

報 文

화학공학 제7권 제4호

J. KICChE, Vol. 7, No. 4

Dec. 1969

單一泡沫浮遊選別에 있어서 氣泡의 크기가
選別能에 미치는 影響

李 承 務* 崔 元 旭*

Effect of Equivalent Bubbe Size on the Flotability in the
Single Bubble Froth Flotation

S. M. Lee, W. W. Choi

Dept. of Chem. Eng., Yonsei University, Seoul, Korea

ABSTRACT

This investigation is concerned with Forth Flotation dynamics, which is studied on the effect of equivalent mean bubble size on the flotability in single bubble forth flotation.

in order to do this, the experimental work was carried out with the typical mineral, i. e., ground glass powder ($-150 \sim +170$ mesh), in a modified flotation cell supported by dry air supply, and some hydrodynamic results were then obtained thereafter. Besides, theoretical dynamic equations were derived using the direct encounter hypothesis which was based on the collision between air bubbles and mineral particles and gas-liquid adhesion with a forthing agent such as pine oil.

Accordingly, single bubble froth flotation was predominantly effected by bubble rising or bouyant force rather than surface force in the hydrodynamic point of view. In addition to this, the functional relations between equivalent mean bubble radius and the hydrodynamic factors such as Reynolds number, Weber number, Eötvös number, and drag coefficient were also discussed.

I. 緒 論

浮遊選別工程에 있어서 Schuhmann⁽¹⁹⁾은 그의 動力學的인 問題를 定性的으로만 論議한 바 있고 Sutherland⁽²³⁾는 Direct Encounter Hypothesis⁽²³⁾에 基準하여 考察한 바 있으나 流體力學的으로는 그 結果가 아직未及하였었고 疑問點을 많이 남기고 있었다. Mendelson⁽¹¹⁾ Harmathy⁽⁹⁾, Cole⁽³⁾ 및 Ward⁽²⁵⁾들의 많은 研究가 있었으나 主로 純粹한 물 혹은 任意의 飽和溶液에서의 氣泡의 相對的 上昇速度에 關한것에 局限되었고 Gaudin⁽⁶⁾이나 Glembotski⁽⁷⁾도 實際 Froth Flotation에 關한 研究에 至大한 貢獻을 하였으나 單一泡沫浮遊選別에 關한 具體的인 研究는 아직 充分치 못하다.

本研究는 泡沫浮遊選別(Froth Flotation)을 流體力學的으로 究明하기 위하여 單一泡沫의 上昇에 따른 鑛粒과의 衝突과 衝突後의 【氣固系間의 Adhesion, 起泡劑(Forthing Agent)가 選別能(Flotability)에 미치는 영향

을 綜合 考察하였다.

Direct Encounter Hypothesis에 의하여 必要한 假定下에 浮遊選別速度式을 誘導하고 特別 相當平均半徑에 對한 여러가지 流體力學的인 因子 即 N_{Re} , N_{We} , N_{Eo} , C_D 의 關係를 究明하였고 鑛粒이 氣泡에 凝着할 때 平衡接觸時間에 對하여서는 試行誤差法으로 調査하였다. 마지막으로 相當平均半徑에 對한 選別能을 半對數座標上에서 比較하여 著者에 誘導한 式의 妥當性을 確認하였다.

II. 單一泡沫浮遊選別速度式的 誘導

Direct Encounter Hypothesis에 基準하여 Flotation Dynamics를 考察하기 위하여 몇가지 假定을 세우 速度式 誘導에 必要한 mathematical model을 생각하여야 할 것이다.

—假 定—

(1) 氣泡과 鑛粒試料는 다 剛球(Rigid Sphere)이다.

*延世大 化工科

- (2) 選別鑛液은 理想流體(Ideal Fluid)이다.
 (3) 氣泡과 鑛粒試料의 運動은 다 Irrotational 하다,
 (11) 다시 말해서 選別鑛液內를 氣泡가 上昇하는 동안 氣泡剛球周圍에서 試料 및 鑛液이 流線(stream line)을 形成케 된다.
 (4) 流體의 Inertial Flow를 無視한다.
 (5) 氣泡가 上昇하는 동안 氣泡의 Fluctuation에 依한 影響을 無視한다.
 (6) Flotation Cell 內에서의 Wall Effect를 無視한다.
 (7) Froth Stability Factor $\cong 1$
 (8) $\theta=1$

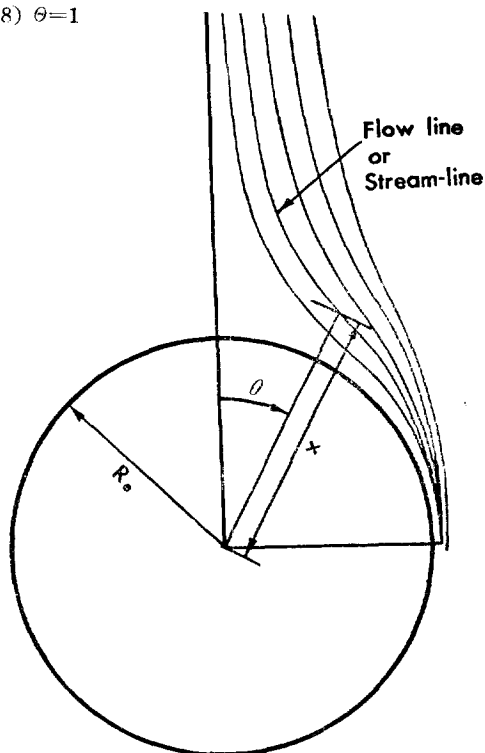


Fig. 1. Path of Particle along Streamline around Sphere.

Direct Encounter Hypothesis⁽²²⁾에 依하면 浮遊選別速度는 鑛液內에서 鑛粒과 氣泡와의 衝突에 크게 影響을 받는다. Nozzel로부터 連續的으로 上昇하는 氣泡는 鑛液上面으로 갈수록 ellipsoid로 變形되나 變形에 依한 影響을 無視함과 同時に 剛球로 假定하였고, 鑛液이 irrotational motion을 한다면 無數한 鑛粒은 Fig. 1에 表示한 바와 같이 任意的 流線을 따라 氣泡周圍를 지나가게 된다. 그러나 그 鑛粒들이 全部 氣泡와 衝突하게 되는 것이 아니라 氣泡 가까이 어떤 特定範圍內에 있는 流線을 따라 지나가는 鑛粒만이 氣泡와 衝突可能하다. 따라서 上昇하는 氣泡에 對한 鑛粒들의 單位時間當의 有效衝突數는 다음과 같이 表示된다⁽²³⁾.

$$N_c = \pi R_e^2 V_{br} N_{p0} N_B P_c \quad \dots\dots\dots(1)$$

Lamb⁽¹²⁾의 stream function을 無次元形으로 表示하면

$$\psi = (2y^2 - \frac{2}{y}) \sin^2 \theta \quad \dots\dots\dots(2)$$

여기서

$$\psi = \frac{C}{V_{br} R_e^2}, \quad y = \frac{x}{R_e}$$

$y \sin \theta$ 는 氣泡의 半徑에 對한 粒字와 氣泡의 中心間의 거리의 比이다⁽²²⁾. 여기서 單一 氣泡와 衝突할 수 있는 流線의 分率 P_c 는 氣泡가 지나가는 Column의 斷面에 對하여 氣泡로부터 無限히 먼 上流의 任意位置에 存在하는 鑛粒이 流線을 따라 氣泡에 接近하면서 衝突可能한 範圍의 比로서 나타난다.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} y^2 \sin^2 \theta = \frac{\psi}{2} \quad \dots\dots\dots(3)$$

氣泡와의 接觸이 大端히 有效할 境遇 分率 P_c 는 最大值를 가지며 ($P_c = \frac{\psi}{2}$) 그 外에는 언제나 $\frac{\psi}{2}$ 보다 적다 卽,

$$P \leq \frac{\psi}{2} \quad \dots\dots\dots(4)$$

氣泡의 中心과의 水平線上的 氣泡의 外廓部分에 衝突하였을 때의 境界條件 ($x = R_e + r, \theta = \frac{\pi}{2}$)에서 ψ 의 값을 求하면 다음과 같다.

