

Elastohydrodynamic Lubrication

文 卓 珍*

一般으로 摩擦을 감소시키는 물질을 潤滑劑라 하며 摩擦감소의 現象을 潤滑이라고 한다. 두개의 固體物질을 서로 반대방향으로 밀어 나갈때 그 表面에는 摩擦抵抗이 생기며 이것을 감소시키는 것이 곧 潤滑인 것이다.

潤滑문제는 이미 수천년전서 부터 原始的인 방법으로 취급되었으나 潤滑現象을 이해하기 시작한 것은 1885년 英國의 Tower¹⁾라는 사람이 鐵路用軸受베어링의 摩擦을 연구한데서 부터 었다. 그는 軸受를 油槽에 담고 그 回轉시켰을 때 摩擦係數가 작아 짐과 동시에 油膜內에 流體壓力이 실존함을 알았고 이 壓力의 分配를 실험적으로 찾아 왔다. 이로 부터 潤滑理論이 전개되었고 오늘날 流體潤滑을 비롯하여 境界潤滑, 固體潤滑, 氣體潤滑등이 연구대상이 되고 있다. Elastohydrodynamic(EHD) Lubrication은 流體潤滑 및 境界潤滑과 밀접한 관계가 있으며 앞서 말한 바와 같이 流體內壓力에 의하여 母體物質(substrate)이 變形(deform)될 때의 潤滑문제를 다룬 것이다. 따라서 EHD潤滑의 연구는 流體潤滑부터 시작하여 하며 이를 위해서는 Tower의 실험결과를 이용하여 流體力學의 法則을 bearing 문제에 응용한 英國의 Reynolds²⁾의 업적을 생각하여야 한다.

Reynolds Equation

Newtonian 流體가 넓이가 無限한 bearing을 潤滑한다고 생각하자. 이때 流體의 粘度는 油膜에 관계 없이 一定하고 流壓도 一定하다고 假定한다. 그림 1에서와 같이 베어링의 위부분을 고정하고 아래 부분을 一定한 速度 u 로 x 의 반대방향으로 움직인다고 하고 重力이나 磁力과 같은 外力이 없다고 하면 流體의 작은 單位體積에 걸리는 힘은 다음과 같이 된다. 즉 $dydz$ 면의 壓力을 p 라하면 왼쪽면의 壓力은 $p + (\partial p / \partial x)dx$ 가 된다. 또 $dx dz$ 면의 shear stress를 τ 라 하면 뒷면에 걸리는 shear stress는 $\tau + (\partial \tau / \partial y)dy$ 가 된다. 따라서

水平방향에서의 힘의 均衡을 본다면 다음과 같이 된다.

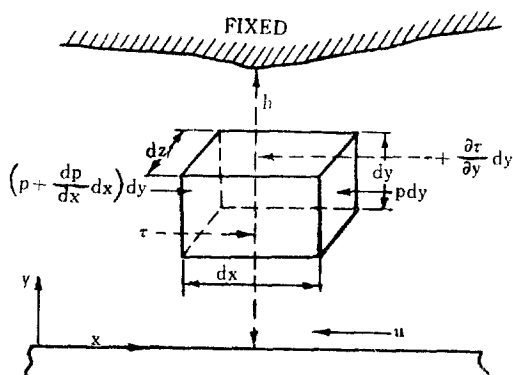


Fig. 1. 油膜의 單位體積

$$\left[p + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) dx \right] dy dz + \tau dx dz \\ = \left[\tau + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right) dy \right] dx dz + p dy dz$$

즉 $\partial p / \partial x = \partial \tau / \partial y$ 가 된다. τ 項을 없애기 위해서는 Newtonian 流體의 흐름을 고찰해야 하며 $\tau = F/A = \eta dv/dy$ 및 $v = f(x, y)$ 이므로 $\tau = \eta \partial v / \partial y$, $\partial \tau / \partial y = \eta \partial^2 v / \partial y^2$ 가 되며 따라서 $\partial p / \partial x = \eta \partial^2 v / \partial y^2$ 가 된다. 여기서 F 는 힘, A 는 表面積, η 는 粘度를 각각 나타낸다.

