

일정한 응고속도를 갖는 2성분 응고에서 조성 대류의 특성 및 안정성

황인국[†]

수원대학교 공과대학 화학공학과
445-743 경기도 화성시 봉담읍 와우안길 17
(2013년 10월 31일 접수, 2013년 12월 23일 수정본 접수, 2013년 12월 29일 채택)

Characteristics and Stability of Compositional Convection in Binary Solidification with a Constant Solidification Velocity

In Gook Hwang[†]

Department of Chemical Engineering, The University of Suwon, 17 Wauan-gil, Bongdam-eup, Hwaseong-si, Gyeonggi-do 445-743, Korea
(Received 31 October 2013; Received in revised form 23 December 2013; accepted 29 December 2013)

요 약

2성분 응고계에서 다공성 mush 층에서의 조성 대류는 생성되는 제품의 질에 영향을 준다. 본 연구에서는 일정한 속도로 응고되는 mush 층을 고려하였다. 선형 안정성 이론을 사용하여 mush 층에 대한 교란방정식을 유도하였고, 기본상태 온도장과 mush 층에서 기공률의 분포를 수치해법으로 조사하였다. 과열량이 클 때 mush 층의 두께는 열경계층의 두께에 비해 상대적으로 작았다. 과열량이 감소함에 따라 mush 층의 두께를 기준으로 한 Rayleigh 수는 증가하였고, mush 층은 조성 대류에 대해 안정해졌다. mush 층의 윗면에 등온조건을 적용한 경우보다 온도 및 열속의 연속조건을 액체-mush 계면에 적용한 경우에 임계 Rayleigh 수가 더 작게 얻어졌다.

Abstract – In binary solidification compositional convection in a porous mushy layer influences the quality of the final products. We consider the mushy layer solidifying from below with a constant solidification velocity. The disturbance equations for the mushy layer are derived using linear stability theory. The basic-state temperature fields and the distribution of the porosity in the mushy layer are investigated numerically. When the superheat is large, the thickness of the mushy layer is relatively small compared to the thickness of the thermal boundary layer. With decreasing the superheat the critical Rayleigh number based on the thickness of the mushy layer increases and the mushy layer becomes stable to the compositional convection. The critical Rayleigh number obtained from the continuity conditions of temperature and heat flux at the mush-liquid interface is smaller than that from the isothermal condition at the upper boundary of the mushy layer.

Key words: Binary Solidification, Compositional Convection, Mushy Layer, Rayleigh Number, Linear Stability

1. 서 론

금속 주조(casting of metals) 공정이나 결정화 공정에서 유체의 유동은 중요한 역할을 한다[1]. 2성분 용융액 또는 합금의 응고 과정에서 고체-액체의 두 가지 상으로 이루어진 mush 층이 형성된다. 방향성 응고(directional solidification)에서 생성되는 고체로부터 한 성분이 배제되거나 혼입될 때 조성적 과냉각(constitutional supercooling)에 의해 mush 층이 생성된다. mush 층에서는 농도차에 의한 밀도구배가 나타나고 중력장 하에서 부력에 의해 대류가 발생한다. 이를 조성

대류(compositional convection)라고 하며 plume 형태로 발생한다[2-4]. mush 층에서 발생하는 대류는 중력방향으로 배열된 구멍(channel or chimney)을 형성시키며, 응고된 고체에서는 국지적으로 다른 화학적 조성을 갖는 반점(freckle)이 나타난다. 따라서 mush 층에서의 대류는 응고 공정에서 생성되는 고체제품에 불균일한 재질을 갖게 하여 질적으로 좋지 않은 영향을 주게 된다[5]. 결정성장 시에 결정의 표면 roughening과 관련된 인자로는 Jackson alpha factor가 있으며, Jackson alpha factor가 2보다 작을 때 금속응고시에 수지상결정(dendrite)이 자란다[6]. 수지상결정과 진한 용질이 있는 액체로 이루어진 mush 층은 그 위의 액체층보다 더 밀도가 작고 가볍기 때문에 불안정한 상태에 있게 된다. 액체층에 있는 작은 농도 경계층에서 먼저 대류가 발생하지만 mush 층에서 발생하는 대류와의 연관성은 거의 없는 것으로 연구되었다[7,8].

본 논문에서는 일정한 속도로 mush 층이 성장하는 정상상태의 응

[†]To whom correspondence should be addressed.

E-mail: ighwang@suwon.ac.kr

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

고에 대해 이론적으로 조사하였다. 선형 안정성 이론으로 mush 층에서 교란방정식을 유도하였고 수치해법을 사용하여 기본 온도(농도)분포와 안정성 곡선을 구하였다. Amberg와 Homsy[5], Anderson과 Worster[9], Okhuysen과 Riahi[10]의 모델을 참고하여 mush 층의 위 경계면에 비투과(impermeable) 조건을 적용하였다. 본 연구에서는 기존 연구와 달리 액체층을 포함한 모델을 고려하여 mush-액체 계면에 온도 및 열속의 연속조건을 적용하였고, 이 결과를 등온조건을 적용한 결과와 비교하였다. 열확산(thermal-diffusion) 길이척도 κ/V_0 를 기준으로 정의된 Rayleigh 수 R_m 를 구하여 mush 층의 두께 H를 기준으로 정의된 Rayleigh 수 R_β 로 변환하였다. 과열량 θ_∞ 가 mush 층의 대류발생 임계조건에 주는 영향을 조사하였다.

