$ (Batchelor), DEF(Batchelor)를 이용하여 예측하였다. 다음 Fig. 8은 부피 0.1 ml, 1 ml, 5 ml, 10 ml 거품의 2차원에서의 실험 거품의 형태와 이론적인 거품의 형태를 비교해 보았다. 위 결과를 보면 Batchelor[9]의 저서에서 제시된 이론들은 어느 정도 정확한 예측을 한다고 볼 수 있다. 거품 모양의 예측 정확도는 고점도 1 ml 거품 일 때를 제외하고는 전반적으로 저점도일 때보다 고점도에서 더 큰 것으로 보이며, 항력계수가 물체의 형태에 영향을 받음을 감안하면 고점도에서 움직이는 거품에 대한 형태에 대한 정확도가 더 크며 이는 항력계수와 속도에 대해서도 마찬가지였다. 따라서 거품의 형태에 대한 예측의 정확도가 항력계수, 속도의 예측의 정확도에 영향을 미치는 것으로 보인다.

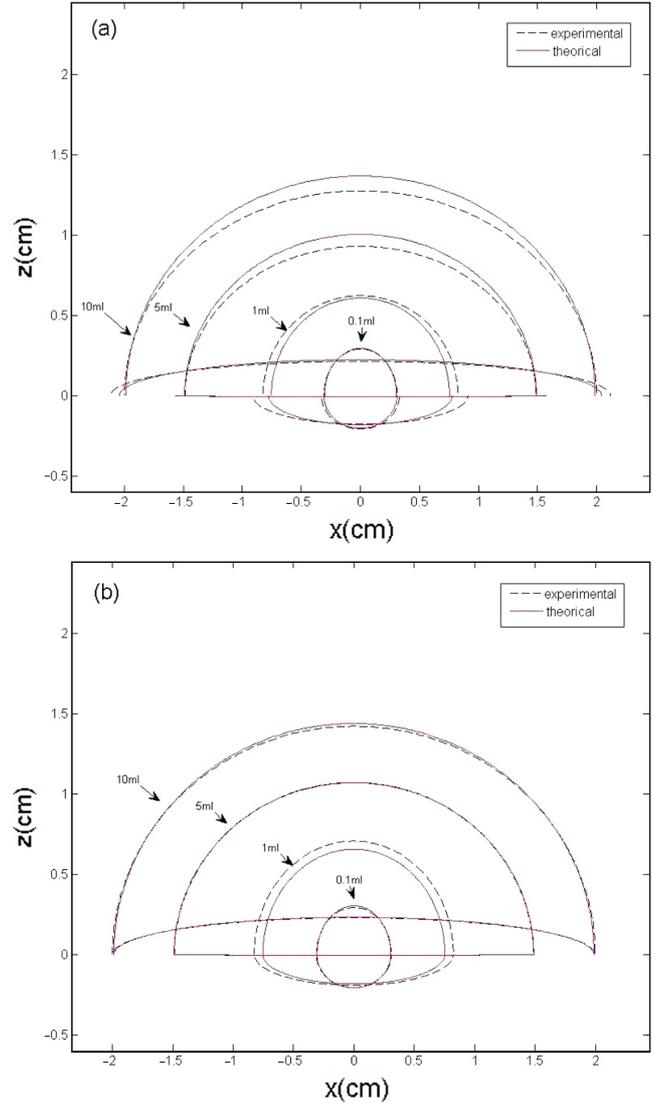


Fig. 8. Comparison of bubble's experimental shape and theoretical (Batchelor's) shape. (a)in 500CS silicone oil, (b)in 1000CS silicone oil.

### 5. 결 론

거품의 에너지 수지식을 이용하여 거품이 가진 에너지를 예측해 볼 수 있었다. 또한 거품의 에너지 수지식을 통해 타원형 및 변형 반구 형태로 예측한 거품의 형태를 예측할 수 있었고, 어느 정도 정확한 결과를 보였다. 또한 변형계수 역시 거품이 어느 정도 변형되어 이동하는지 예측하였고 이러한 예측 결과를 통해 거품의 형태를 2차원, 3차원으로 표현할 수 있었다. 예측 결과 거품의 크기가 작을 경우 거품의 형태는 구형에 가까웠으며, 크기가 커질수록 형태는 타원형으로 찌그러졌고 더 커질 경우 변형 반구 형태를 띄게 되었다.

실험에서 구형의 거품을 관찰하기 위해 점도가 매우 높은 실리콘 오일을 사용하였으며 거품의 형태와 속도를 디지털 카메라와 컴퓨터를 이용해 관측할 수 있었다. 실험 결과 0.1 ml~1 ml 정도의 비교적 작은 거품에서는 구형 혹은 타원형의 형태를 띄었다. 5 ml 이상의 비교적 큰 거품에서부터 큰 변형이 발생하였으며 거의 변형 반구 형태를 띄었다.