y 방향에서의 速度分配를 얻기 위해 上式을 y 에 대해 두번 積分하고 $y=0$ 때 $v=-u$ 및 $y=h$ 때 $v=0$ 라는 限界條件을 넣어 주면 다음과 같이 된다.

$$v = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - hy) + u \left(\frac{y}{h} - 1 \right)$$

그림 2에서 보는 바와 같이 壓力은 油膜의 기리에 따라 변하므로 v 는 어떤 점에서 極大에 도달해야 하며 동시에 $dp/dx=0$ 가 되어야 한다. 따라서 $v = u(y/h - 1)$ 가 된다.

지금 h 를 極大壓力에서의 油膜의 두께라 하면 임의의 斷面을 통과할 流體의 量은

$$Q = \int_0^h (v dx) dy = dx \int_0^h \left\{ \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) + u \left(\frac{y}{h} - 1 \right) \right\} dy$$

* 韓國科學技術研究所 潤滑劑研究室

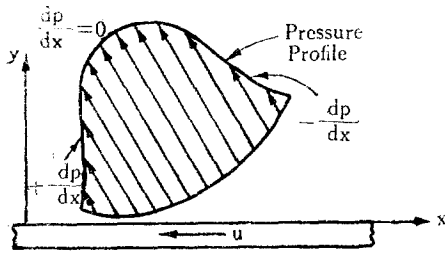


Fig. 2. 油膜의 壓力

이 흐름은 일정하여야 하며 \bar{h} 에서는 $dp/dx=0$ 가 되므로 $Q = -\frac{u}{2} dz \bar{h}$ 가 된다.

$$\text{따라서 } -\frac{u}{2} dz \bar{h} = dz \left(-\frac{1}{12\eta} \frac{dp}{dx} h^3 - \frac{uh}{2} \right)$$

$$\text{혹은 } \frac{dp}{dx} = 6\eta u \left(\frac{\bar{h}-h}{h^3} \right) \quad (1)$$

가 되며 이것이 Reynolds의方程式이다. 여기서 壓力이 粘度에 미치는 영향은 중요한 것이며 elasticity와 hydrodynamics를 동시에 취급하는 EHD潤滑의 Hertz方程式을 유도하는데 考할 必要가 있다.

壓力-粘度關係

粘度와 壓力과의 관계는 美國의 機械工學會³⁾에서 실험적으로 많은 연구를 하였고 一般的으로 paraffin系의 潤滑油보다 naphthene系의 潤滑油가 壓力의 영향을 더 많이 받는다. Chu 및 Cameron⁴⁾은 paraffin系의 粘度-壓力關係를 연구한 바 있으나 여기서는 數式的 간소화를 위해 naphthene系의 潤滑油에 관한 粘度-壓力關係를 생각하기로 한다. 이에 의하면 다음 관계식이 널리 쓰인다.

$$\eta_p = \eta_0 e^{\alpha p} \quad (2)$$

여기서 η_p 는 壓力 p 에서의 粘度, η_0 는 大氣壓에서의 粘度를 각각 나타내며 α 는 粘度-壓力係數 혹은 Piezo-viscosity 常數가 된다.