2. 지배방정식

본 연구에서는 일정한 속도 V_0 로 응고되고 있는 응고계를 고려하였다. 정상상태 응고계의 지배방정식은 Worster[8], Amberg와 Homsy[5], Anderson과 Worster[9], Okhuysen과 Riahi[10] 등의 문헌에 잘 설명되어 있다. 본 연구에서는 mush 층의 윗면을 경직된(rigid) 비투과(impermeable) 계면으로 가정한다. Fig. 1에서 2성분 합금이 윗방향으로 응고되고 있으며, 수직상결정과 액체로 이루어진 mush 층이 고체층 사이에 위치한다. 액체층에서 먼 지점의 온도는 T_∞ 이며, 액체층의 농도는 C_∞ 로 균일하다고 가정한다. 좌표는 고체-mush 계면에 고정되어 V_0 의 속도로 움직이고 있다. mush 층의 밑면은 무차원 좌표 $z=0$ 이며, 윗면은 $z=h$ 이다. mush 층의 두께는 H로 일정하며, h는 길이척도 κ/V_0 로 무차원화된 mush 층의 두께이다. mush 층의 윗면에서 농도는 C_∞ 이며, mush-고체 계면인 밑면에서 공융(eutectic) 농도 C_E 이다. 윗면의 온도는 $T_L(C_\infty)$ 이며, 밑면의 온도는 공융온도 T_E 를 갖는다. T_L 은 액상선(liquidus) 온도이며 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$T = T_L(C_\infty) - \Gamma(C_\infty - C) \tag{1}$$

여기서 Γ 는 액상선 기울기이며 상수로 가정된다.

일정한 속도로 응고되고 있는 mush 층에서 무차원 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{u}_m \cdot \nabla\right)\theta_m = \nabla^2\theta_m - \text{St}\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z}\right)\chi \tag{2}$$

$$\chi\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z}\right)c_m + \mathbf{u}_m \cdot \nabla c_m = (\gamma - c_m)\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z}\right)\chi \tag{3}$$

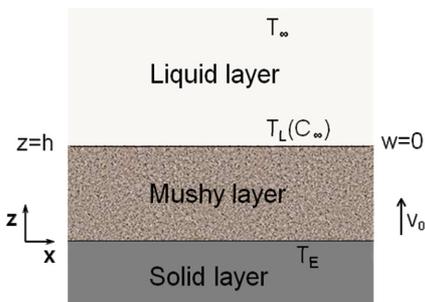


Fig. 1. Schematic diagram of solidification system with constant solidification velocity V_0 . The impermeable condition $w=0$ is assumed at the mush-liquid interface $z=h$.

$$\mathbf{u}_m = -\nabla p_m + R_m \theta_m \mathbf{e}_k \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_m = 0 \tag{5}$$

위의 식에서 \mathbf{u}_m 은 mush 층에서 속도벡터, τ 는 시간, p_m 는 압력, \mathbf{e}_k 는 z방향 단위벡터를 나타낸다. 하첨자 'm'은 mush 층에서의 변수 또는 무차원 수를 나타낸다. 길이는 척도 κ/V_0 로 무차원화되었고, 시간은 κ/V_0^2 , 속도는 V_0 , 압력은 $\kappa\mu/\Pi\sigma$ 로 무차원화되었다. κ 는 열확산도이며, μ 는 점도이다. Π 는 mush 층의 투과도이며 상수로 가정한다. χ 는 국지적인 기공률(porosity) 또는 액체분율을 나타낸다.

무차원 온도와 농도는 다음과 같이 정의된다.

$$\theta_m = \frac{T - T_L(C_\infty)}{\Delta T}, \quad c_m = \frac{C - C_\infty}{\Delta C} \tag{6}$$

온도차는 $\Delta T = \Gamma\Delta C = T_L(C_\infty) - T_E$ 이며, 농도차는 $\Delta C = C_\infty - C_E$ 이다. mush 층에서는 $\theta_m = c_m$ 의 관계가 성립한다. 무차원 매개변수 $\text{St} (= \bar{L}/(C_p\Delta T))$ 는 Stefan 수이며, $\gamma = (C_s - C_\infty)/\Delta C$ 는 농도비(concentration ratio)이다. \bar{L} 는 용융잠열을 나타내고, C_p 는 비열, C_s 는 고체에서 용질의 농도를 나타낸다. R_m 은 mush 층에서 Rayleigh 수이며 다음과 같이 정의된다.

$$R_m = \frac{g\beta_m\Delta C\Pi}{V_0\nu} \tag{7}$$

$\beta_m (= \beta - \alpha\Gamma)$ 은 유효팽창계수, ν 는 점도, g 는 중력가속도를 나타낸다. α 는 열팽창계수, β 는 용질팽창계수이다.

3. 기본상태

Worster[8]는 정상상태 응고계에서 액체층과 mush 층의 기본상태 온도 및 농도분포를 해석적으로 구하였고, Okhuysen과 Riahi[10,11], 그리고 Bhatta 등[12]은 액체층의 Lewis 수(=용질확산도/열확산도)가 0인 극한에서, 즉, 액체층에서 용질확산을 무시하는 경우에 기본상태의 해석적인 해를 다루었다. 본 연구에서는 Lewis 수가 0일 때, Worster[8]와 Okhuysen과 Riahi[10,11]가 고려한 기본상태를 가정하며, 그들의 연구에서와는 달리 수치해법으로 해를 구한다. 대류가 없는 상태의 기본 온도분포는 액체층과 mush 층의 전도상태를 고려한다. 기본상태에서 지배방정식은 다음과 같이 얻어진다.