실험결과와 이론결과를 비교해본 결과 Batchelor가 제시한 항력계수, 변형계수 모델이 가장 정확한 예측을 나타내는 것으로 나타났다. 이는 Batchelor가 제시한 수식 모델이 거품의 거동에 영향을 줄 수 있는 여러 변수를 고루 반영하고 있기 때문으로 보인다.

### 사용기호

Re	: Reynolds number, $Re = \rho_L D_0 U / \mu_L$
We	: Weber number, $We = \rho_L D_0 U^2 / \sigma$
Bo	: Bond number, $Bo = (\rho_L - \rho_g) g D_0^2 / \sigma$
Mo	: Morton number, $Mo = g \mu_L^4 (\rho_L - \rho_g) / \rho_L^2 \sigma^3$
U	: Velocity of the bubble [cm/s]
$U_t$	: Terminal velocity of the bubble [cm/s]
$C_D$	: Drag coefficient
$C_{D(Stoke)}$	: Drag coefficient proposed by Stoke
$C_{D(Levich)}$	: Drag coefficient proposed by Levich
$C_{D(Batchelor)}$	: Drag coefficient proposed by Batchelor
DEF	: Deformation factor
DEF(Moore)	: Deformation factor proposed by Moore
DEF(Batchelor)	: Deformation factor proposed by Batchelor
$D_0$	: Diameter of the spherical bubble that have same volume as actual bubble [cm]
$R_0$	: Radius of the spherical bubble that have same volume as actual bubble [cm]
a	: bubble's horizontal diameter [cm]
b	: bubble's vertical height, $b = b_1 + b_2$ [cm]
$A_p$	: Actual bubble's cross section, $A_p = \pi a^2$ [cm <sup>2</sup> ]
$A_s$	: Spherical bubble's cross section, $A_s = \pi R_0^2$ [cm <sup>2</sup> ]
$e_1$	: Eccentricity of the semi-spheroid defined as $e_1 = \sqrt{1 - b_1^2/a^2}$
$e_2$	: Eccentricity of the semi-spheroid defined as $e_2 = \sqrt{1 - b_2^2/a^2}$
x	: $x = b_1/R_0$
y	: $y = b_2/R_0$
$\varepsilon$	: Aspect ratio, $\varepsilon = 2a/b$
$\pi$	: Number $\pi$ , $\pi = 3.1416$

g	: Gravity acceleration [cm/s <sup>2</sup> ]
$\sigma$	: Surface tension of the liquid [g/s <sup>2</sup> ]
$\rho_L$	: Density of the liquid [g/cm <sup>3</sup> ]
$\rho_g$	: Density of the gas [g/cm <sup>3</sup> ]
$\mu_L$	: Viscosity of the liquid [g/cm/s]

### 참고문헌

- Hassan, N. M. S., Khan, M. M. K., Rasul, M. G. and Rackemann, D. W., "An Experimental Study of Bubble Rise Characteristics in non - Newtonian (Power-Law) Fluids;" *16th Australasian Fluid Mechanics Conference*(2007).
- Mirzaee, E., Rafiee, S., Keyhani, A., Jom-Eh, Z. E., Kheiralipour, K. and Tabatabaefar, A., "Modelling of Apricot (*Prunus armeniaca* L.) Terminal Velocity in Water;" *J. Agric. Technol.*, **4**(2), 29-35(2008).
- Sikorskia, D., Tabuteau, H. and Bruyna, J. R. D., "Motion and Shape of Bubbles Rising Through A Yield-stress Fluid;" *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **159**, 10-16(2009).
- Suñol, F. and González-Cinca, R., "Rise, Bouncing and Coalescence of Bubbles Impacting at a Free Surface;" *Colloids Surf., A*, In press(2010).
- Manor, O. and Chan, D. Y. C., "Terminal Velocity and Mobile Surface Species in Rising Microbubbles;" *Langmuir latter*, **25**(16), 8899-8902(2009).
- Talaia, M. A. R., "Terminal Velocity of a Bubble Rise in a Liquid Column;" *WASET*, **22**, 264-268(2007).
- Bozzano, G. and Dente, M., "Shape and Terminal Velocity of Single Bubble Motion: a Novel Approach;" *Comput. Chem. Eng.*, **25**(1), 5712576(2001).
- Bozzano, G. and Dente, M., "Single Bubble and Drop Motion Modeling;" *Chem. Eng. Trans.*, **17**(1), 567-572(2009).
- Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid-Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge(1970).
- Moore, D. W., "Teh Velocity of Rise of Distorted Gas Bubbles in a Liquid of Small Viscosity;" *J. Fluid. Mech.*, **23**, 749-766(1965).
- Wu, M. and Gharib, M., "Experimental Studies on the Shape and Path of Small Air Bubbles Rising in Clean Water;" *Phys. Fluids. A*, **14**(7), (2002).