지금 Reynolds式에서 壓力과 粘度는 油膜에 대하여 일정하므로 粘度-壓力關係式을 Reynolds式에 代入할 수 있고 이를 정리해 보면 다음과 같이 된다.

$$e^{-\alpha p} \frac{dp}{dx} = 6u\eta_0 \frac{\bar{h}-h}{h^3}$$

$$\text{혹은 } -\frac{1}{\alpha} d(e^{-\alpha p}) = 6u\eta_0 \frac{\bar{h}-h}{h^3} dx$$

이 式의 右邊은 일정粘度에서의 積分으로서 h 가 x 의 函數로 表示된 것이다. 左邊은 積分되되 $p \rightarrow 0$ 일때 全體가 0가 된다는 條件을 고려하면 $(1-e^{-\alpha p})/\alpha$ 가 된다. p 가 작아지면, 혹은 $\alpha \rightarrow 0$ 가 되면 이 項은 어떤

값에 degenerate 된다. 지금 p_0 를 reduced pressure라 하고

$$p_0 = (1-e^{-\alpha p})/\alpha \quad (3)$$

로 定義하면 $p \rightarrow 0$, 혹은 $\alpha \rightarrow 0$ 가 될때 $p_0 \rightarrow p$ 가 된다. 그러나 p 가 커지면 $p_0 \rightarrow 1/\alpha$ 가 된다. 이러한 條件에서는 表面이 크게 變形(distorsion)되며 이 때의 變形모양은 EHD潤滑에 크게 관계되는 것이다.

Hertz Equation

지금 W 라는 荷重이 (x, y) 라는 點에 加해졌을 때 (x_1, y_1) 이란 點에서 ω 라는 變形이 생기고 (x, y) 와 (x_1, y_1) 간의 거리를 γ , Poisson의 비를 σ , Yong's modulus를 E 라고 한다면 變形 ω 는 다음과 같이 表示된다.

$$\omega = \frac{(1-\sigma^2)}{\pi E} \frac{W}{\gamma}$$

이때 點 (x, y) 주위에 壓力分布가 생긴다면 全體變形量은 壓力場에 대한 積分이 된다.

$$\omega = \frac{1-\sigma^2}{\pi E} \iint \frac{p dx dy}{\gamma} \quad (4)$$

또 두개의 圓이 相互接觸되었을 때의 壓力分布는 圓의 半徑을 a 라고 하면

$$p = p_{max} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{1/2} \quad (5)$$

가 된다. 지금 그림 3과 같이 두 圓이 接觸되었다고 하면 $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$ 로서 全體變形은 다음과 같이 된다.

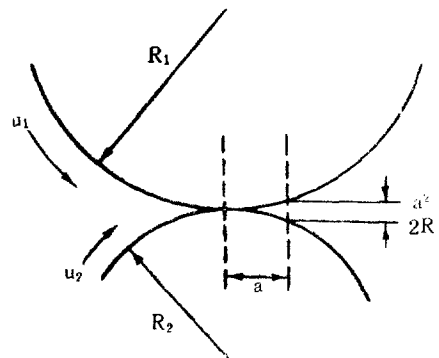


Fig. 3. 接觸圓의 모양

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{a^2}{2R}$$

$$= \left(\frac{1-\sigma_1^2}{E_1} + \frac{1-\sigma_2^2}{E_2} \right) \pi p_{max} \cdot \frac{a}{4}$$

$$\text{여기서 } W = \left(\frac{2\pi}{3} \right) p_{max} a^3$$

이므로

$$a^3 = \left(\frac{1-\sigma_1^2}{E_1} + \frac{1-\sigma_2^2}{E_2} \right) \frac{3RW}{4}$$

가 된다.材質이 같고 $\sigma=0.3$ 및 $E=30 \times 10^6 \text{ lb}_f/\text{in}^2$ 라고 하면

$$a=3.43 (RW)^{1/3} \times 10^{-3} \text{ in.}$$

가 된다.接觸部分外의變形은

$$\omega = \frac{1-\sigma^2}{2E} a p_{max} \left\{ \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} + \left(2 - \frac{r^2}{a^2} \right) \cdot \sin^{-1} \frac{a}{r} \right\} \quad (6)$$

로 주어 지므로 이 때의 流膜의 두께 h (즉 接觸部分外에서의 h)는 다음과 같이 주어진다⁵⁾.