(액체층)

$$\frac{d^2\theta_0}{dz^2} + \frac{d\theta_0}{dz} = 0 \quad \text{for } z > h \tag{8}$$

(mush 층)

$$\frac{d^2\theta_{m0}}{dz^2} + \frac{d\theta_{m0}}{dz} = -\text{St}\frac{d\chi_0}{dz} \quad \text{for } 0 < z < h \tag{9a}$$

$$\chi_0\frac{d\theta_{m0}}{dz} = (\gamma - \theta_{m0})\frac{d\chi_0}{dz} \quad \text{for } 0 < z < h \tag{9b}$$

하첨자 '0'과 'm0'는 액체층과 mush 층에서 기본상태를 나타낸다. 액체층에서는 용질확산이 열확산보다 매우 작은 상태를 가정하여 농도식을 고려하지 않는다. 즉, 액체층의 농도는 균일한 것으로 가정하여 C_∞ 이다. mush 층에서 기공률은 식 (9)로부터 mush-액체 계면 ($z=h$)에서 $\chi_0=0$ 의 조건을 적용하여 $\chi_0 = \gamma/(\gamma - \theta_{m0})$ 로 얻어진다.

기본상태에서 적용하는 경계조건은 다음과 같다.

$$\theta_0 = \theta_\infty \quad \text{for } z \rightarrow \infty \quad (10)$$

$$\theta_0 = \theta_{m0} = 0, \quad \frac{d\theta_0}{dz} = \frac{d\theta_{m0}}{dz} \quad \text{at } z=h \quad (11a,b)$$

$$\theta_{m0} = -1 \quad \text{at } z=0 \quad (12)$$

$\theta_\infty (= (T_\infty - T_L(C_\infty)) / \Delta T)$ 는 과열량(superheat) 또는 액체-mush 계면에서 먼 지점의 온도를 나타낸다. $z=0$ 에서 $\theta_{m0} = -1$ 조건은 mush-고체 계면에서 농도가 C_E 임을 나타낸다. 본 연구에서는 $St, \gamma, \theta_\infty$ 을 주고 수치해법을 사용하여 h 를 결정하고 mush 층과 액체층에서 기본상태의 온도(농도)분포를 구한다.

4. 선형안정성 해석

교란상태에서 온도, 속도 등의 물리량을 기본량과 무한소의 교란량의 합으로 나타내는 선형 안정성 이론을 적용한다. 액체층에서는 유동을 고려하지 않고 열전도상태를 가정한다. 염화암모늄 수용액의 응고실험[7]에서 액체층의 성분적 대류는 기본온도에 거의 영향을 주지 않는 것으로 조사되었다. 액체층에서 선형화된 교란식은 다음과 같다.

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z}\right)\theta_1 = \nabla^2 \theta_1 \quad (13)$$

mush 층에서의 지배방정식으로부터 선형화된 교란식이 다음과 같이 얻어진다.

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z}\right)\theta_{m1} + w_{m1} \frac{\partial \theta_{m0}}{\partial z} = \nabla^2 \theta_{m1} - St \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z}\right)\chi_1 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \chi_1 \frac{\partial \theta_{m0}}{\partial z} + \chi_0 \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z}\right)\theta_{m1} + w_{m1} \frac{\partial \theta_{m0}}{\partial z} \\ = (\gamma - \theta_{m0}) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z}\right)\chi_1 - \theta_{m1} \frac{\partial \chi_0}{\partial z} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\nabla^2 w_{m1} = -R_m \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\theta_{m1} \quad (16)$$

w_{m1} 은 mush 층에서 수직속도교란을 나타내며, 하첨자 '1'은 교란을 나타낸다. x 와 y 는 수평좌표이다. 교란량들을 다음과 같이 정규형태(normal mode)로 나타내어 위의 교란식들에 대입한다.

$$[w_{m1}, \theta_{m1}, \theta_1] = [w'(z), \theta_m'(z), \theta'(z), \chi'] \exp[i(a_x x + a_y y) + \sigma \tau] \quad (17)$$

위의 식은 교란량을 수평파수 $a=(a_x^2 + a_y^2)^{1/2}$ 에 대한 2차원 주기파로 나타낸 것이다. i 는 허수를 나타내며, σ 는 교란의 성장률을 나타낸다. a_x 는 x-방향 수평파수, a_y 는 y-방향 수평파수이다.

액체층에서 교란 방정식(disturbance equation)은 다음과 같다.

$$(D^2 + D - \sigma - a^2)\theta = 0 \quad (18)$$

D 는 수직미분 d/dz 을 나타낸다. 교란량의 진폭을 나타내는 '을 생략하였으며, θ, w, χ 는 교란량들을 나타낸다. mush 층에서의 교란방정식은 다음과 같다.

$$(D^2 + D - \sigma - a^2)\theta = wD\theta_{m0} - St(D - \sigma)\chi \quad (19)$$

$$\chi D\theta_{m0} + \chi_0(D - \sigma)\theta + (\theta_{m0} - \gamma)(D - \sigma)\chi + \theta D\chi_0 = wD\theta_{m0} \quad (20)$$

$$(D^2 - a^2)w = a^2 R_m \theta \quad (21)$$

위의 액체층과 mush 층에서 교란 방정식에 적용하는 경계조건은 다음과 같다.

$$\theta = 0 \quad \text{at } z \rightarrow \infty \quad (22a,b)$$

$$\theta_m = \theta, \quad D\theta_m = D\theta, \quad w = 0, \quad \chi = 0 \quad \text{at } z=h \quad (23a-d)$$

$$\theta = 0, \quad w = 0 \quad \text{at } z=0 \quad (24a,b)$$

식 (23a)와 (23b)는 온도 및 열속에 대한 연속조건을 고려한 것이다. 식 (23c)는 경직된 비투과(rigid and impermeable) 조건을 적용한 것이다.

mush 층의 위에 있는 액체층을 포함하지 않는 모델에서는 mush-액체 계면에 적용하는 식 (23a-d) 대신에 다음과 같은 조건을 적용한다.