$$\psi = \frac{2(R_e + r)^2}{R_e^2} - \frac{2R_e}{R_e + r} \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\cong 6 \left(\frac{r}{R_e} \right)$$

$$P_c \leq \frac{\psi}{2} = 3 \left(\frac{r}{R_e} \right) \quad \dots\dots\dots(6)$$

鑛粒은 事實 剛球가 아니므로 이것에 對하여 補正하여 주어야 한다. 卽

$$P_c \leq 3 \left(\frac{r}{R_e} \right) k' \quad \dots\dots\dots(7)$$

여기서 k' 는 Coefficient of Angularity⁽⁶⁾라고 하며 1보다 적은 값이다. 式 (7)을 式 (1)에 代入하면

$$N_c = 3\pi R_e r k' V_{br} N_{p0} N_B \quad \dots\dots\dots(8)$$

氣泡에 衝突한 鑛粒은 氣液界面을 浸透하여 氣固間에 自由接觸角(Free Contact Angle)^(4,8)을 形成하면서 凝着이 일어난다. Philippoff⁽¹⁷⁾는 液膜이 除去되는 速度를 接觸角과 關聯시켜 推論한 바 있으며 Nilson은 平衡接觸角(Equilibrium Contact Angle)을 形成할 때까지의 時間을 Induction Time으로 定義하였다. 이 Induction Time의 概念을 引用하면 氣-固間에 平衡接觸角을 形成함으로써 完全한 凝着이 일어나며 不安全하게 接觸되어 있었던 鑛粒이나 Induction Time보다 짧은 時間內에 接觸하는 鑛粒은 氣泡가 流體로부터 받는 drag force에 의하여 分離하게 된다. 따라서 任意의 接觸時間 t_c 는 Induction Time λ 보다 언제나 크던가 最少限 같아야 한다. 卽,

$$t_c \geq \lambda \dots \dots \dots (9)$$

流線은 氣泡의 中心線에 對하여 對稱의이므로 Lamb의 Stream Function을 利用하여 t_c 의 값을 求한다.

$$t_c = \int_0^{\pi-\theta} \frac{(R_c+r)}{V_\theta} d\theta \dots \dots \dots (10)$$

여기서 V_θ 는 氣泡表面 周圍를 흐르는 鑛粒의 Arcial Velocity로서 다음과 같이 定義된다.

$$V_\theta|_{x=R_c+r} = \frac{2}{x \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial x} |_{x=R_c+r} \dots \dots \dots (11)$$

$$= V_{br} \sin \theta + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{R_c}{R_c+r} \right)^3 \sin \theta \dots \dots (12)$$

式 (12)을 式 (10)에 代入하여 積分하면

$$t_c = \frac{4(R_c+r)}{V_{br} \left\{ 2 + \left(\frac{R_c}{R_c+r} \right)^3 \right\}} \ln \cot \frac{\theta}{2} \\ \cong \frac{4(R_c+4r)}{3V_{br}} \ln \cot \frac{\theta}{2} \dots \dots \dots (13)$$

式 (9)를 式 (13)에 代入하고 整理하면

$$\cot \frac{\theta}{2} \cong \exp \left\{ \frac{3V_{br}\lambda}{4(R_c+4r)} \right\} = \beta^2 \dots \dots \dots (14)$$

$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos \theta}{\sin \theta}$ 이므로 式(14)를 다시 整理하면

$$1 - \cos \theta = \frac{2}{\beta^2 + 1} \dots \dots \dots (15)$$

氣泡의 全表面에 對하여 λ 보다 큰 接觸時間 동안 氣固系面을 通하여 平衡接觸角을 形成함으로서의 安全한 凝着確率(Probability of Adhesion)은 다음과 같다.

$$P_{ad} = \left(\frac{\pi R_c^2 V_{br} N_B}{\frac{4}{3} \pi R_c^3} \right) \theta (1 - \cos \theta) \dots \dots \dots (16)$$

여기서 H 는 有效衝突한 鑛粒이 平衡接觸角을 形成하여 凝着한 後 氣泡과 같이 上昇하는 동안 Drag Force나 其他 다른 因子에 依하여 氣泡로부터 離脫 分離되는 程度를 表示하는 項이다. $\theta=1$ 일 경우에는 安全凝着된 것은 離脫됨이 없이 浮遊選別됨을 나타낸다.

式 (16)을 다시 整理하면

$$\left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{V_{br} N_B}{R_c} \right) H (1 - \cos \theta) = \left(\frac{3 V_{br} N_B}{4 R_c} \right) \left(\frac{2}{\beta^2 + 1} \right) \theta \dots \dots \dots (17)$$

撰別速度 R_f 는 다음과 같이 나타난다.

$$R_f = \frac{dW}{dt} = 3\pi R_c r k' V_{br} N_B \theta \left(\frac{1}{\beta^2 + 1} \right) \left(\frac{4}{3} \pi r^3 d \right) (P_{Fo} - N_P) \dots \dots \dots (18)$$

$$= 3\pi R_c r k' V_{br} \theta \left(\frac{1}{\beta^2 + 1} \right) (W_0 - W) \dots \dots \dots (19)$$

$$\frac{dW}{dt} = 3\pi r k' N_B \left(\frac{\sigma}{\mu} \right) \theta \left(\frac{N_{We}}{N_{Re}} \right) \left(\frac{R_c}{\beta^2 + 1} \right) (W_0 - W) \dots \dots \dots (20)$$

初期條件 ($t=0$ 에서 $W=W_0$)에서 式 (19)를 積分하여 整理하고 $\theta=1$ 에 對하여

$$\ln \left(\frac{W_0}{W_0 - W} \right) = 3\pi r k' N_B \left(\frac{\sigma}{\mu} \right) \left(\frac{N_{We}}{N_{Re}} \right) \left(\frac{R_c}{\beta^2 + 1} \right) t \dots (21)$$

III. 實驗方法

單一泡沫浮遊選別能을 實驗하기 위한 裝置는 Fig. 2에 圖示한 바와 같다.

Air Bomb로 부터 Needle Valve를 通하여 나오는 空氣는 먼저 KOH 溶液中으로 通過되면서 CO_2 가 除去되고 또 곧 Conc. H_2SO_4 溶液을 通過하면서 脫水 乾燥되어 Holding Tank로 간다. 이 乾燥空氣는 이 Holding Tank로 因하여 흐름에 있어서의 Fluctuation이 억제되며 Holding Tank의 出口에 있는 壓力 gauge와 Needle Valve로 그의 流量을 調整하게 된다. Flotation Cell 밑에는 여러가지 크기의 Nozzle을 장치하여 氣泡의 크기를 어느 限度 調節하게 되며 또 空氣의 流速으로서 氣泡의 生成 Frequency를 一定하게 調節한다. 이때 氣泡의 크기는 一定한 時間內에 300個의 氣泡에 依하여 置換된 물의 부피로부터 氣泡을 球形으로 생각하여 求한 氣泡의 平均半徑을 Equivalent Mean Bubble

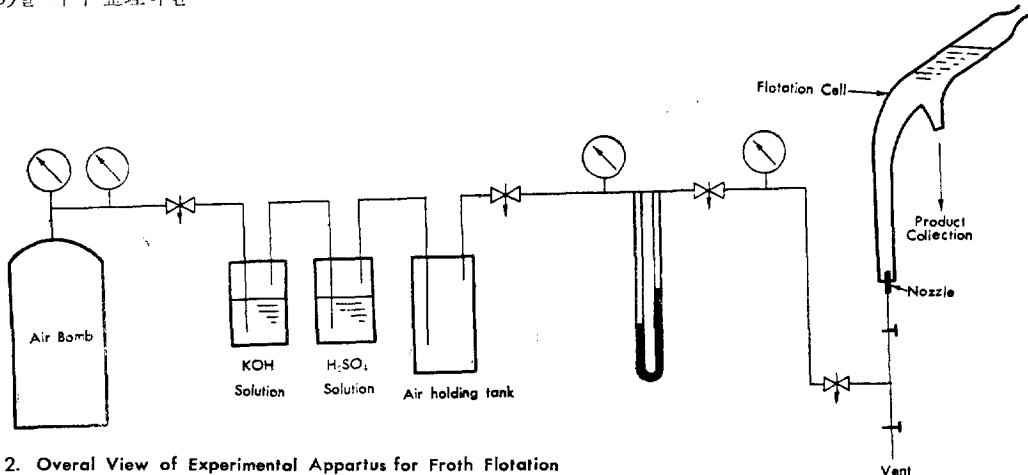


Fig. 2. Overall View of Experimental Apparatus for Froth Flotation

Radius (R_e)로 定義한다. 特히 이 實驗에 있어서 氣泡가 上昇하는 동안의 Fluctuation과 Flotation Cell 上部에서 氣泡가 橢圓形으로 變形되므로서의 選別能에 미치는 影響을 無視하기 위하여 半徑을 0.3cm 以下로 制限 實驗하였다.