$$h = \omega - \frac{1-\sigma^2}{2E} a p_{max} \frac{\pi}{2} \left(2 - \frac{r^2}{a^2} \right) \\ \therefore h = \frac{1-\sigma^2}{2E} a p_{max} \left\{ \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} - \left(2 - \frac{r^2}{a^2} \right) \cos^{-1} \frac{a}{r} \right\} \quad (7)$$

$a \leq r \leq 2a$ 의 범위에서 (7)式의 中괄호內는 $3.81 \{ (r/a - 1) \}^{1.5}$ 로 쓸 수 있다. EHD의 문제는 (1)式이나 (3)式과 (7)式을 동시에 푸는 것이 된다. 이의 解法으로는 Grubin의 近似解를 생각할 수 있다.

Ertel-Grubin Equation

Grubin은 接觸面의 大部分에서 p 가 크기 때문에 $p \rightarrow 1/\alpha = p_0$ 와 같이 一定하며 (1)式에서 $h = \bar{h} \equiv h_0$ 와 같이 流膜 h_0 로 平行膜을 이룬다고 假定하였고 그 외의 部分에서는 變形은 流膜壓力의 영향을 받지 않고 平行膜은 p_0 인 等價壓力로 유지된다고 假定하여 近似式을 유도하였다. 즉 (1)式을 $x = -\infty$ 에서 $x = -b$ 까지 積分하여 p_0 을 求하고 이것을 $1/\alpha$ 로 놓으면 다음과 같이 된다.

$$1 = 6G\mu \left(\frac{b}{R} \right) \int_{-\infty}^{-1} \frac{H - H_0}{H^3} d\xi$$

여기서 $G = \alpha E'$ (E' 은 reduced Young's modulus), $H = h/R$, $H_0 = h_0/R$, $\xi = x/b$ 로서 b 는 接觸넓이의 1/2로서 Hertz理論에 의하면

$$b/R = \sqrt{8W/\pi}$$

이다. 上式의 積分은 $0.0986(\pi/2W)^2(\pi H_0/2W)^{-11/2}$ 로 近似되⁵⁾ 이것을

$$H = H_0 + (4W/\pi) \{ \xi \sqrt{\xi^2 - 1} - \log(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \}$$

에 代入하면 다음 式을 얻는다.

$$H_0 = 1.95(G\mu)^{8/11} W^{-1/11} \quad (8)$$

但 이 式은 出口쪽의 條件을 생각하지 않는 것이며 처음으로 EHD理論의 計算에 쓰이게 된 것이다. 出口쪽

의 壓力分布에 대해서는 Archard, Gair, Hirst⁶⁾가 研究하였고 出口쪽에는 壓力의 Peak, 즉 pressure spike가 있음을 알아냈다.

點接觸의 EHD

點接觸인 경우에는 side leakage가 있으므로 EHD膜의 生成이 곤란하리라고 생각되지만 Cameron, Gohar⁷⁾에 의하면 1~2kg의 荷重과 數 cm/sec의 速度를 갖는 潤滑條件下에서 半徑 0.1mm의 點接觸部分에 0.3~0.5 μ 의 平行膜이 생김을 알았다. Archard와 Cowking⁸⁾은 中央部分에 h_0 라는 平行流膜을 생각하고 半徑 a 의 接觸部分 근처를 非變形面으로 놓고 出口쪽의 換算壓力를 計算하고 Grubin과 같은 假定을 세워 流膜의 近似值를 얻었으며 Cheng⁹⁾도 또한 接觸타원에 適用되는 一般式을 補正하여 流膜의 近似值를 計算하였다. 이들의 計算式을 表 1에 총괄하여 본다.