$$\theta = 0, \quad w = 0, \quad \chi = 0 \quad \text{at } z=h \quad (25a-c)$$

이 조건들은 Amberg와 Homsy[5], Anderson과 Worster[9], Okhuysen과 Riahi[10]의 모델에서 사용한 것과 같다. 식 (25a)은 mush 층의 윗면에 등온(isothermal) 조건을 적용한 것이다. Okhuysen과 Riahi[10]은 식 (25a-c)의 조건과 mush 층에서 투과도 변화를 고려한 식을 사용하여 $St=1, \gamma=1$ 에 대해 선형안정성 해석으로 θ_∞ 의 변화에 대한 임계 Rayleigh 수를 구하였고, 비선형 해석을 수행하였다. Bhatta 등[12]은 식 (25a-c)의 조건으로 $St=3.2, \gamma=9$ 에 대해 선형안정성 해석으로 투과도 변화가 있는 경우와 투과도가 일정한 경우에 대해 안정성곡선을 구하였다.

본 연구에서는 $St=5, \gamma=20$ 인 경우 mush 층의 기공률이 크므로, 투과도가 일정한 mush 층을 가정하였다. 액체층에서 열전도를 고려한 교란방정식을 포함하여 식 (23a)와 (23b)의 온도 및 열속의 연속조건을 적용한 결과와 mush 층의 교란방정식에 대해서 식 (25a)의 등온 조건을 적용한 결과를 구해서 비교하였다. 교란 방정식을 풀기 위해 수치해법으로 Runge-Kutta 4차의 방법을 사용했다. 경계치 문제를 초기치 문제로 바꾸어 'shooting' 방법을 이용하였다. $St, \gamma, \theta_\infty, a$ 를 주고 고유치의 크기를 고정하기 위해 $z=h$ 에서 $Dw=1$ 로 놓고 $R_m, \theta, D\theta$ 를 가정한다. $z=0$ 과 $z \rightarrow \infty$ 에서 경계조건을 만족시킬 때까지 Newton-Raphson 방법으로 $R_m, \theta, D\theta$ 를 다시 가정하여 계산한다[13-15].

5. 결과 및 토론

mush 층에서의 대류발생에 대해서 안정성 교환 원리(exchange of stability)가 성립한다고 가정하고 고정 불안정성(stationary instability)을 고려한다. 즉, 교란 방정식에서 $\sigma=0$ 으로 놓고 한계상태(marginal state)의 고유치를 구한다. 매개변수의 값은 $St=5, \gamma=20$ 로 놓았다. 이 값들은 염화암모늄 수용액 응고계에 적합한 값들이다[8,13].

Fig. 2에 과열량 θ_∞ 에 대한 mush 층의 두께 h 를 나타내었다. θ_∞ 는 기본온도 분포에 영향을 주는 인자이다. θ_∞ 가 증가함에 따라 h 가 감소하는 것으로 얻어졌다. θ_∞ 는 먼 지점에 있는 용융액의 온도로 볼 수 있으며, θ_∞ 가 작을 때, 즉, 먼 지점에서의 온도와 공융온도 차이가 작을 때 mush 층의 두께가 크게 발달함을 알 수 있다. θ_∞ 가 큰 경우에는 액체층에 열계층이 크게 발달하며 mush 층의 두께는 열계층의 두께에 비해 상대적으로 작게 된다.

Fig. 3에 $\theta_\infty=0.1$ 과 1에 대해 mush 층과 액체층에서 온도분포를 나타내었다. $\theta_\infty=0.1$ 인 경우에 mush 층의 두께는 $h=2.087$ 이며 온도

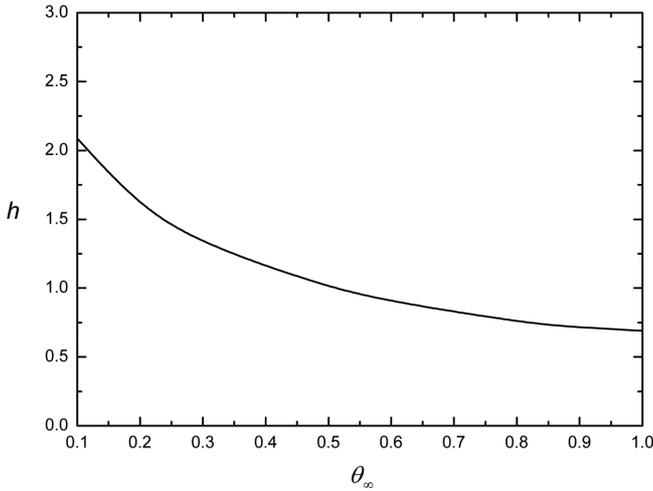


Fig. 2. Dimensionless thickness of mushy layer h as a function of θ_∞ .