選別鑛液으로서는 微量의 oleic acid⁽³¹⁾를 捕收劑(Collector)로 使用하고 起泡劑(Frothing Agent)로서 물 1l 當 0.02g, 0.1g 및 0.75g 의 Pine Oil 을 加하여 PH 8.8⁽⁶⁾에서 起泡劑의 量이 浮遊選別에 미치는 影響을 考察하였다. 卽 -150 ~ +170mesh⁽³¹⁾의 試料(유리 粉) 1g 를 Flotation Cell 內에 加하여 Ring 의 上下運動으로 계속 分散시켜 주면서 一定한 크기의 單一氣泡를 一定한 時間間隔(一定한 Frequency 로서)으로 浮遊시켜 氣泡에 凝着되어 上昇한 試料粒子들은 Cell 上部에서 氣泡가 깨지면서 回收部에 모이게 된다. 一定時間 동안 (氣泡 5,000 개가 上昇하는 時間) 操作後 回收部에 모인 試料粒字를 秤量하여 浮遊撰別量(W)으로 計算한다.

IV. 實驗結果 및 考察

實際로 浮遊選別作業을 進行시키기 前에 鑛液의 特性을 考察하였던 바 그 結果는 Table 1에 表示하였고 特히 鑛液 中 Pine Oil의 濃度에 對한 表面張力의 變化를 Fig. 3에 圖示하였다. 浮遊選別作業을 언제나 一定한 條件下에 行하기 위하여 氣泡의 發生速度와 空氣의 流速을 調節하여 Nozzle로부터 나오는 氣泡의 크기를 決定하였다. 氣泡의 相當平均半徑(Equivalent Mean Radius)에 對하여 氣泡의 相對上昇速度의 計算値와 實驗値를 Table 2에 記載하였고 이를 Fig. 4, 5 및 6에 圖示하였다.

Table 2와 Fig. 4, 5 및 6을 보면 氣泡가 鑛化(mineralization)됨에 따라 혹은 試料의 分散에 依하여 浮力에 依한 上昇에 抵抗을 加重하여 주기 때문에 $(V_{br})_{min} < (V_{br})_{demin}$ 가 된다. 이때 $(V_{br})_{min}$ 과 $(V_{br})_{demin}$ 과의

Table 1. Properties of the Pulp solution

Conc. of Pine Oil in the Pulp, g/l	Density g/cc	Viscosity g/cm. sec	Surface Tension dyne/cm ²	Frequency of Bubble Formation, No. of Bubble/sec
0.02	0.9994	0.98569×10^{-2}	69.286	2.33
0.10	1.0001	1.012587×10^{-2}	66.9392	2.335
0.75	1.00411	1.02291×10^{-2}	51.508	2.33

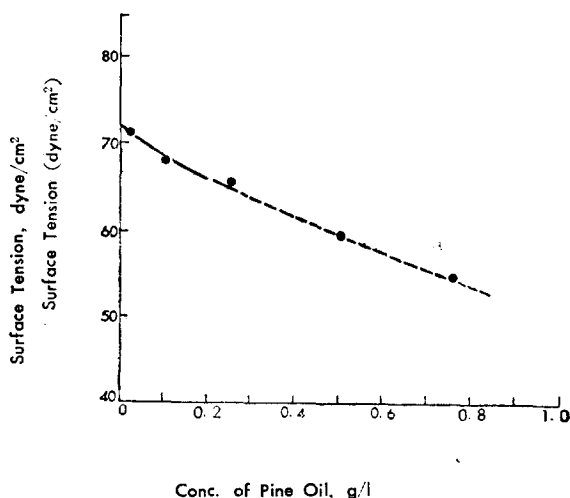


Fig. 3. Relationship between Surface Tension and Concentration of Pine Oil

Table 2. The Relationship between Equivalent Mean Bubble Radius and Relative Bubble Velocity

Conc. of Pine Oil in the Pulp, g/l	Eq. Mean Bubble Radius cm	Relative Bubble Radius, cm/sec			Reynolds Number	
		$(V_{br})_{demin}^*$	$(V_{br})_{min}^{**}$	$(V_{br})_s$	$(N_{Re})_{demin}^*$	$(N_{Re})_{min}^{**}$
0.02	0.1115	16.45	16.20	13.178	371.937	366.284
"	0.137	17.25	17.00	16.4704	497.223	472.278
"	0.165	18.40	18.10	20.5343	615.630	605.606
"	0.1825	18.90	18.60	22.8991	699.445	688.342
"	0.224	20.10	19.55	27.9482	912.994	888.017
"	0.258	20.80	20.20	31.8545	1088.202	1056.812
"	0.293	21.95	21.00	37.2085	1304.152	1247.714
0.10	0.1075	16.00	15.85	11.9817	339.761	336.575
"	0.134	17.00	16.56	14.227	449.986	438.336
"	0.1585	17.85	17.35	17.203	558.872	543.217
"	0.179	18.40	17.95	19.7084	650.602	634.691
"	0.215	19.45	18.60	22.7223	826.043	789.943

Conc. of Pine oil in the Pulp g/l	Equivalent Mean Bubble Radius, cm	Relative Bubble Radius, cm/sec			Reynolds Number	
		$(V_{br})_{demin}^*$	$(V_{br})_{min}^{**}$	$(V_{br})_s$	$(N_{Re})_{demin}^*$	$(N_{Re})_{min}^{**}$
0.10	0.225	20.40	19.50	27.449	1027.579	982.245
"	0.283	21.40	20.10	30.988	1196.314	1123.641
0.75	0.102	15.55	15.25	9.6371	311.389	305.381
"	0.127	16.50	16.05	11.8245	411.396	400.177
"	0.152	17.05	16.55	13.3684	508.793	493.872
"	0.181	17.95	17.32	16.0253	637.849	615.459
"	0.207	18.51	17.89	18.2521	752.227	727.033
"	0.225	19.30	18.45	20.5477	852.534	814.990
"	0.262	19.85	19.15	23.964	1021.022	985.017

* 鑛液중에 固粒試料를 分散시키지 않고 氣泡를 發生 上昇시켰을 때의 相對速度를 $(V_{br})_{demin}$ 라고 하고 이 速度의 값으로부터 求한 Reynolds 數를 $(N_{Re})_{demin}$ 라고 定義한다.

** 鑛液중에 固粒試料를 分散시키고 實際로 單一 泡沫浮遊選別할 때의 氣泡의 上昇速度를 $(V_{br})_{min}$ 라고 하고 이 速度로부터 求한 Reynolds 數를 $(N_{Re})_{min}$ 라고 定義한다.

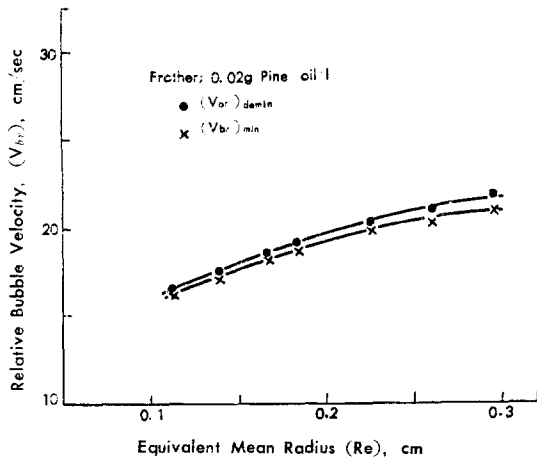


Fig. 4 Effect of Bubble Size on the Relative Bubble Velocity

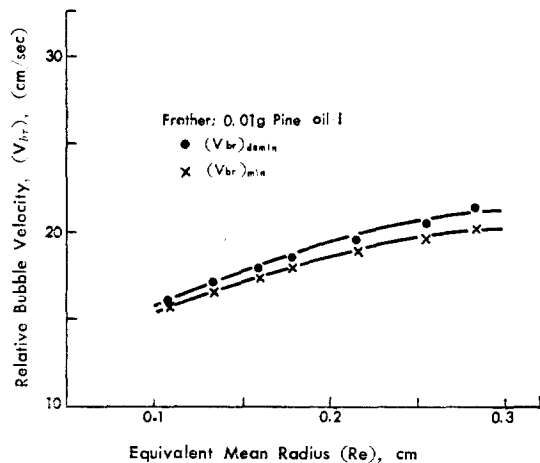


Fig. 5. The Relative Bubble Velocity effected on the Bubble Size.