表 1 點接觸潤滑面の 流膜計算式

對 象	計 算 式
Dowson 等粘度, 剛體球面	$H = 2.84 \frac{U^2}{W}$
Archard-Cowking 高壓粘度, 彈性體球面	$H = 1.40(GU)^{0.74} W^{-0.074}$
Cheng " "	$H = 1.60(GU)^{0.625} W^{-0.174}$
Cameron " "	$H = 1.37G^{0.6} U^2 p W^{-0.05}$ (實驗式)

但 $W = P/E'R^2$, p = 全體荷重

EHD의 特徵

EHD에서는 荷重이 流膜의 두께에 주는 영향이 아주 작다. (8)式과 같이 W 의 指數는 아주 작으며 一般으로 接觸넓이는 $l = 2b = 10^{-1} \text{ mm}$, $h = 10^{-4} \text{ mm}$ 정도 이므로 $h_0/l \leq 0.454 \sqrt{2\eta u/\omega} = 0.45 \sqrt{2u/W}$ 로서 Hertz理論에 의해 $l = \sqrt{32W/\pi}$ 이므로

$$H_0 = h_0/R \leq 2.05u^{1/2}$$

가 된다. 즉 高粘度를 생각치 아니 할때는 荷重의 영향을 받지 않는다.

EHD에 있어서 流膜의 두께에 비하여 彈性變形의 영향이 더 크다. 性變形量 $\omega = b^2/2R$ 과 膜의 두께와의 비를 취하면

$$\omega/h = b^2/2Rh = (8W/\pi)/2H = 10 \sim 10^2$$

이다. 彈性變形에 대해서는 작은 영향을 준다고 할지라도 壓力分布가 흐터지는 경우 膜두께에는 큰 局所變化가 생긴다.

EHD에 있어서 粘度의 壓力에 의한 增加의 영향이 크다. G 의 指數가 0.55~0.75이며 α 는 鑛油에서 $2 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{kg}$ 이므로 鋼鐵에서는 $G = \alpha E' = 5000$ 이며 靑

銅인 경우 $G=2000$ 이다.

또 Grubin의 假定에서와 같이 EHD에 있어서 接觸部分에는 均一한 流膜이 존재하며 이는 그림 4와 같다¹⁰⁾. 出口部分에서는 (1)式的 境界조건에 의하여 $dp/dx=0$ 이므로 $h=h_0$ 가 되나 이의 약간 앞部分에서는 壓力이 갑자기 低下되어 dp/dx 의 값이 負가 되고 $h-h_0 < 0$ 로서 h_0 보다 작은 膜의 두께를 이룬다. 즉 收縮이