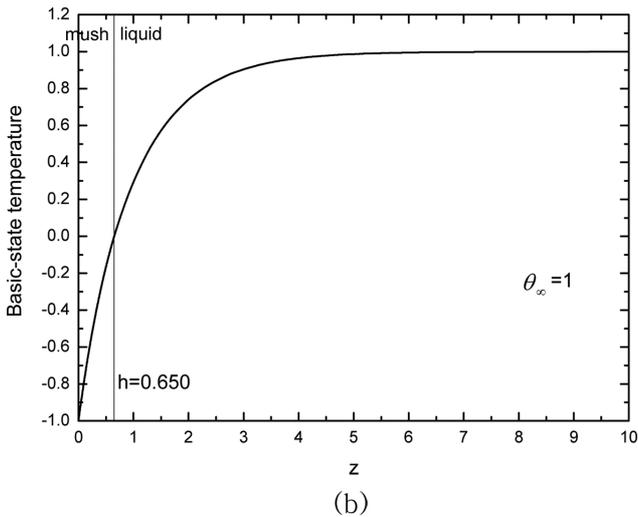
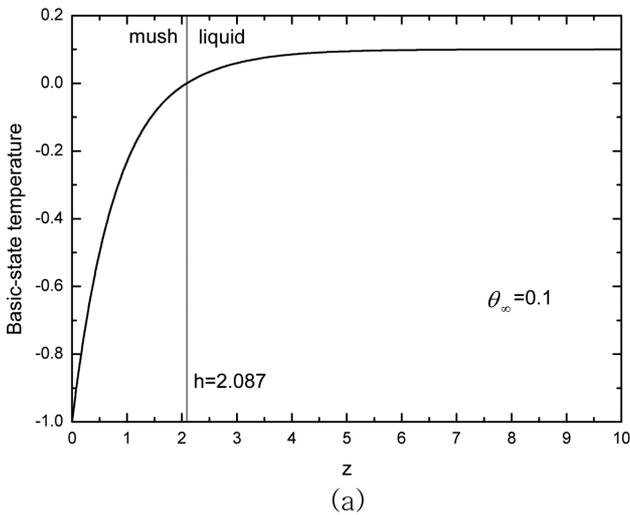


Fig. 3. Basic-state temperature profiles for (a) $\theta_\infty=0.1$ and (b) $\theta_\infty=1$.

(농도)분포는 mush 층 내에서 곡선 형태를 보여준다. $\theta_\infty=1$ 인 경우에는 mush 층의 두께는 $h=0.650$ 이며, 온도분포는 선형형태를 보여준다. mush 층에서 기공률 χ 를 Fig. 4에 나타내었다. $\theta_\infty=0.1$ 인 경우에

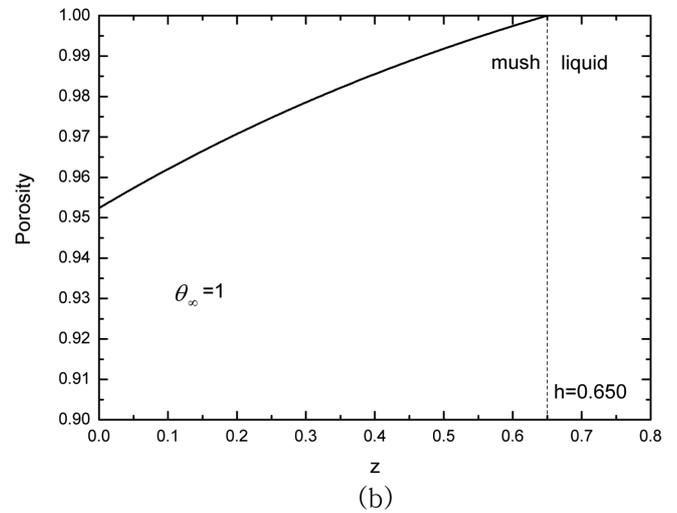
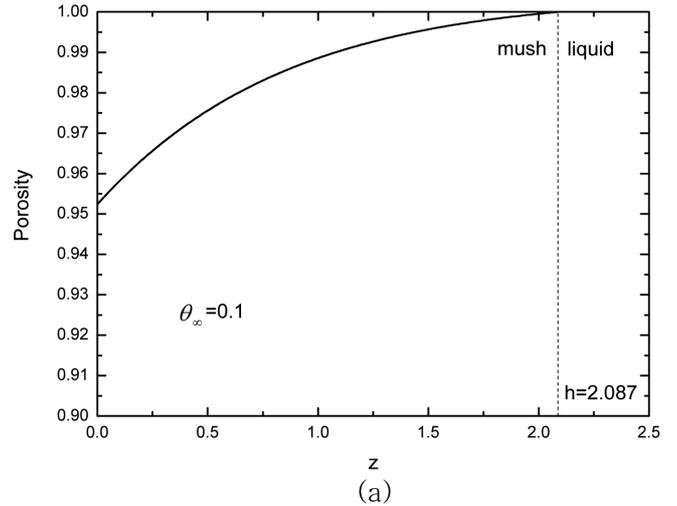


Fig. 4. Porosity profiles in mushy layer for (a) $\theta_\infty=0.1$ and (b) $\theta_\infty=1$.

기공률의 분포는 온도분포와 같이 곡선형태이며, 평균기공률은 0.985로서 mush 층의 대부분에서 액체분율이 크다. $\theta_\infty=1$ 인 경우에는 더 직선에 가까운 기공률의 분포를 보이며, 평균기공률은 0.979로서 $\theta_\infty=0.1$ 인 경우의 값보다 약간 감소하였다. mush 층 내에서 평균기공률은 θ_∞ 의 영향을 크게 받지 않음을 알 수 있다.

Fig. 5에 여러 개의 θ_∞ 에 대해 한계 안정성 곡선(marginal stability curve)을 나타내었다. 곡선의 위 영역은 계가 불안정한 상태이며, 아래 영역은 안정한 상태를 나타낸다. mush 층에서 대류의 발생을 결정하는 임계(critical) Rayleigh 수 $R_{m,c}$ 는 주어진 파수 a 에 대한 최소의 값으로 구해진다. θ_∞ 가 증가하면 $R_{m,c}$ 가 증가한다. Fig. 5(a)는 mush 층의 윗면($z=h$)에 식 (23a)와 (23b)의 온도 및 열속의 연속조건을 적용한 결과를 나타내며, Fig. 5(b)는 식 (25a)의 등온조건을 적용한 결과를 나타낸다. 액체층의 열전도상태를 고려한 온도 및 열속의 연속조건이 임계 Rayleigh 수를 더 작게 하여 조성대류가 더 불안정해짐을 알 수 있다.