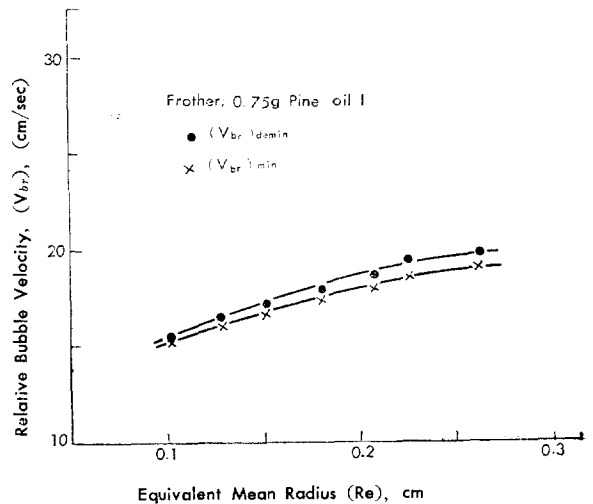


Fig. 6 The Relative Bubble Velocity effected on the Bubble Size.

차는 1.5 내지 4.5% 밖에 되지 않아 Baker 와 Chao⁽¹⁾의 實驗結果로서 0.1~0.3cm의 相當平均半徑에 對하여 氣泡 上昇時에 fluctuation에 의한 相對速度(V_{br})_{demin}의 測定誤差가 5 내지 10%였음을 比較하여 볼때 氣泡가 鑛化되었어도 誤差範圍를 벗어나지 않았다. 또 Baker 와 Chao의 實驗에 依하면 $N_{Re} > 46,000$ 에서 相對速度의 fluctuation은 氣泡의 크기에는 別로 相關있이 약 5 cm/sec 정도이었음을 고려할 때 本 實驗에서 $N_{Re} < 1,130$ 에서의 fluctuation은 적어 그것으로 因하여 생기는 誤差는 다른 變數로 因하여 생기는 誤差보다 적은 것이라고 생각된다. $(V_{br})_s$ 는 Sutherland의 實驗値로부터 求한 式에 代入하여 일어진 값이다.

$$(V_{br})_s = \left[\frac{g \sigma \Delta \rho}{\rho_i^2} \right]^{1/4} \left[\frac{3 N_{w_e}}{4 C_D} \right]^{1/4}$$

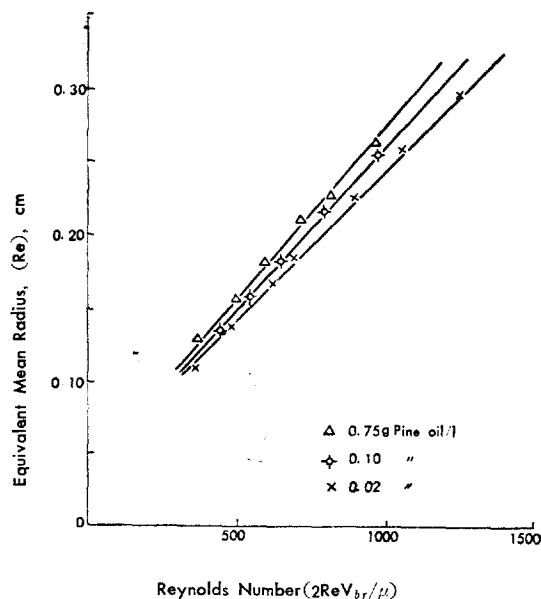


Fig. 7. Relationship between Reynolds Number & Equivalent Mean Radius of Bubble

一般的으로 鑛液中の Pine Oil 의 濃度가 增加함에 따라 同一한 氣泡의 크기에 對하여 上昇速度는 낮아지며 또 Pine Oil 의 濃度에는 關係없이 氣泡의 크기가 커질수록 上昇速度의 增加는 完滿하여진다. Fig. 7 은 起泡劑의 濃度別로 相當平均半徑에 對한 Reynolds Number 의 變化를 나타낸 것으로 平均半徑이 적을 때에는 Reynolds Number 에는 別로 差異가 없으나 半徑이 커질수록 起泡劑의 濃度에 對한 偏差가 커지게 되며 같은 相當平均半徑을 갖는 氣泡라 하 라도 起泡劑의 濃度가 클수록 Reynolds 數는 적어지는 傾向이 있다. 이와 같은 傾向은 起泡劑의 濃度가 增加할수록 氣泡의 上昇 卽 浮力에 對한 저항이 커져서 相對速度가 늦어지는데 기인될 것이다.

Table 3은 平均相當半徑에 對한 Weber 數, Eötvös 數 및 Drag 係數의 變化에 對한 計算値이며 Fig. 8, 9 및 Fig. 10 에 圖示하였다. 氣泡의 相當平均半徑에 對한 Weber 數의 變化에 關하여서는 Reynolds 數의 境遇와 類似하게 線型的인 關係를 갖는다. 그러나 起泡劑의 濃度가 增加함에 따라 表面張力이 減少함으로써

Table. 3. Relationship of Equivalent Mean Bubble Radii and Weber Number, Eötvös Number and Drag Coefficient.

Conc. of pine oil in the pulp, g/l	Equivalent Mean Bubble Radius, cm	Eötvös Number* $N_{E\delta}$	Drag Coefficient** \bar{C}_D	Weber Number *** N_{We}
0.02	0.1115	0.703038	1.1196	0.8442
"	0.137	1.061895	1.23959	1.1773
"	0.165	1.540311	1.31699	1.5594
"	0.1825	1.88437	1.37941	1.8214
"	0.224	2.83881	1.53253	2.4698
"	0.258	3.765997	1.65338	3.037
"	0.293	4.85709	1.73734	3.724
0.10	0.1075	0.676741	1.11815	0.779
"	0.134	1.051514	1.27684	1.0601
"	0.1585	1.471174	1.37588	1.3764
"	0.179	1.87634	1.4517	1.664
"	0.215	2.70696	1.62392	2.146
"	0.255	3.8079	1.75236	2.797
"	0.283	4.69006	1.83039	3.2984
0.75	0.102	0.79179	1.14149	0.6843
"	0.127	1.22749	1.28312	0.9438
"	0.152	1.75832	1.44431	1.2011
"	0.181	2.49327	1.57035	1.5664
"	0.207	3.26101	1.68331	1.9112
"	0.225	3.8528	1.72029	2.2095
"	0.262	5.22413	1.85942	2.772

$$*N_{E\delta} = \frac{4g(\rho_l - \rho_g)R_e^2}{\sigma}$$

$$**\bar{C}_D = \frac{(\rho_l - \rho_g)gR_e}{3\rho_l V_{br}^2}$$

$$***N_{We} = \frac{2\rho_l (V_{br})^2 R_e}{\sigma}$$

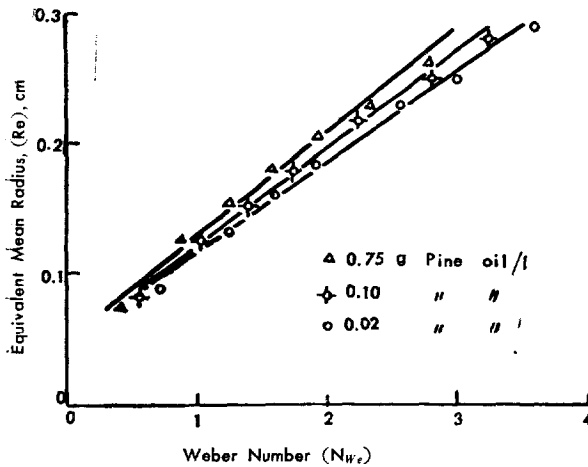


Fig. 8. Relationship between Weber Number and Equivalent Mean Radius.