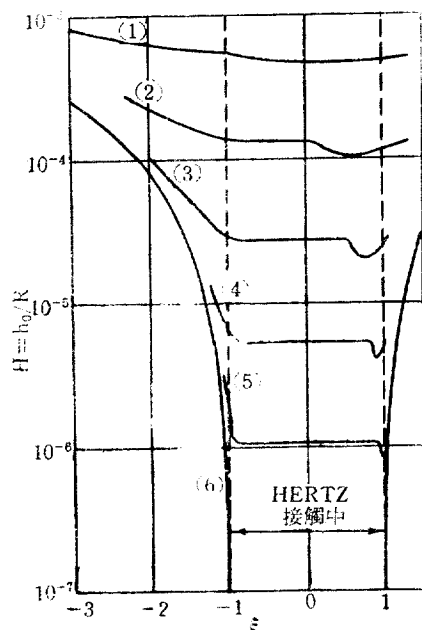


Fig. 4. 非壓縮性 流體의 流膜 두께

$$W=\omega/ER=3\times 10^{-5}, G=5000, U=\gamma x/ER$$

(1) $U=10^{-9}$, (2) 10^{-10} , (3) 10^{-11} ,

(4) 10^{-12} , (5) 10^{-13} , (6) 0 건조

일어난다는 것이 EHD의 하나의 特徵이다. 이러한 收縮에 對應해서 強性變形이 일어나야 하므로 出口쪽에는 壓力의 peak, 즉 pressure spike가 發生되어 진다. 이 spike는 荷重이 낮을 때는 생기지 않으며 荷重이 클때 생기며 壓縮性이 있는 流體인 경우 spike는 낮아지며 發生位置도 出口쪽으로 移動됨을 그림 5에서 볼수 있다¹¹⁾. EHD 상태에서의 摩擦抵抗은 약간의 sliding이 있어도 크게 變動하며 이의 測定은 쉽지만 說明이 어렵다. sliding이 있을 때 流膜內의 溫度上昇, 따라서 効有粘度의 推定이 어렵기 때문이다. pure rolling인 경우, roller의 單位넓이當 力 F_R 은 다음 式으로 주어진다.

$$2F_R = \int_i h \frac{\partial p}{\partial x} dx = \int_i h dp$$

F_R 은 荷重에 無關하며 $\eta_0 u$ 와 더불어 增加한다. F_R

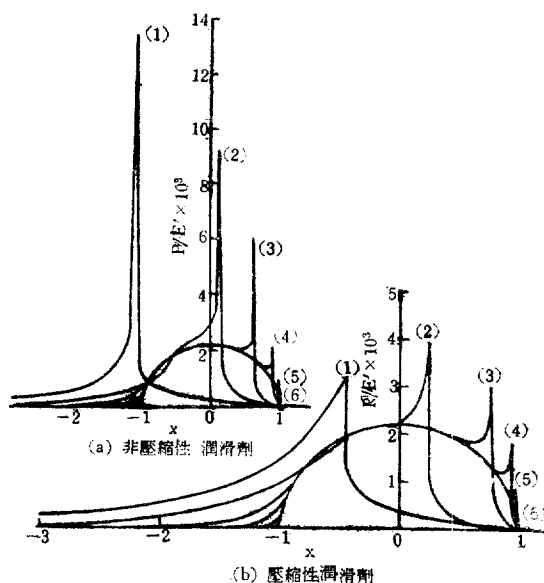


Fig. 5. 線接觸에 있어서의 壓力分布

의 速度에 대한 變化는 그림 6과 같으며 高速이 될 때 두 曲線이 수렴됨은 간단한 理論으로서 알 수 있다¹⁰⁾.

EHD에서 stress는 보통윤활제의 壓力으로만 생긴다. Fig. 7과 8에서 보는 바와 같이 速度變數가 커감에 따라 shear stress는 表面쪽으로 向하면서 커진다. 그러나 固體物質의 shear stress는 윤활제에는 크게 영향을 받지 않는다.