Rayleigh 수 R_m 은 열확산 길이척도 κ/V_0 를 기준으로 정의되었다. θ_∞ 가 증가하면 mush 층의 깊이는 열확산 길이척도 κ/V_0 에 비해 더 작게 된다. 물리적으로 계의 안정성을 설명하기 위해서는 mush 층의 두께 H 를 길이척도로 하여 정의된 Rayleigh 수 R_H 가 필요하다. R_H 는

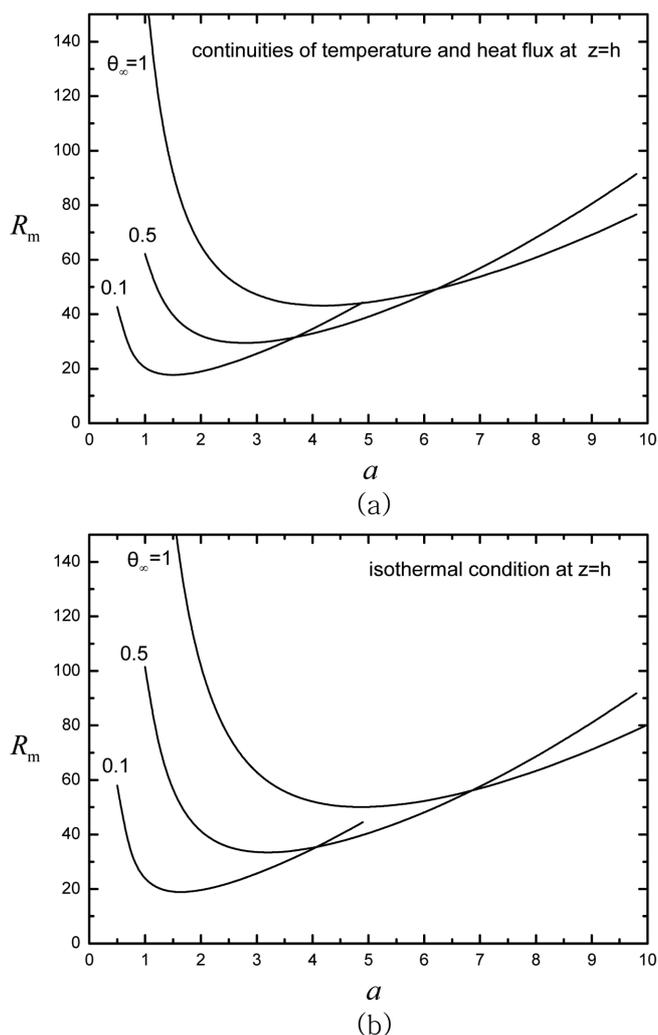


Fig. 5. Marginal stability curves for various values of superheat (or far field temperature of melt) θ_∞ . (a) continuity conditions of temperature and heat flux ($\theta_m=0$, $D\theta_\infty=D\theta$) at $z=h$, and (b) isothermal condition ($\theta=0$) at $z=h$.

Table 1. Thickness of mushy layer h and critical values for various values of θ_∞ when $\theta=0$ at $z=h$

θ_∞	0.1	0.5	1
h	2.087	1.004	0.650
a_c	1.63	3.18	4.87
$R_{m,c}$	18.8	33.4	50.1
$a_{h,c}$	3.40	3.19	3.17
$R_{h,c}$	39.3	33.5	32.5

$R_m h (=g\beta_m \Delta C \Pi H / k\nu)$ 로 얻어지며 대류가 발생하는 mush 층을 다공성 매질로 볼 때, 수평 다공성 유체층에서 정의되는 Rayleigh 수와 같은 인자가 된다. Table 1에는 mush 층의 윗면($z=h$)에 등온조건 $\theta=0$ 을 적용한 경우에 θ_∞ 에 따른 h 와 임계 Rayleigh 수 $R_{m,c}$ 와 $R_{h,c}$ ($=R_{m,c} h$), 임계파수 a_c 와 $a_{h,c}$ ($=a_c h$)를 나타내었다. $\theta_\infty=0.1$ 인 경우보다 $\theta_\infty=1$ 인 경우가 더 $R_{h,c}$ 가 작으므로, θ_∞ 가 증가하면 mush 층의 대류 발생에 있어 계가 불안정한 상태가 된다. 이러한 결과는 액체층과 mush 층에서의 불안정성을 모두 고려한 Worster[8]의 연구와 같은 추세임을 알 수 있다. Amberg와 Homsy[5]는 h 가 작고 γ 가 큰 극한의 경우를