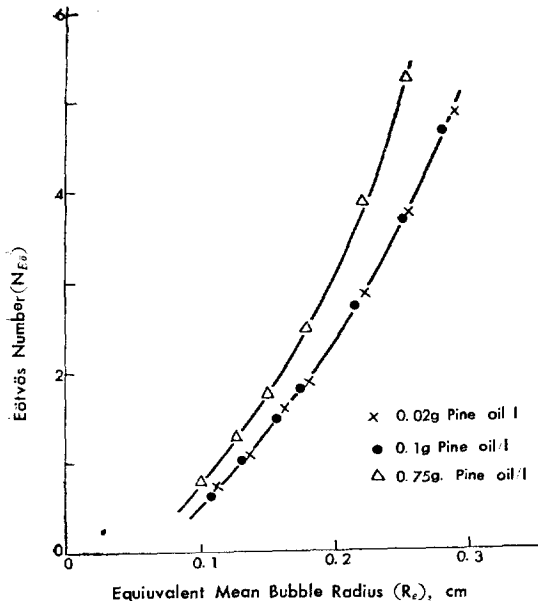


Fig. 9. Relationship between Equivalent Mean Radius and Eötvös Number

Weber 數는 增加하리라고 豫想하였으나 實際적으로 減少하는 現象을 나타냈다. 이것으로 보아 單一 泡沫 浮遊選別에 있어서 起泡劑의 量에 對한 影響即 氣固界面에서의 接觸角 形成과 流體力學的인 영향即 氣泡의 相對上昇速度的 影響을 받게된다고 생각할 수 있다. 다시 말해서 誘導된 바의 最終式에도 나타난 것과 같이 選別速度는 N_{Re} 나 혹은 N_{We} 에 影響을 받게 된다.

Fig. 9 는 相當平均半徑에 對한 N_{Eo} 의 關係를 나타낸 것으로 0.02g Pine Oil/l 나 0.1g pine oil/l 의 起泡劑를 包有할 때에는 相當平均半徑에 對한 N_{Eo} 는 同

一하여 起泡劑의 濃度에 對하여 表面張力에 依한 影響에는 變化없으나 더 增加함에 따라 (表面張力이 急減함에) N_{Eo} 는 增加하게되고 따라서 選別速度는 減少하게된다. 故로 實際 浮遊選別時에 起泡劑의 濃度を 크게 取하지 않는 것이 有效함을 立證하여 준다. Fig. 10 는 相當平均半徑에 對하는 Drag 係數의 變化를 나타낸다. Fig. 10 에 依하면 氣泡의 相當平均半徑에 對하여 Drag 係數는 線型的으로 增加하고 또 起泡劑의 濃度가 增加함에 따라 Drag 係數도 增加하며 그의 樣狀은 다음의 式으로 나타낸다.

$$\bar{C}_D = \alpha R_e + 0.65 \quad \dots\dots\dots (21)$$

여기서 α 는 勾配를 나타내는 常數로서 起泡劑의 濃度 및 表面張力の 함수로 나타나는 값이다.

0.05cm < R_e < 0.3cm의 範圍에서

起泡劑의 濃度	α , cm ⁻¹
0.02g Pine Oil/l	4.00
0.1 " "	4.33
0.75 " "	4.86

相當平均半徑이 적을 때에는 \bar{C}_D 의 값에 큰 差異가 없고 따라서 實驗結果 浮遊選別量에 差異가 없으나 半徑이 커짐에 따라 \bar{C}_D 의 값에 相當한 偏差가 생기므로 그 結果 起泡劑의 濃度가 클수록 選別量이 많아짐도 Drag 에 依한 影響이 있다 하겠다.

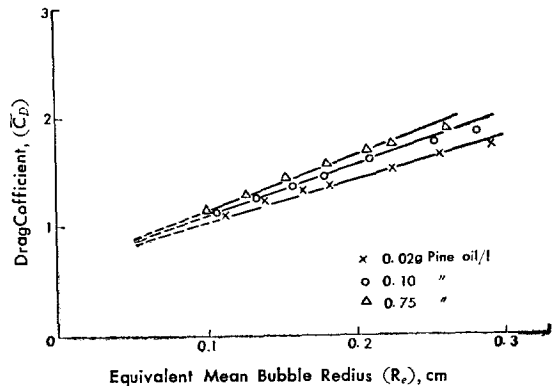


Fig. 10. Relationship between Equivalent Mean Radius and Drag Coefficient.

Fig. 11 은 Eötvös 數에 對한 Weber 數의 關係를 나타내는 것으로 다음과 같은 式으로 表示된다.

$$N_{We} = k N_{Eo} + 0.5 \quad \dots\dots\dots (22)$$

여기서 k 는 勾配로서 起泡劑의 濃度에 따라 變하는 常數이다.

起泡劑의 濃度	k , 無次元
0.02g Pine Oil/l	0.667
0.1 " "	0.6
0.75 " "	0.4286

이것은 Mendelson⁽¹⁴⁾에 依하여 순수한 물 中에서 얻

어진 결과 $N_{We}=N_{E\delta}+1$ 와는 달리 起泡劑의 濃度에 영향을 받게 됨을 나타낸다. Eötvös 數는 Weber 數와

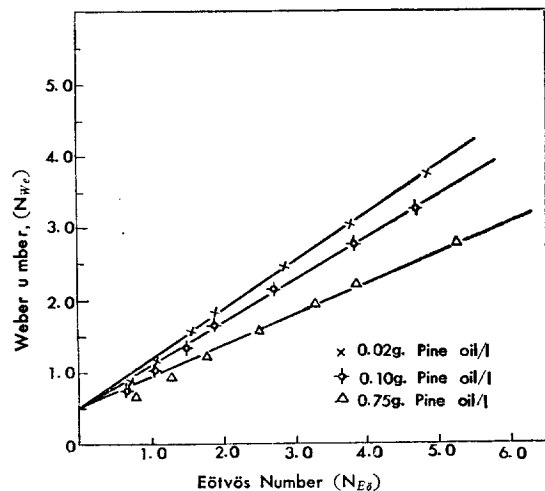


Fig. 11. Relationship between Weber Number and Eötvös Number.

TABLE 4. Relationship between the Equivalent Mean Radii and Floatability at $\lambda=0.125$ sec.

Conc. of Pine Oil in the Pulp Sol. g/l	Radius cm	Probability of Adhesion $\frac{3}{4} \left(\frac{V_{br} N_{\beta}}{R_e} \right) \left(\frac{2}{\beta^2 + 1} \right) \times 100$ %	$\left(\frac{R_e}{\beta^2 + 1} \right) \times 100^{-7}$	Floatability calculated from Eq. (21)
0.02	0.1115	0.0044	9.037×10^{-5}	≈ 1.000
"	0.137	0.0641	1.886×10^{-3}	≈ 1.000
"	0.165	0.114	1.650×10^{-2}	1.002
"	0.1825	1.1865	5.666×10^{-2}	1.007
"	0.224	9.3325	6.387×10^{-1}	1.090
"	0.258	34.2637	3.011	1.521
"	0.293	89.7398	9.783	4.127
0.10	0.1075	0.0036	7.022×10^{-5}	≈ 1.000
"	0.134	0.0733	2.120×10^{-3}	≈ 1.000
"	0.1585	0.4614	1.782×10^{-2}	1.002
"	0.179	1.5915	7.576×10^{-2}	1.009
"	0.215	11.0969	7.354×10^{-1}	1.095
"	0.255	46.5220	4.137	1.712
"	0.283	102.4000	10.880	4.291
0.75	0.102	0.0032	5.815×10^{-5}	≈ 1.000
"	0.127	0.0547	1.465×10^{-3}	≈ 1.000
"	0.152	0.5498	2.048×10^{-2}	1.0017
"	0.182	3.2474	1.638×10^{-1}	1.0147
"	0.207	11.2277	7.533×10^{-1}	1.0712
"	0.225	21.7115	1.589	1.1615
"	0.262	78.2230	7.477	2.0790

Froude 數와의 比, 卽 表面張力과 浮力의 比를 나타내는 것으로 起泡劑의 濃度가 클수록 Eötvös 數 增加에 따른 Weber 數의 減少가 顯著함은 그만큼 浮力에 의한 영향 즉 氣泡의 相對上昇速度와 氣-固系間의 衝突에 크게 左右됨을 나타내고 있다.