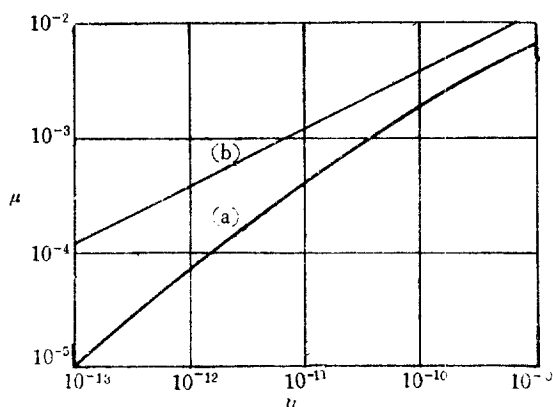


Fig. 6. 摩擦係數와 速度와의 관계

$$W=3\times 10^{-5}, G=5000$$

(a) EHD 理論, (b) 剛體圓筒

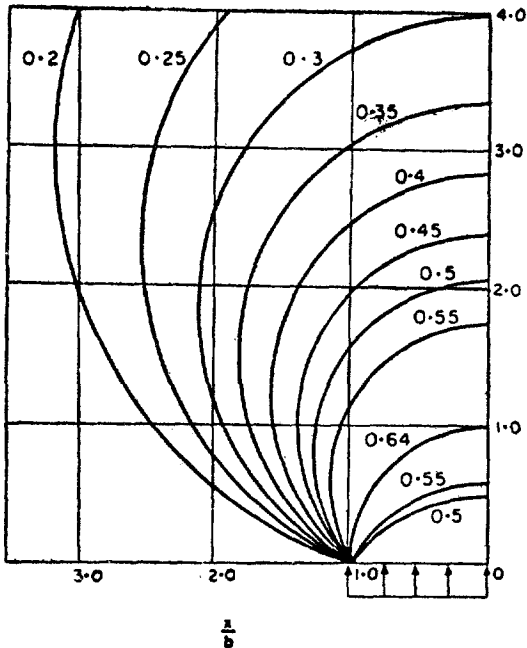


Fig. 7. 均一壓力

最大 stress 差 / 最大表面壓力의 율곡도

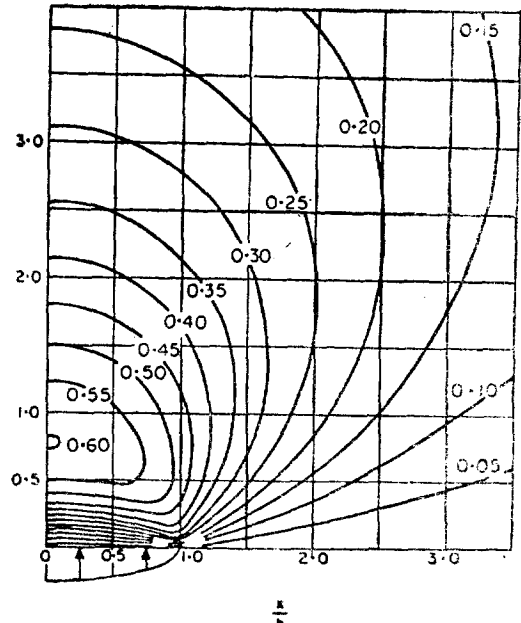


Fig. 8. Hertz 壓力

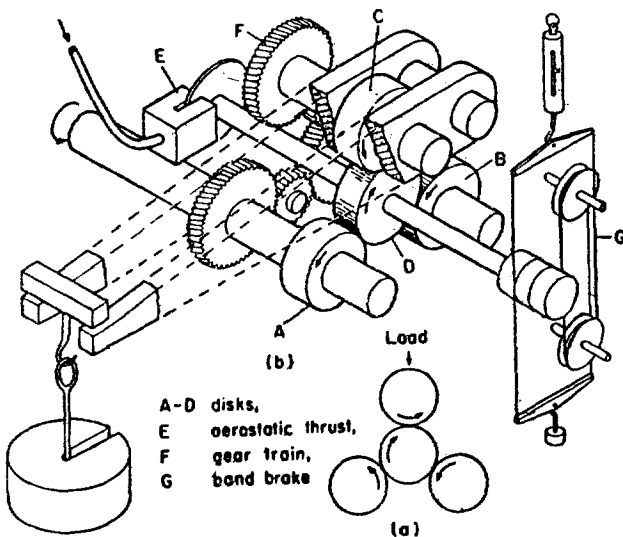
EHD의 實驗

EHD의 實驗은 1935년에 Merritt 이란 사람이 gear tooth와 비슷한 작용을 하는 disk machine을 만들어 實驗한 것이 始初라고 할 수 있겠다. 그 후 많은 研究 實驗이 展開되었고 많은 實驗機器가 쓰여졌고 그중 한