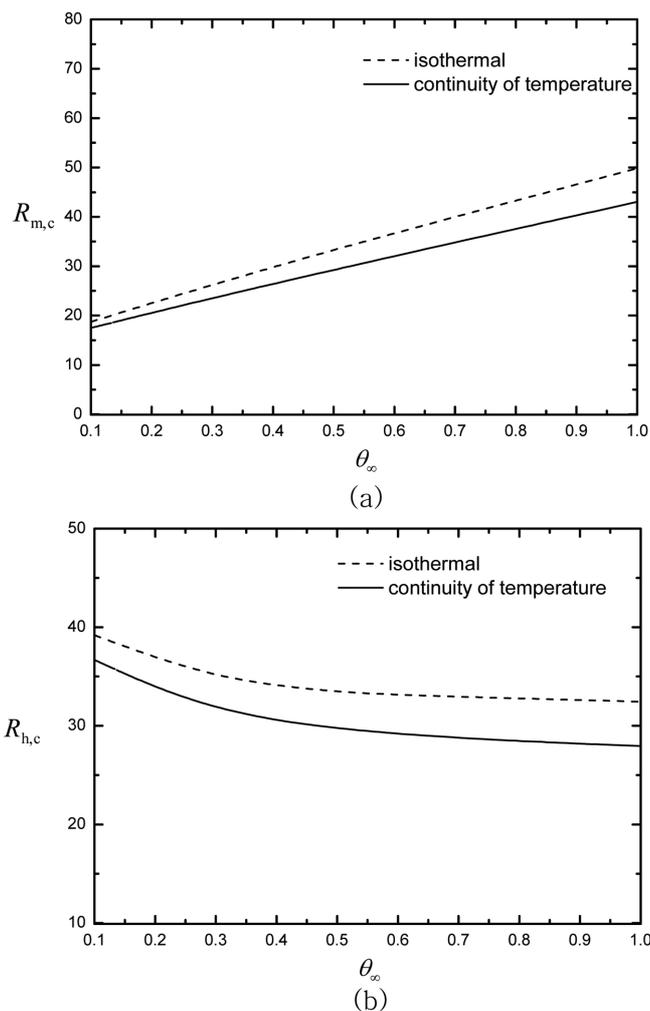


Fig. 6. Influence of superheat θ_∞ on critical Rayleigh number (a) $R_{m,c}$ and (b) $R_{h,c}$. $R_{m,c}$ is based on the length scale κ/V_0 , and $R_{h,c}$ is based on the thickness of the mushy layer H . The solid curve represents the continuity conditions of temperature and heat flux ($\theta_m=0$, $D\theta_\infty=D\theta$) at $z=h$, and the dashed curve represents the isothermal condition ($\theta=0$) at $z=h$.

가정하여 mush 층에서 온도를 선형으로(온도구배를 상수)로 놓고 부력에 의한 성분적 대류에 대한 비선형 해석을 수행하였다. Amberg와 Homsy[5]의 결과에서 선형 안정성에 대한 임계 Rayleigh 수는 $R_{h,c}=(2\pi+\pi(K_1-2St)/2\gamma)^2$ 로 얻어졌다. K_1 은 투과도의 변화와 관련된 상수인데 투과도가 일정한 경우에 $K_1=0$ 이 되고, 매개변수 값 $St=5$, $\gamma=20$ 에 대한 Amberg와 Homsy[5]의 $R_{h,c}$ 는 30.2가 된다. 본 연구 결과는 Table 1에서 $\theta_\infty=1$ 일 때 $R_{h,c}=32.5$ 이다. θ_∞ 가 크면 본 연구의 임계 Rayleigh 수 $R_{h,c}$ 는 Amberg와 Homsy[5]의 결과와 가까워짐을 알 수 있다.

Fig. 6에 과열량 θ_∞ 가 $R_{m,c}$ 와 $R_{h,c}$ 에 주는 영향을 나타내었다. θ_∞ 가 증가하면 $R_{m,c}$ 는 증가하나 $R_{h,c}$ 는 감소한다. θ_∞ 가 클 때 mush 층 내의 농도분포가 선형에 가깝고, θ_∞ 가 작을 때는 곡선의 형태가 되어 밀도가 변하는 유효 깊이가 작다. 따라서 θ_∞ 가 작을 때 mush 층은 더 안정하다. Fig. 6에서 실선은 mush 층의 윗면($z=h$)에 액체층의 열전도를 고려한 온도 및 열속의 연속조건을 적용한 결과이며, 파선은 등온조건을 적용한 결과이다. $\theta_\infty=1$ 일 때에 액체층의 열전도를 고려

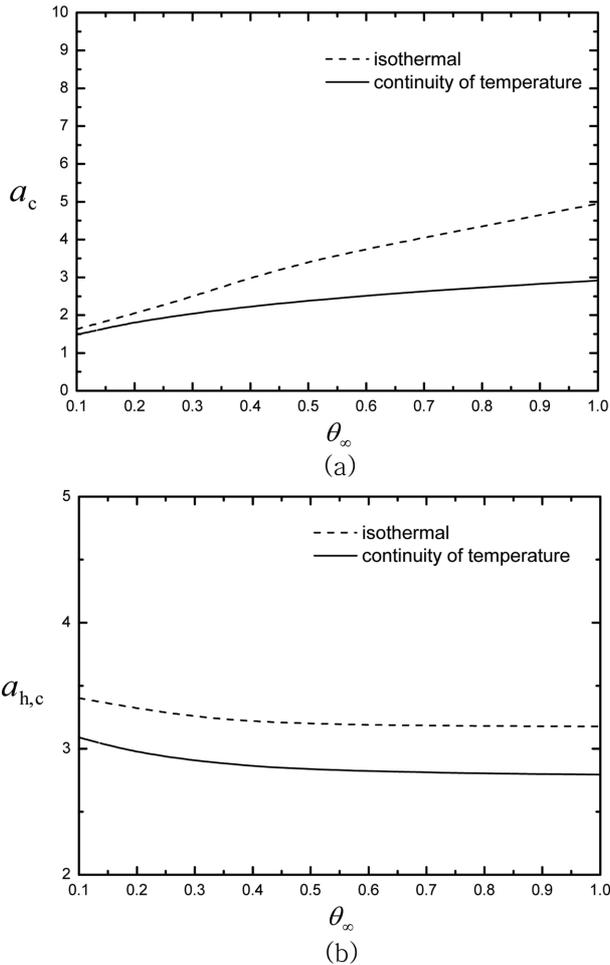


Fig. 7. Influence of superheat θ_∞ on critical wave number (a) a_c and (b) $a_{h,c}$. a_c is based on the length scale κ/V_0 , and $a_{h,c}$ is based on the thickness of mushy layer H . The solid curve represents the continuity conditions of temperature and heat flux ($\theta_m=0, D\theta_\infty=D\theta$) at $z=h$, and the dashed curve represents the isothermal condition ($\theta=0$) at $z=h$.