Table 4, 5 및 6은 氣泡의 相當平均半徑에 對한 凝着確率과 選別能에 관한 計算値이며 이것을 Fig. 12, 13 및 14에 圖示하였다. 平衡接觸時間^(17,19) λ 의 測定은 實驗의으로 不可能하므로 λ 를 假定하여 式 (15) 및 (16)에 代入하여 試行誤差法으로 凝着確率을 求하였다.

Sutherland⁽²²⁾ Eigeles 및 Sven-Nilsson 등에 依하면 平衡接觸時間은 大概 0.005 내지 0.1 秒 要하나 特殊한 系는 보다 긴 接觸時間을 갖는 다고 指摘하였는 바 單一 泡沫浮遊選別工程에서는 0.125~0.135 秒의 平衡接觸時間을 要할 때가 理論上 妥當하였다. 따라서 $\lambda=0.125 \sim 0.135$ 秒의 값을 代入하여 求한 理論凝着確率은 Fig. 12, 13 및 14에 나타난 바와 같이 相當平均半徑이 0.2cm 以下에서는 實際豫想確率値(大概 7~30 %)보다 낮았으며 0.26cm 以上에서는 그 값이 대단히

TABLE 5. Relationship between the Equivalent Mean Radii and Floatability at $\lambda=0.130$ sec.

Conc. of Pine Oil in the Pulp Sol. g/l	Radius cm	Probability of Adhesion $\frac{3}{4} \left(\frac{V_{br} N_{\beta}}{R_e} \right) \left(\frac{2}{\beta^2 + 1} \right) \times 100$ %	$\left(\frac{R_e}{\beta^2 + 1} \right) \times 10^{-7}$	Floatability calculated from Eq. (21)
0.02	0.1115	0.0017	3.567×10^{-5}	≈ 1.000
"	0.137	0.0283	8.343×10^{-4}	≈ 1.000
"	0.165	0.1968	7.895×10^{-3}	1.001
"	0.1825	0.5945	2.840×10^{-2}	1.0035
"	0.224	5.1122	3.499×10^{-1}	1.048
"	0.258	19.8389	1.743	1.275
"	0.293	54.1762	5.906	2.353
0.10	0.1075	0.0014	2.748×10^{-5}	≈ 1.000
"	0.134	0.0326	9.430×10^{-4}	≈ 1.000
"	0.1585	0.2220	8.572×10^{-3}	1.001
"	0.179	0.8069	3.841×10^{-2}	1.005
"	0.215	6.1177	4.054×10^{-1}	1.0516
"	0.255	27.2849	2.426	1.3705
"	0.283	62.1860	6.608	2.4220
0.75	0.102	0.0012	2.263×10^{-5}	≈ 1.000
"	0.127	0.0240	6.434×10^{-4}	≈ 1.000
"	0.152	0.2664	9.922×10^{-3}	1.0008
"	0.181	1.6966	8.558×10^{-2}	1.0078
"	0.207	6.2040	4.162×10^{-1}	1.0390
"	0.225	12.3197	9.014	1.0890
"	0.262	47.0300	4.496	1.5530

Table 6. Relationship between the Equivalent Mean Radii and Flotability at $\lambda=0.135$ sec

Conc. of Pine Oil in the Pulp sol. g/l	Radius cm	Probability of Adhesion $\frac{3}{4} \left(\frac{V_{br} N_B}{R_e} \right) \left(\frac{2}{\beta^2 + 1} \right) \times 100$ %	$\left(\frac{R_e}{\beta^2 + 1} \right) \times 10^{-7}$	Flotability calculated from Eq. (21)
0.02	0.1115	0.0007	1.408×10^{-5}	≈ 1.000
"	0.137	0.0125	3.687×10^{-4}	≈ 1.000
"	0.165	0.0942	3.780×10^{-3}	1.0005
"	0.1825	0.2976	1.421×10^{-2}	1.002
"	0.224	2.7973	1.9145×10^{-1}	1.026
"	0.258	11.4912	1.0100	1.151
"	0.293	32.7340	3.5680	1.677
0.10	0.1075	0.0006	1.076×10^{-5}	≈ 1.000
"	0.1340	0.0145	4.194×10^{-4}	≈ 1.000
"	0.1585	0.1078	4.163×10^{-3}	1.0005
"	0.1790	0.4092	1.948×10^{-2}	1.0025
"	0.2150	3.3720	2.235×10^{-1}	1.0280
"	0.2550	16.0115	1.424	1.2030
"	0.2830	37.7688	4.013	1.7110
0.75	0.1020	0.0005	8.808×10^{-6}	≈ 1.000
"	0.1270	0.0105	2.824×10^{-4}	≈ 1.000
"	0.1520	0.1290	4.806×10^{-3}	1.0004
"	0.1810	0.8869	4.474×10^{-2}	1.0040
"	0.2070	3.4280	3.300×10^{-1}	1.0210
"	0.2250	6.9918	5.116×10^{-1}	1.0494
"	0.2620	28.1760	6.693	1.3028

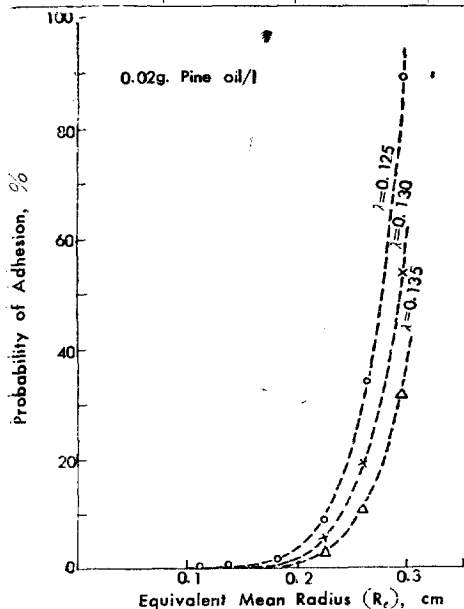


Fig. 12 The Probability of Adhesion effected on the Equivalent Mean Radius of Bubble.

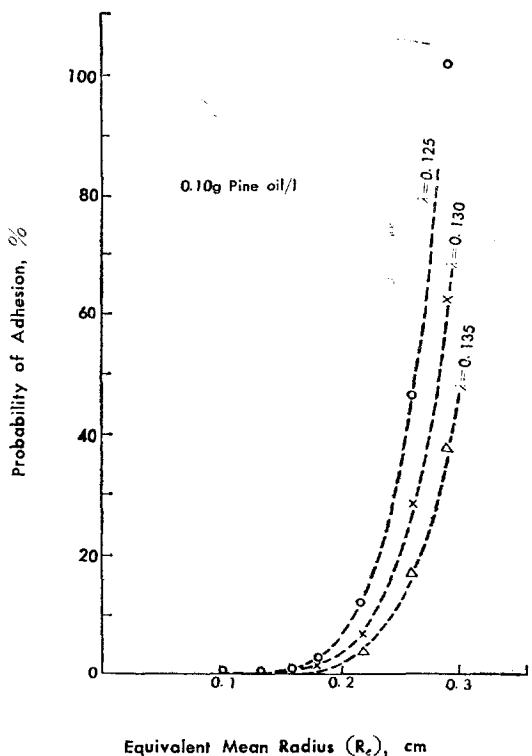


Fig. 13. The Probability of Adhesion effected on the Equivalent Mean Radius of Bubble.