가지만 소개해 본다면 그림 9와 같이 four-disk machine을 들 수 있다. 여기서 세개의 disk는 gear F에 의하여 回轉하며 가운데 있는 disk는 다른 세개의 disk에 의하여 지탱되고 있다. 外部에서 偶力을 加할 수 있으며 이는 순수한 偶力으로서 band brake G에서 加해진다. 이 장치는 주로 流膜의 두께와 모양을 測定하는데 쓰이며 이외에도 cylinder나 rotational disk를 利用한 장치가 있다. 그 동안 EHD에 관한 實驗을 한 것을 살펴 본다면 다음 表 2와 같으며 많은 사람이 研究한 것을 알 수 있다. 實驗과 理論은 비교적 잘 一致하였으며 sible의 實驗에 의하면 理論에서 計算한 流膜의 두께와 實測한 流膜의 두께가 white mineral oil, silicone oil, diester oil 등에 잘 맞음을 알았고 Crook의 實驗에 의하면 流膜對 速度粘度의 直線이 理論直線과 약간 물매가 다름을 알았다. 그러나 一般적으로 壓力分配를 볼때 理論値와 實驗値가 잘 一致함을 볼 수 있다.

EHD의 應用

EHD의 代表的인 應用例은 線接觸을 이루는 gear에서의 流膜두께의 變化이다. 剛體의 gear에 對해 變形의 영향을 考慮하면 流膜두께 및 壓力등을 計算할 수 있다. 또한 點接觸을 이루는 rolling에 있어서도 表面의 變形과 rolling fatigue와는 밀접한 關係가 있다.



(a) 原理 (b) 構造

Fig. 9. Four-Disk Machine

表 2 EHD 實驗의 概要

實 驗 者	第度	裝 置	材 質	潤 滑 劑	接 觸	測 定
Meritt	35	Disk M/C	Steel Bronze	Mineral Oil Castor Oil	線	偶力
Lane & Hughes	52	"	Steel-Steel	Mineral Oil	"	流膜(電氣抵抗)
Cameron	54	"	Nickel-Steel	"	"	" (")
Sibley etc	60	"	Bearing steel	White Mineral Synthetic Oils	點	" (X-ray)
Archard & Kirk	61	Crossed Cylinder	Steel	Mineral Oil	"	" (電氣容量)
Crook	63	4-Disk	Steel-steel	"	線	" (")
Dowson & Longfield	64	Rotational Disk	Steel-Bronze	"	"	壓力分配
Archard & Kirk	63	Crossed Cylinder	Steel, Brass, Glass, Carbon	"	點	偶力流膜
Dowson & Gohar	66	Newton's Ring	Ball Bearing	"	"	(電氣容量) 流膜(光學的)
平野富士夫	70	(日本の EHD 研究 始作)				

이 외에도 EHD 가 pitting 에 미치는 영향, 또한 고무의潤滑이나 foil bearing 의潤滑에도 EHD 의 理論이 應用될수 있으며 아직도 많은 과제가 남아있는 實情이다.

참 고 문 헌

- (1) Tower, B.: Second Report on Fiction Experiment, *proc. Inst. Mech. Eng. (London)*, pp. 58—70 (1885)
- (2) Reynolds, O.: On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beanchamp Tower's Experiments, *Phil. Trans. Roy Soc.*, 177, 157 (1886)
- (3) ASME Pressure-Viscosity Report, Vol. I—II (1953)
- (4) P. S. Y. Chu and A. Cameron: *J. Inst. Petr.*, 48, 147 (1962)
- (5) Cameron: The Principles of Lubrication, John Wiley & Sons Inc. (New York), (1966)
- (6) G. D. Archard, F. C. Gair, and W. Hirst: *Proc. Roy. Soc., A* 262, 51(1961)
- (7) A. Cameron and R. Gohar: *Proc. Roy. Soc., A* 291, 520 (1966)
- (8) J. F. Archard and E. W. Cowking: *IME, Proc. on EHD Lubrication (Leeds)* (1965)
- (9) H. S. Cheng: *Trans. ASME, J. Lub. Tech.*, 92, 155(1970)
- (10) D. Dowson and G. R. Higginson: *Elasto-Hydrodynamic Lubrication*, Pergamon Press (London), (1966)
- (11) 平野富士夫: 強性流體潤滑, 潤滑 12 273 (1967)