한 경우(실선)가 등온조건(파선)보다 임계 Rayleigh 수 $R_{h,c}$ 값을 약 13.7% 더 작게 주었다. Fig. 7에 과열량 θ_∞ 가 a_c 와 $a_{h,c}$ 에 주는 영향을 나타내었다. θ_∞ 가 증가하면 a_c 는 증가하지만 $a_{h,c}$ 는 약간 감소하며 그 변화가 매우 작다. mush 층의 두께 H 를 기준으로 한 $a_{h,c}$ 의 θ_∞ 에 대한 변화가 작다는 것은 mush 층에서 생기는 대류 셀의 크기가 mush 층의 두께에 따라 변한다는 것을 알려준다. $\theta_\infty=1$ 일 때에 $z=h$ 에 온도 및 열속의 연속조건을 적용한 경우(실선)가 등온조건(파선)을 적용한 경우보다 임계 파수 a_c 값을 약 14.5% 더 작게 주었다.

6. 결 론

일정한 속도로 응고되는 mush 층에서 발생하는 대류에 대해 mush 층의 윗면에 비투과 조건을 적용하였고, 수치해법으로 기본상태와 대류 불안정성의 임계조건을 구했다. 과열량 θ_∞ 가 증가하면 mush 층의 두께는 감소하며, 농도 및 온도분포는 mush 층 내에서 선형에 가까워진다. mush 층의 평균 기공률은 θ_∞ 의 영향을 크게 받지 않는다. mush 층의 윗면에 등온조건을 적용하는 경우보다 액체층의 열전도

를 고려한 온도 및 열속의 연속조건을 적용한 경우에 임계 Rayleigh 수와 임계파수가 더 작게 얻어졌다. 온도경계층의 유효깊이를 나타내는 κ/V_0 를 길이척도로 하여 정의된 임계 Rayleigh 수 $R_{m,c}$ 과 mush 층의 두께 H 를 기준으로 정의된 Rayleigh 수 $R_{h,c}$ 를 구하였다. θ_∞ 가 증가하면 $R_{m,c}$ 는 증가하나 $R_{h,c}$ 는 감소한다. H 를 기준으로 정의된 $R_{h,c}$ 가 mush 층에서의 대류 안정성을 설명하는 데에 적합하며, θ_∞ 가 증가하면 mush 층의 대류 발생에 있어 계가 불안정한 상태가 된다. H 를 기준으로 정의된 임계파수 $a_{h,c}$ 는 θ_∞ 가 증가하면 약간 감소하며, 대류 셀의 크기는 mush 층의 두께에 따라 변한다.

References

- Glicksman, M. E., Coriell, S. R. and McFadden, G. B., "Interaction of Flows with the Crystal-Melt Interface," *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **18**, 307-335(1986).
- Sample, A. K. and Hellawell, A., "The Mechanisms of Formation and Prevention of Channel Segregation during Alloy Solidification," *Metall. Trans.*, **A15**, 2163-2173(1988).
- Worster, M. G., "Natural Convection in a Mushy Layer," *J. Fluid Mech.*, **224**, 335-359(1991).
- Davis, S. H., "Hydrodynamic Interactions in Directional Solidification," *J. Fluid Mech.*, **212**, 241-262(1990).
- Amberg, G. and Homsy, G. M., "Nonlinear Analysis of Buoyant Convection in Binary Solidification with Application to Channel Formation," *J. Fluid Mech.*, **252**, 79-98(1993).
- Jackson A. J., "Constitutional Supercooling Surface Roughening," *J. Cryst. Growth*, **264**, 519-529(2004).
- Tait, S. and Jaupart, C., "Compositional Convection in a Reactive Crystalline Mush and the Evolution of Porosity," *J. Geophys. Res.*, **97**, 6735-6756(1992).
- Worster, M. G., "Instabilities of the Liquid and Mushy Regions during Solidification of Alloys," *J. Fluid Mech.*, **237**, 649-669(1992).
- Anderson, D. M. and Worster, M. G., "Weakly Nonlinear Analysis of Convection in Mushy Layers during the Solidification of Binary Alloys," *J. Fluid Mech.*, **302**, 307-331(1995).
- Okhuysen, B. S. and Riahi, D. N., "On the Buoyant Convection in Binary Solidification," Theoretical and Applied Mechanics (TAM) Technical Reports, 1059, Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois at Urbana-Champaign(2005). <https://www.ideals.illinois.edu/handle/2142/317>.
- Okhuysen, B. S. and Riahi, D. N., "On Weakly Nonlinear Convection in Mushy Layers During Solidification of Alloys," *J. Fluid Mech.*, **596**, 143-167(2008).
- Bhatta, D., Muddamallappa, M. S. and Riahi, D. N., "On Perturbation and Marginal Stability Analysis of Magneto-Convection in Active Mushy Layer," *Trans. Porous Media*, **82**, 385-399(2010).
- Hwang, I. G. and Choi, C. K., "Natural Convection during Directional Solidification of a Binary Mixture," *Korean Chem. Eng. Res. (HWAHAK KONGHAK)*, **47**, 174-178(2009).
- Hwang, I. G., "Stability Analysis of Compositional Convection in a Mushy Layer in the Time-dependent Solidification System," *Korean J. Chem. Eng.*, **30**(5), 1023-1028(2013).
- Kim, M. C., "Analysis of Onset of Buoyancy-driven Convection in a Fluid Layer Saturated in Anisotropic Porous Media by the Relaxed Energy Method," *Korean J. Chem. Eng.*, **30**(6), 1207-1212(2013).