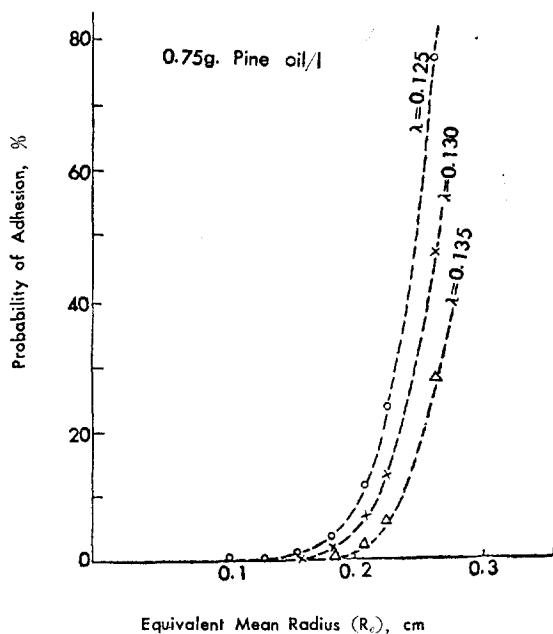


Fig. 14. The Probability of Adhesion effected on the Equivalent Mean Radius of Bubble.

7. The Experimental Data of Floability effected on the Equivalent Mean Radius

Conc. of Pine Oil in the Pulp g/l	Radius cm	Amount of Mineral Particles Collected by the Flo- tation, g	Floability
			$\frac{W_o}{W_o - W}$
0.02	0.1115	0.0405	1.0422
"	0.137	0.0440	1.046
"	0.165	0.0481	1.0505
"	0.1825	0.0576	1.06112
"	0.224	0.068	1.071
"	0.258	0.0735	1.0793
"	0.293	0.1180	1.134
0.10	0.1075	0.073	1.079
"	0.134	0.092	1.101
"	0.1585	0.111	1.125
"	0.179	0.145	1.169
"	0.215	0.169	1.2034
"	0.255	0.203	1.28
"	0.283	0.244	1.323
0.75	0.102	0.104	1.116
"	0.127	0.119	1.135
"	0.152	0.168	1.21
"	0.181	0.203	1.255
"	0.207	0.242	1.335
"	0.225	0.272	1.374
"	0.262	0.371	1.59

커졌다. 또 λ 의 값이 클수록豫想確率値를 갖는範圍가 넓어지는傾向이 있다. 이러한誤差가 생기는理由로서 \Re 의 값을 1로假定하였고 또其他流體力學的인 다른變數가介在할 것으로 생각된다. 또 Table 4, 5 및 6에相當平均半徑을變數로 갖는項 $\frac{R_e}{\beta^2+1}$ 의選別能의理論計算値間의關係를起泡劑의濃度別로記載하였고 이를 Fig. 15, 16 및 17에點線으로圖示하였다. Table 7은相當平均半徑에對한選別能의實測値를起泡劑의濃度別로整理記載하였고 이것을 Fig. 15, 16에서와 17의半對數座標上의實線으로圖示하였다.理論計算値와實測値를比較하여 볼 때相當平均半徑이 적을 때에는選別能實測値 $\ln\left(\frac{W_o}{W_o-W}\right)$ 가理論計算値보다 크고相當平均半徑이 커짐에 따라反對로理論計算値가 커지는傾向이 있다. 이것은前述한바와 같이理論凝着確率의 영향에 의한 것으로 생각된다.

또起泡劑의濃度가增加할수록理論計算値와實測値間의偏差가적어져서 0.75g pine oil/l의起泡劑를使用한鑛液中에서의浮遊選別은測定된相當平均半徑의 거의全範圍에서實測値와理論値가近似하여지게됨을알 수 있다. 또使用한 모든起泡劑濃度에對하여 $\lambda=0.135$ 秒 때에 적은偏差를 나타내고 있으며 특히 0.75g pine oil/l의起泡劑를使用하였을 때에는 $\lambda=0.130$ 秒의平衡接觸時間이 가장妥當한結果를 얻었다.

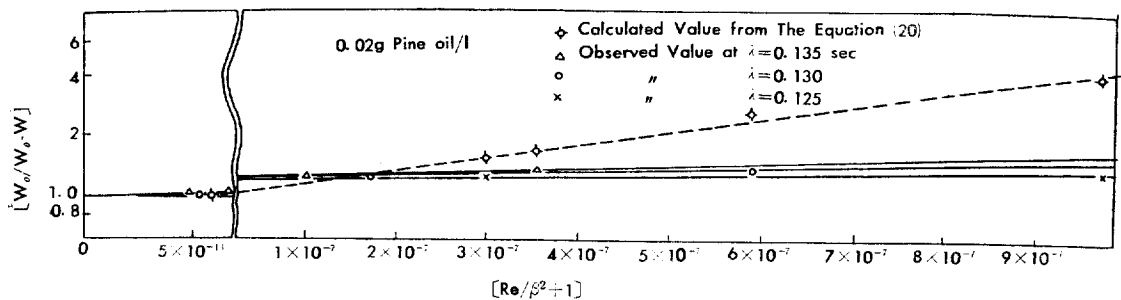


Fig. 15. Experimental Result for Measurement of Floability in the Single Bubble Froth Flotation.

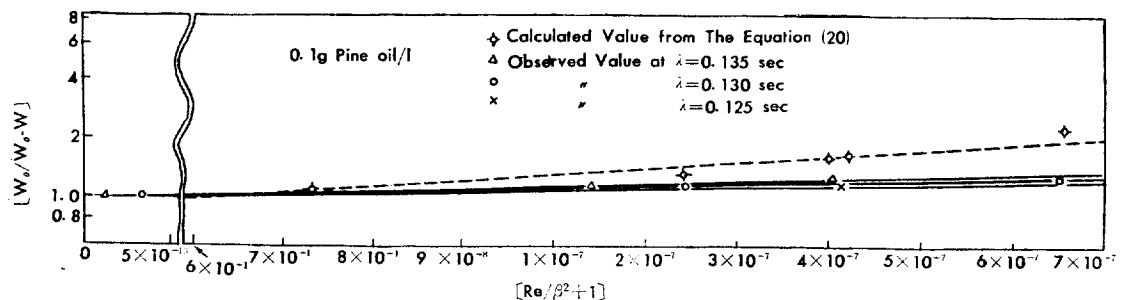


Fig. 16. Experimental Result for Measurement of Floability in the Single Bubble Froth Flotation.

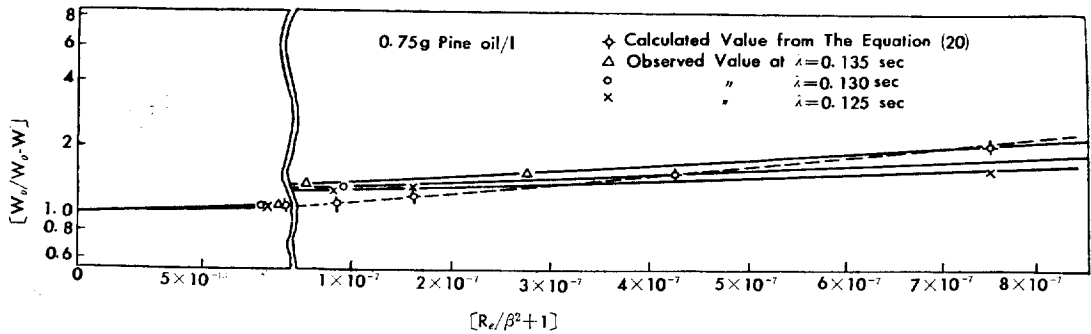


Fig. 17 Experimental Result for Measurement of Flotability in the Single Bubble Froth Flotation.

V. 結 論

單一泡沫浮遊選別能을 究明키 위하여 假定下에 流體力學의 理論式을 誘導한 反面 數學的인 Model 에 맞게 實驗裝置를 設置하고 實驗한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

1. Mathematical Model 을 設定하는데 必要한 假定下에서 泡沫浮遊選別速度는 $\left(\frac{N_{We}}{N_{Re}}\right)$ 와 $\frac{R_e}{\beta^2+1}$ 의 積의 함수로서 나타나며 選別能 $\left(\frac{W_0}{W_0-W}\right)$ 은 다음과 같은 式으로 表示된다.

$$\frac{dW}{dt} = 3\pi r k' N_B \left(\frac{\sigma}{\mu}\right) \left[\frac{N_{We}}{N_{Re}} \right] \left[\frac{R_e}{\beta^2+1} \right] (W_0 - W)$$

혹은

$$\ln\left(\frac{W_0}{W_0-W}\right) = 3\pi r k' N_B \left(\frac{\sigma}{\mu}\right) \left(\frac{N_{We}}{N_{Re}}\right) \left(\frac{R_e}{\beta^2+1}\right) t$$

2. 單一泡沫浮遊選別工程에 있어서 選定된 試料에 對하여 平衡接觸時間은 0.125~0.135 秒의 範圍가 가장 妥當하였으며 그 接觸時間에서 理論値와 實測値가 符合하였다.

3. 單一泡沫浮遊選別時에는 Surface Force 보다 浮力에 依한 影響을 더 받는다.

4. 相當平均半徑에 對한 Drag 係數와의 關係는 다음과 같은 式으로 나타난다.

$$\bar{C}_D = \alpha R_e + 0.65$$

여기서 α 는 起泡劑의 濃度 및 表面張力에 따라 變하는 常數이다.

5. Eötvös 數와 Weber 數간의 關係는 다음과 같이 나타난다.

$$N_{We} = k N_{Eö} + 0.5$$

여기서 k 는 起泡劑의 濃度에 따라 變하는 常數이다.

VI. 記號說明

\bar{C}_D = 드랙係數(Drag Coefficient) 無次元

d = 鑲粒試料의 密度

g = 重力加速度(980 cm sec.⁻²)

k = Eötvös 數와 Weber 數의 關係를 나타내는 常數로서 起泡劑의 濃度에 따라 變하는 數, 無次元

k' = Coefficient of Angularity, 無次元

N_c = 氣泡과 鑲粒간의 有數衝突數, No of collisions/unit time

N_{Po} = 鑲液 單位 부피當 始初에 存在하는 鑲粒의 數

N_P = 任意時間 經過後 鑲液에 殘存하고 있는 鑲粒의 數

N_B = 上昇하는 氣泡의 數

$$N_{Eö} = \text{Eötvös 數} = \frac{4\Delta\rho g R_e^2}{\sigma}$$

$$N_{Re} = \text{Reynolds 數} = \frac{2R_e V_{br} \rho_l}{\mu}$$

$$N_{We} = \text{Weber 數} = \frac{2\rho_e R_e (V_{br})^2}{\rho}$$

P_c = 衝突分率

R_e = 氣泡의 相當平均半徑, cm

r = 鑲粒의 半徑, cm

t = 浮遊選別操作時間, sec

t_c = 接觸時間, sec.

V_{br} = 氣泡의 相對上昇速度, cm/sec

V_g = 氣泡周圍를 지나가는 鑲粒의 arcial velocity, cm/sec.

W_0 = 浮遊選別하기 前에 鑲液에 存在하는 鑲粒의 무게, g.

W = 浮遊選別操作이 進行된 後 任意時間 經過後 鑲液에 存在하는 鑲粒의 무게, g

x = 氣泡의 中心으로부터 任意의 流線까지의 距離, cm

$$y = \frac{x}{R_e}, \text{ 無次元}$$

α = Drag Coefficient 와 相當平均半徑의 關係를 表示하는 常數, cm⁻¹

$$\beta^2 = \exp\left\{\frac{3V_{br}}{4(R_e + 4r)}\right\}$$

ρ_l = 鑲液의 密度, g/cm³

ρ_g = 氣泡의 密度, g/cm^3

θ = 氣泡의 中心線과 任意流線에 存在하는 任意의 粒子間의 角度로서 Polar Coördinate

λ = 平衡接觸時間, sec.

μ = 鑛液의 粘度, poises, 혹은 $\text{g cm}^{-1} \text{sec}^{-1}$

σ = 鑛液의 表面張力, dyne/cm^2

Θ = 氣泡과 鑛粒間의 有効衝突後 氣泡表面에 附着된 鑛粒에 對하여 分離되지 않고 撰別되는 量과의 比

Ψ = 無次元으로 나타나는 Stream function

ψ = Stream function

Ⅶ. 參 考 文 獻

1. Backer, J. L. L. and Chao, Bei T., *An Experimental Investigation of Air Bubble Motion in a Turbulent Water Stream*. J. AICHE, Vol. 11, No. 2, 1965.
2. Benzing, R. J. and Myers, J. E., *Low Frequency Bubble Formation at Horizontal Circular Orifices*. Ind. Eng. Chem., Vol. 47, No. 10, 1955.
3. Cole, R., *Motion of Vapor Bubbles in Saturated Liquids*, J. AICHE, Vol. 13, No. 2 1965
4. Evans, D. F., *Ind. Eng. Chem.*, 46; 2420, 1954.
5. Gal-Or, Benjamin, Klinzing, G. E. and Tavlari-des, L. L., *Bubble and Drop Phenomena*, Ind. Eng. Chem., Vol. 61, No. 2, 1969.
6. Gaudin, A. M., *Flotation*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1961.
7. Glembotski, V. A., *Flotation*, Library of Congress Catalog Card No.; 63-21692, New York, 1965.
8. Halligan, J. E., and Burkhard, L. E., J. AICHE Vol. 14, No. 441, 1968.
9. Harmathy, T. Z., J. AICHE, Vol. 6, No. 281, 1960.
10. Krishnamuthi, S., Kumar, Rajisrder and Kulour, N. R., *Bubble Formation in Viscous Liquids under Constant Flow Conditions*, Ind. Eng. Chem., Fundamentals, Vol. 7, No. 4, 1968.
11. Jordan, G. V., *Chem. Eng. Progr.*, Vol. 61, No. 64, 1965.
12. Lamb, H., *Hydrodynamics*, 6th ed., Dover Publication Co., New York, 1932.
13. Levich, V. G., *Physicochemical Hydrodynamics*, Prentice Hall, Inc., 1962.
14. Mendelson, H. D., *The Prediction of Bubble Terminal Velocities from Wave Theory*, J. AICHE, Vol. 13, No. 2, 1965.
15. Peebles, F. N., and H. J. Garber, *Chem. Eng. Progr.*, Vol. 49, No. 88. 1953.
16. Perry, J. H., *Chemical Engineer's Handbook* 5th ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., 1962.
17. Philippoff, W., *Some Dynamic Phenomena in Flotation*, Min. Eng., Transaction AIME, April, 1952.
18. Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, 4th ed, 18-219, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1962.
19. Schuhmann, R. Jr., *Flotation Kinetics, Methods for Steady State Study of Flotation Process*, J. Phys. Chem., 46, 391, 1941.
20. Smith, L. R. Tek, M. R., and Balzhiser, R. E., J. AICHE, Vol. 12, No. 50, 1966.
21. Spedden, H. R., Hannan, W. S., Jr., and Member of AIME, *Attachment of Mineral Particles to Air Bubbles in Flotation*. J. AIME, Technical Publication No. 2354, March, 1948.
22. *Standard Mathematical Tables*, 12ed., Chemical Rubber Publishing Co., New York, 1961.
23. Sutherland, K. L., *Physical Chemistry of Flotation XI; Kinetics of the Flotation Process*, *Phys. Chem.*, 50:394-424, 1945.
24. Tokuda, T., Young, W. J., and Clark, J. A., *Dynamics of Moving Gas Bubbles in Injection Cooling*, Transaction of ASME, Nov., 1968. (J. of Heat Transfer).
25. Ward, J. P., and Knudsen, J. G., J. AICHE. Vol. 13, No. 396, 1967.
26. Wark, I. W., *The Physical Chemistry of Flotation VII; Trimethylethylammonium Bromide as a Flotation Agent*, J. Phys. Chem., 48, 1948.
27. *Ibid.*, *The Physical Chemistry of Flotation I; The Significance of Contact Angle in Flotation*, J. Phys. Chem., 37, 623-644, 1933.
28. Waterman, L. C., *Chem. Eng. Progr.*, Vol. 61 No. 51, 1965.
29. Wolkawa, Z., *Acta Physicochim.*, URSS, 20, 469, 1965.
30. Zuidema H. H., and Waters, G. W., *Ring Method for the Determination of Interfacial Tension*, J. Analytical Chemistry, May 15, 1941.
31. 高橋健, 選鑛工學(上), (下), 共立社, 東京, 1962
32. 李承務, 黃明奎, 泡沫浮遊選別動力學에 관한 研究 (I), 延世大學校, 大學院, 1968.